**IME-USP**
**MAT105 – *Geometria Analítica***
1/2020 – T21 (IF) e T42 (IME)
*Profa. Ana Paula Jahn*

**Lista 1**

***Gabarito – Exercícios Ímpares***

1) Sejam A = (3,2,0), B = (0,3,−2) e C = (4,3,2) pontos do espaço. Determine o ponto *D* tal que: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Seja $D = (x, y, z)$ o ponto pedido.

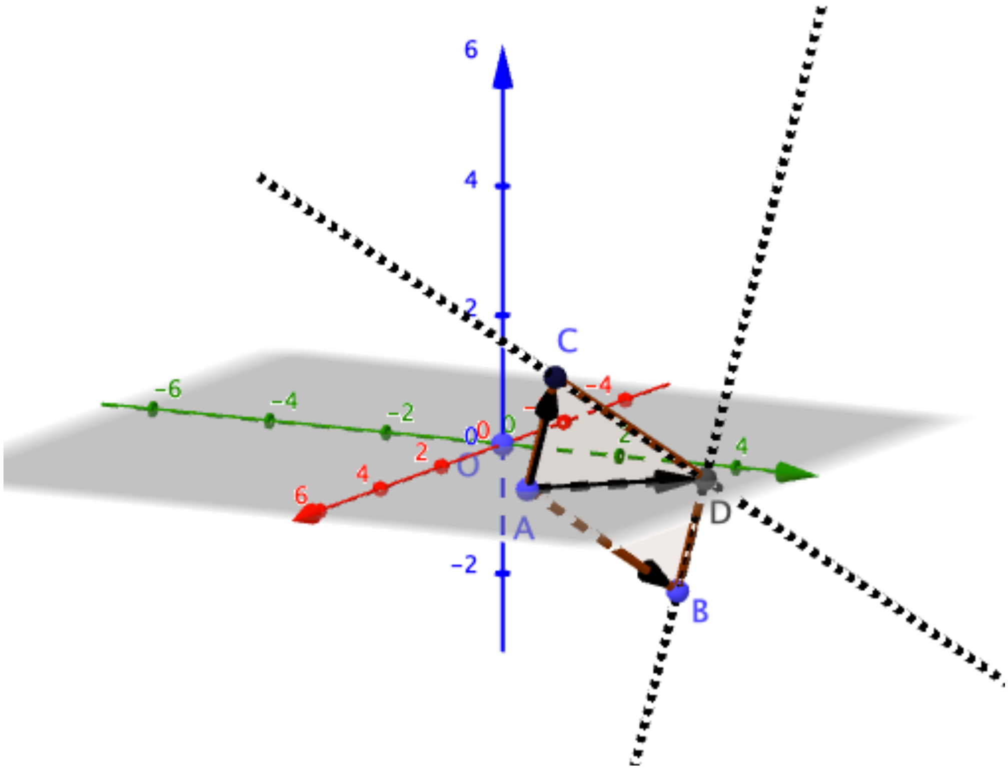
Sendo *D* tal que: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, tem-se:

$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$ (em termos de coordenadas: $\overrightarrow{OP} = P$)
$D - A = (B - A) + (C - A)$ (propriedades da adição de vetores)
$D = B + C - A$
$D = (0, 3, -2) + (4, 3, 2) - (3, 2, 0)$
$D = (1, 4, 0)$

Ou, sendo:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A = (-3, 1, -2)$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = C - A = (1, 1, 2)$
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$D = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (3, 2, 0) + (-3, 1, -2) + (1, 1, 2) = (1, 4, 0)$

**Resposta**: $D = (1, 4, 0)$

***Representação gráfica***: (observe que como $\overrightarrow{AD}$ é o vetor soma de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, corresponde ao quarto vértice do paralelogramo de lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; note ainda que *D* pertence ao plano *OXY*.)




