MPM5607 – Áreas: o método da exaustão e propriedades

Atividade 1 – Enuncie as propriedades da **tricotomia** dos números reais e da **densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.** Dê o enunciado do **Método da Exaustão de Arquimedes** para o cálculo de áreas de figuras planas, sem o emprego de limites (que não era um conceito ainda estabelecido na Grécia antiga...).

Atividade 2 – O objetivo é fazer a prova completa da seguinte proposição: "se um quadrado tem lado de medida **a** unidades de comprimento então sua área é $\mathbf{a^2}$ unidades de área, onde **a** é um número real positivo qualquer", utilizando as e propriedades ennciadas na atividade 1.

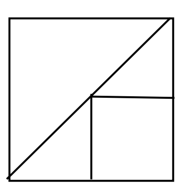
(i) Sabendo que um quadrado cujo lado mede 1 unidade de comprimento (u.c.) tem área 1 unidade de área (u.a.) e sendo q um número natural não nulo, prove usando uma decomposição conveniente do quadrado unitário, que um quadrado de lado medindo 1/q u.c. tem área de $1/q^2$ u.a.
(ii) Prove que um quadrado cujo lado tem como medida p/q u.c., onde $p/q \in \mathbf{Q}_+^*$, então sua área mede p^2/q^2 u.a. (na pg. 40 do texto distribuído há uma prova análoga para volumes).
(iii) Finalmente, usando o método de exaustão para áreas, análogo ao descrito para volumes prove a proposição enunciada como objetivo dessa atividade.

Atividade 3 – O objetivo é perceber, pela análise dos procedimentos empregados na atividade 1, o uso feito nas provas anteriores das seguintes propriedades fundamentais, que caracterizam áreas como medidas associadas a figuras planas limitadas (que cabem dentro de uma circunferência conveniente):

1 - figuras congruentes têm a mesma área;
2 - quadrados cujos lados têm comprimento 1 u.c. têm 1 área u.a.;
3 - se **A** e **B** são figuras tais que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, onde a figura **B\A** tem área não nula (ou seja, contém algum quadrado no seu interior) então área(**A**) < área(**B**);
4 - se uma figura **A** se decompõem na união de figuras $\mathbf{A_i}$, com i = 1, 2, ... , n ($n \in \mathbf{N}$) de tal forma que entre as figuras $\mathbf{A_i}$ não haja sobreposição, então a área de **A** é a soma das áreas das n $\mathbf{A_i}$ (i = i, 2, ... , n).

Questão da Atividade 3: Identifique e explicite os trechos das provas feitas na atividade 2 onde cada uma das propriedades de 1 a 4 acima foi utilizada.

Atividade 4 – No desenho abaixo, diga o valor da área de cada um dos polígonos que você puder identificar, sendo **a** o comprimento do lado do quadrado maior e **a/2** o lado do quadrado menor. Justifique suas repostas com base nas propriedades enunciadas na atividade 3 ou na proposição demonstrada na atividade 2. Explicite as propriedades utilizadas para determinar estas áreas.



Atividade 5 – Usando o método da exaustão de Arquimedes e as propriedades de área enunciadas no enunciado da atividade 3, demostre que a área de uma de um retângulo de lados **a** e **b** vale $\mathbf{ab^2}$.