Aula ILM - 23/06/2020

Indução Forte

↳ Pode ser vista como uma generalização de Indução Matemática.

Em I.M., prova-se $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$ em dois passos

<u>Base Case</u>: prova de $P(0)$

<u>Passo Indutivo</u>: $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}}_{\text{I.U. e MP}} (\underbrace{P(n) \to P(n+1)}_{\text{MP}})$

$P(0) \to P(1) \to P(2) \to P(3) \to \dots \to P(n) \to \dots$

* Para provar um objetivo do tipo $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$

Prove que

$$\forall n (\overbrace{(\forall k < n\, P(k))}^{\text{Hip. Indutiva}} \to P(n))$$

em que o conjunto universo é $U = \mathbb{N}$

Givens	Goal
—	$\forall n \in \mathbb{N} (P(n))$

Será usado Ind. Forte.

Givens	Goal
—	$\forall n (\forall k < n (P(k)) \to P(n))$

Exemplo: Para todo natural n e todo natural m, se $m > 0$ então existem naturais q e r tais que $n = m.q + r$ e $r < m$.

↳ q é chamado quociente e r é chamado resto.

<u>Rascunho</u>:

Givens	Goal
—	$\forall m > 0 \forall n (\exists q \exists r (n = mq + r \land r < m))$

Suponha m arbitrário e que $m > 0$.

Givens	Goal
$m > 0$	$\forall n (\underbrace{\exists q \exists r (n = mq + r \land r < m)}_{P(n)})$
$m \in \mathbb{N}$	

Será usado Ind. Forte.

Givens	Goal
$m > 0$	$\forall n (\forall k < n (\exists q \exists r (k = mq + r \land r < m)) \to$
$m \in \mathbb{N}$	$\to \exists q \exists r (n = mq + r \land r < m))$

Suponha $n \in \mathbb{N}$ arbitrário.

Givens	Goal
$m > 0$	$\forall k < n (\exists q \exists r (k = mq + r \land r < m)) \to \dots$
$m \in \mathbb{N}$	$\dots \to \exists q \exists r (n = mq + r \land r < m)$
$n \in \mathbb{N}$	

Suponha $\forall k < n (\exists q \exists r (k = mq + r \land r < m))$

Givens		Goal
$m > 0$	$\{ n < m$	$\exists q \exists r (n = mq + r \land r < m)$
$m \in \mathbb{N}$	$n \geq m \}$	
$n \in \mathbb{N}$		
$\forall k < n (\exists q \exists r (k = mq + r \land r < m))$		

Será provado em casos exaustivos.

<u>Caso I</u>: Suponha $n < m$.

Givens	Goal
$m > 0$	$\exists q \exists r (\underbrace{n = mq + r \land r < m})$
$m \in \mathbb{N}$	
$n \in \mathbb{N}$	$\underline{3/4 = 0 + 3}$
$\forall k < n (\exists q \exists r (k = mq + r \land r < m))$	
$n < m$	

Seja $q = 0$ e $r = n$. Note que $m > n = r$. Ainda,

$mq + r = m.0 + n = 0 + n = n$

<u>Caso II</u>: Suponha $n \geq m$.

Givens	Goal
$m > 0$	$\exists q \exists r (n = mq + r \land r < m)$
$m \in \mathbb{N}$	
$n \in \mathbb{N}$	
$\forall k < n (\exists q \exists r (k = mq + r \land r < m))$ } Hip. Indutiva ($\forall k < n\, P(k)$)	
$n \geq m$	

Note que $n - m < n$, pois $m > 0$. Usando I.U. na Hipotese Indutiva para $k = n - m$, tem-se $(k < n) \to \exists q \exists r (k = mq + r \land r < m)$.

Givens	Goal
$m > 0$	$\exists q \exists r (n = mq + r \land r < m)$
$m \in \mathbb{N}$	
$n \in \mathbb{N}$	$k = n - 1$ n
$k < n \to \exists q \exists r (k = mq + r \land r < m)$	$k < n - 1$
$n \geq m$	
$k = n - m < n$	

Usando M.P. na condicional e $\underbrace{k = n - m < n}$, tem-se

$\exists q \exists r (k = mq + r \land r < m)$

Givens	Goal
$m > 0$	$\exists q \exists r (n = mq + r \land r < m)$
$m \in \mathbb{N}$	
$n \in \mathbb{N}$	
$\exists q \exists r (k = mq + r \land r < m)$	
$n \geq m$	
$k = n - m < n$	

Usando I.E., seja $\hat{q} \in \mathbb{N}$ e $\hat{r} \in \mathbb{N}$ tais que $k = m\hat{q} + \hat{r}$ e $\hat{r} < m$.

Logo, $m\hat{q} + \hat{r} = k = n - m$. Assim,

$\underline{m(\hat{q} + 1) + \hat{r} = n}$.