3) Suponha $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$.

a) Verifique se $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Se $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ então existem escalares *a* e *b* tais que:

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$$

Assim:

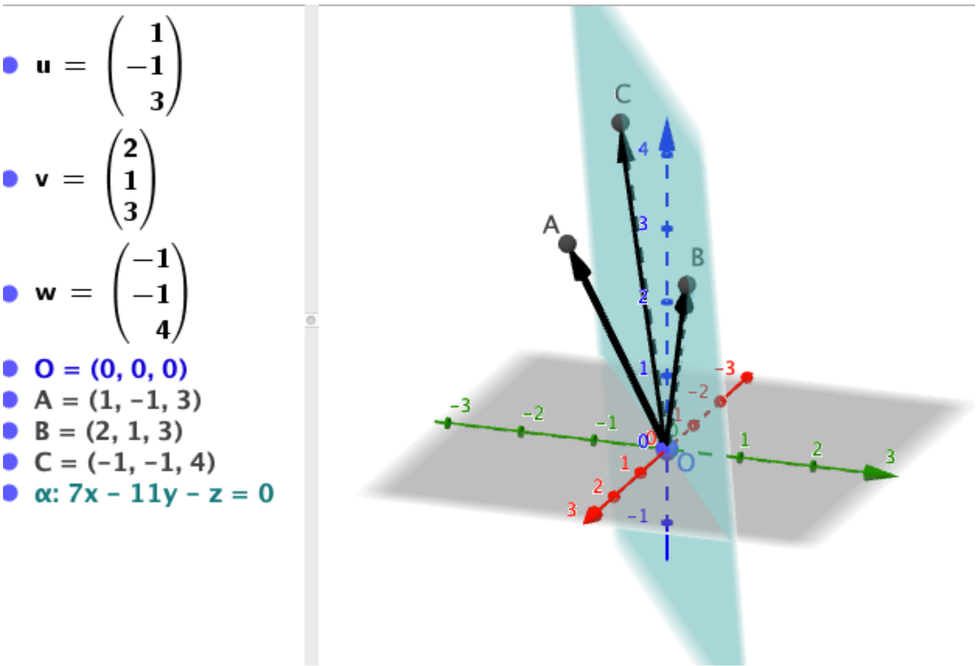
$$(1, -1, 3) = a(2, 1, 3) + b(-1, -1, 4)$$

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ a - b = -1 \\ 3a + 4b = 3 \end{cases}$$

**S.I.** = **Sistema Impossível** (Por quê? Verifique que os valores de $a$ e $b$ que satisfazem as duas primeiras equações, não satisfazem a terceira.)

Logo: $\vec{u}$ **não** é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

***Interpretação geométrica***:




Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ não são coplanares (A=$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI).

(*OBC* determinam um plano α, e $A \notin \alpha$. Qualquer combinação linear de $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ resulta em um vetor coplanar com eles.
Não é possível obter $\vec{u}$.)

b) Escreva $\vec{t} = (4, 0, 13)$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Verifique sua resposta graficamente no *Geogebra*.

$$\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$
$$(4, 0, 13) = a(1, -1, 3) + b(2, 1, 3) + c(-1, -1, 4)$$