Seja $q = \hat{q} + 1$ e $\underline{r = \hat{r}}$.

Givens	Goal
$m > 0$	$\underline{n = mq + r} \land \underline{r < m}$
$m \in \mathbb{N}$	
$n \in \mathbb{N}$	$n = m(\hat{q} + 1) + \hat{r} \land \hat{r} < m$
$k = m\hat{q} + \hat{r} \land \underline{\hat{r} < m}$	
$n \geq m$	
$k = n - m < n$	
$\cancel{q = \hat{q} + 1}$	
$\cancel{r = \hat{r}}$	

Já provamos que $n = m.q + r$. Note que $\underline{m > \hat{r} = r}$.

Definição. A sequência de números a seguir é chamada de Números de Fibonacci

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \geq 2 (F_n = F_{n-1} + F_{n-2})$$

$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$\dots$

Teorema Se F_n é o n-ésimo número de Fibonacci, então

$$\left. F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right\} P(n)$$

Proof Será usado Ind. Forte. Quer-se provar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right)$$

$\forall n (\underline{\forall k < n\, P(k)} \to P(n))$

usando Ind. Forte. Ou seja,

$$\forall n \left(\forall k < n \left(F_k = \frac{(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^k - (\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))^k}{\sqrt{5}} \right) \to \left(F_n = \frac{(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^n - (\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))^n}{\sqrt{5}} \right)\right)$$

Tome $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Suponha que

$$\left.\forall k < n \left(F_k = \frac{(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^k - (\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))^k}{\sqrt{5}} \right) \right\} \text{Hip. Ind.}$$

<u>Caso I</u>: suponha $n = 0$. Note que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right] = \frac{1-1}{\sqrt{5}}$$
$$= 0 = F_0 = F_n$$

<u>Caso II</u>: suponha $n = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{\cancel{1}-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\left(\frac{\cancel{2\sqrt{5}}}{\cancel{2}}\right) = 1 = F_1 = F_n$$

<u>Caso III</u>: Suponha $n \geq 2$. Usando I.U. e MP na Hip. Indutiva, tanto para $k = n-1$ quanto para $k = n-2$ tem-se

$$\begin{cases} F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] \\ F_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right] \end{cases}$$

Logo, usando $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, tem-se

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\underbrace{\left[1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\underbrace{\left[1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]}\right\}$$

Note que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$= 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Analogamente,

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$= \frac{2 + 1 - \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left[1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left[1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

Teorema (Princípio da Boa Ordenação) Todo subconjunto não vazio do conjunto de números naturais possui elemento mínimo.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}}\, P(n)$

Givens	Goal
—	$\forall A (A \neq \emptyset \land A \subseteq \mathbb{N} \to \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b))$

Tome A arbitrário. Note que o goal é equivalente a

$\neg(A \neq \emptyset \land A \subseteq \mathbb{N}) \lor \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b)$

iet $A = \emptyset \lor (\neg A \subseteq \mathbb{N}) \lor \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b)$

iet $(A \subseteq \mathbb{N}) \to (A = \emptyset \lor \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b))$

iet $(A \subseteq \mathbb{N}) \to (A \neq \emptyset \to \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b))$

iet $(A \subseteq \mathbb{N}) \to (\neg \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b) \to A = \emptyset)$

Givens	Goal
—	$(A \subseteq \mathbb{N}) \to (\neg \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b) \to A = \emptyset)$

Suponha $A \subseteq \mathbb{N}$ e suponha que A não possui elemento mínimo

Givens	Goal
$A \subseteq \mathbb{N}$	$A = \emptyset$
$\neg \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b)$	

Note que $(A = \emptyset \land A \subseteq \mathbb{N})$ é equivalente a $\forall n \in \mathbb{N} (n \notin A)$.

Givens	Goal
$A \subseteq \mathbb{N}$	$\forall n \in \mathbb{N} (\underbrace{n \notin A}_{P(n)})$.
$\neg \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b)$	

$\forall n (\forall k < n\, P(k) \to P(n))$

Será usado Ind. Forte.

Givens	Goal
$A \subseteq \mathbb{N}$	$\forall n (\forall k < n (k \notin A) \to (n \notin A))$
$\neg \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b)$	

Tome n arbitrário. Suponha $\forall k < n (k \notin A)$.

Givens	Goal
$A \subseteq \mathbb{N}$	$n \notin A$
$\neg \exists a \in A\, \forall b \in A (a \leq b)$	
$\forall k < n (k \notin A)$.	

Suponha por contradição que $n \in A$. Neste caso, $n \in A$ e todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < n$ satisfaz $k \notin A$. Logo, todo elemento de A, se algum, é maior ou igual a n. Ou seja, n é elemento mínimo de A. Contradição.

<u>Exercícios 6.4</u>: {2, 19}