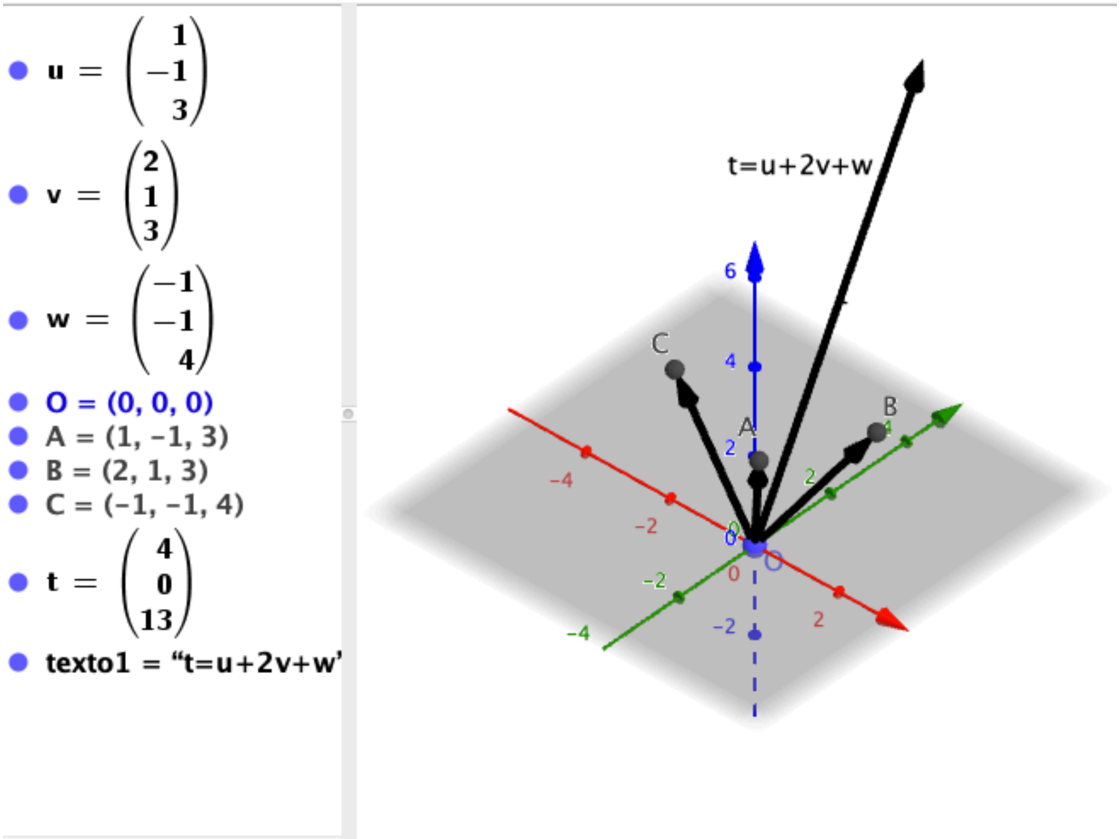
$$\begin{cases} a + 2b - c = 4 \;\; (1) \\ -a + b - c = 0 \;\; (2) \\ 3a + 3b + 4c = 13 \;(3) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:
De (1)+(2): $3b - 2c = 4$ (4)
De 3.(2)+(3): $6b + c = 13$ (5)
De (4)+2.(5): $15b = 30 \Rightarrow \boldsymbol{b = 2}$ (6)
Subst. (6) em (5): $12 + c = 13 \Rightarrow \boldsymbol{c = 1}$ (7)
Subst. (7) em (1): $a + 4 - 1 = 4 \Rightarrow a = \mathbf{1}$
Logo, $S = \{(1, 2, 1)\}$
E $\vec{t} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$
De fato: $(4, 0, 13) = 1(1, -1, 3) + 2(2, 1, 3) + 1(-1, -1, 4)$

.

Dizemos que os escalares $a, b, c$ encontrados são as coordenadas do vetor em relação à base A formada por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, isto é: $\vec{t}_A = (1, 2, 1)$.

***Representação gráfica***:

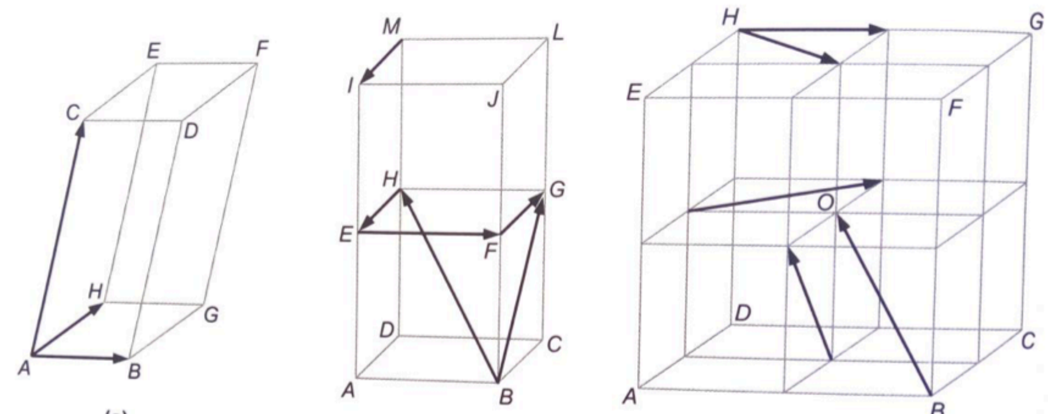



5) Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GR} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB}$ ? (Você não vai precisar de figura para chegar à resposta!)

Usando as propriedades da adição de vetores (comutativa, associativa, elemento oposto), tem-se:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GR} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FB} =$$
$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GR} = \boldsymbol{\overrightarrow{AR}}$$

7) Ache a soma dos vetores indicados em cada caso, sabendo-se que:
(a) *ABCDEFGH* é um paralelepípedo.
(b) *ABCDEFGH* e *EFGHIJLM* são cubos de arestas congruentes.
(c) *ABCDEFGH* é um cubo de centro *O* e está dividido em oito cubos congruentes por planos paralelos às faces.




(a) (b) (c)

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AF}$

Ou ainda:

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}\right) + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AF}$

(b) $(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}) + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{BG} + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF}) = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BF} =$
$= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{BL}$

Ou ainda:

$\left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF}\right) + \left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{MI}\right) + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} + \vec{O} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{BL}$

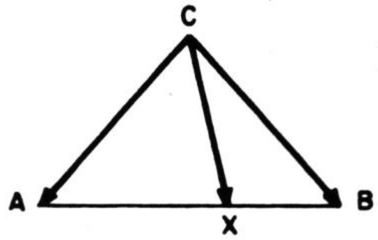
(c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{HG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF}\right) =$
$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{2}\left(2\,\overrightarrow{DG}\right) = \overrightarrow{DG}$

9) No paralelepípedo da Figura (a), sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AH}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$. Obtenha representantes dos vetores $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{O}$ e $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{y} = \vec{O}$. Indique quais propriedades de vetores e suas operações você utilizou.

Aplicando as propriedades da adição de vetores nas equações dadas, tem-se:

| | |
|---|---|
| $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{O}$<br>$\vec{x} = -\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{u} + \vec{v})$<br>$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AG}$<br>Logo,<br>$\vec{x} = -\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GA}$ | $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{y} = \vec{O}.$<br>$\vec{y} = -\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = -(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$<br><br>De 7(a), tem-se que $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AF}$<br>Logo, $\vec{y} = -\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FA}$ |

11) Dados quatro pontos *A*, *B*, *C* e *X* tais que que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ e $m$.




$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}$ , como $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, substituindo tem-se:

$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + m\overrightarrow{XB}$, como $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CB}$, tem-se:

$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + m(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CB})$, por propriedade de multiplicação por escalar, tem-se:

$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + m\overrightarrow{XC} + m\overrightarrow{CB}$ , somando $-m\overrightarrow{XC}$ a ambos os membros e considerando que $m\overrightarrow{XC} - m\overrightarrow{XC} = \vec{O}$, vem:

$\overrightarrow{CX} - m\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{CA} + m\overrightarrow{CB}$, e como $-m\overrightarrow{XC} = m\overrightarrow{CX}$, tem-se:

$\overrightarrow{CX} + m\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + m\overrightarrow{CB}$

(1+m) $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + m\overrightarrow{CB}$

Logo, $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{m+1}\left(\overrightarrow{CA} + m\overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{m+1}\overrightarrow{CA} + \frac{m}{m+1}\overrightarrow{CB}$ e com isso, obtém-se $\overrightarrow{CX}$

como combinação linear de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ em em função de $m$.

13) Sejam *A*, *B* e *C* pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que:

a) *X* pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$ se, e somente se, existem escalares $\alpha$ e $\beta$ tais que $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ e $\alpha + \beta = 1$

b) *X* pertence ao segmento $\overline{AB}$ se, e somente se, existem escalares $\alpha$ e $\beta$ tais que $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ e $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$

a) Supondo que *X* pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$, podemos dizer que *X*, *A* e *B* são colineares. Logo, os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos. Consideramos $\overrightarrow{AX}$ um múltiplo de $\overrightarrow{AB}$.

o ponto X pode ser descrito como

$$X = k.\overrightarrow{AB} + A$$

onde k é um valor real qualquer
então

$$\overrightarrow{CX} = C - (k.\overrightarrow{AB} + A)$$

$$\overrightarrow{CX} = C - A - k.\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} - k.\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} - k.(C - B + C - A)$$

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} - k.(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$$

$$\overrightarrow{CX} = (1 + k)\overrightarrow{CA} - k.\overrightarrow{CB}$$

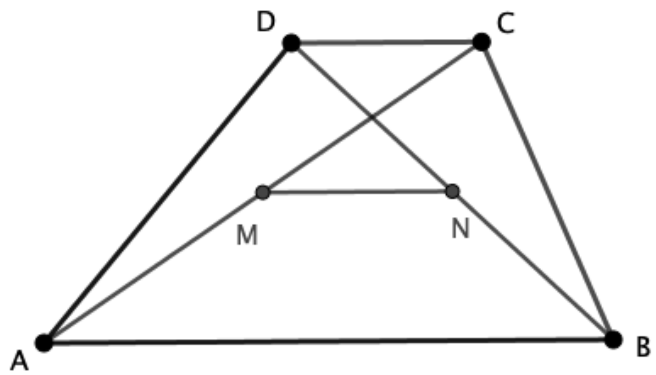
temos então que
$\alpha = 1 + k$

$\beta = -k$

$\alpha + \beta = 1 + k - k = 1$

Esta questão será retomada após o Teste 1, quando será introduzido o tópico de “equação vetorial da reta”.

15) Prove que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases.




Sejam:
*ABCD* um trapézio qualquer, com $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ as bases paralelas (H1)
e *M*, *N* os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente (H2).

Usando vetores podemos escrever:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1)$$

E: $$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} \quad (2)$$

Fazendo (1) + (2), tem-se:

$$2\,\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM}$$

Por (H2):

$$2\,\overrightarrow{MN} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}$$

Por propriedades da adição de vetores, tem-se:

$2\,\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, pois: $\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{O}$ e $\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \vec{O}$ (vetores opostos)

E como $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$ tem-se:

$2\,\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$

Por (H1), $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são **paralelos** (bases do trapézio *ABCD*), portanto o módulo de sua diferença é a diferença de seus módulos, ou seja, $\left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| - \left\|\overrightarrow{DC}\right\|$. Com isso, o módulo de $\overrightarrow{MN}$ ou medida do segmento $\overline{MN}$ é a semi-diferença das medidas das bases do trapézio *ABCD*.
E como o vetor $\overrightarrow{MN}$ é múltiplo de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, ele é paralelo a ambas as bases.

17) Classifique o triângulo de vértices $A = (2, 3, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (2, 2, -2)$.

No triângulo *ABC*, podemos definir os seguintes vetores:

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -1, -3)$
$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -2, -2)$
$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, 1, -1)$

Calculando o comprimento dos lados do triângulo *ABC*:

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Logo, o triângulo é escaleno (medidas dos três lados diferentes)

Note que: $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0.0 + 1.(-2) + (-1).(-2) = 0$

E, portanto, o triângulo *ABC* é retângulo em *B* (recíproca do Teorema de Pitágoras)

De fato:

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$$
$$(\sqrt{10})^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}\,)^2 \Leftrightarrow 10 = 4.2 + 2$$