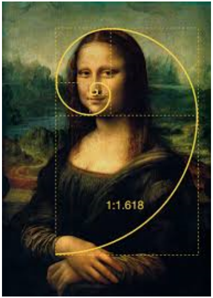
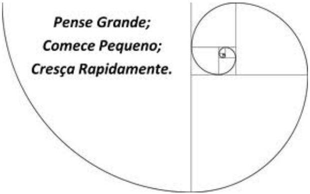


Frações contínuas

Deissy M. S. Castelblanco

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Maio de 2015



Introdução

Objetivo: Construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$

Século XIX: limites de sequências.

Exemplo

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971...$$

Introdução

Objetivo: Construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$

Século XIX: limites de sequências.

Exemplo

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288841971\ldots$$

$$\begin{aligned} 3 <& \pi < 4 \\ \frac{31}{10} <& \pi < \frac{32}{10} \\ &\vdots \\ \frac{p_k}{10^k} <& \pi < \frac{p_k + 1}{10^k}. \end{aligned}$$

$$|\pi - \frac{p_k}{10^k}| < \frac{1}{10^k}.$$

Introdução

Exemplo

- $\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3,142857143$

$$|\pi - \frac{22}{7}| < \frac{1}{700}.$$

Introdução

Exemplo

- $\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3,142857143$

$$|\pi - \frac{22}{7}| < \frac{1}{700}.$$

- $\pi \approx \frac{355}{113} \approx 3,14159292$

$$|\pi - \frac{355}{113}| < \frac{1}{3000000}.$$

Definição

Uma Fração Contínua simples é uma fração da forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \quad ,$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$, e $a_i \in \mathbb{N}_*$.
Denotamos esta expressão por

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots].$$

Propriedade

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe (a_k), tal que $x = [a_0; a_1, \ldots]$.

Vantagem: Podemos representar os números reais, usando números inteiros, que não depende da base.

Propriedade

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe (a_k), tal que $x = [a_0; a_1, \ldots]$.

Vantagem: Podemos representar os números reais, usando números inteiros, que não depende da base.

Ideia: Inverter o numerador.
Sejam $x \in \mathbb{R}$, e $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Então $0 < x - a_0 < 1$.

Se $x_1 = \frac{1}{x - a_0}$, $x_1 > 1$. E $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$.

Análogamente, se
$a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$, e $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$, então $x_2 > 1$, $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ e

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}}.$$

Continuando desta forma, temos duas opções:

- $x \in \mathbb{Q}$, se existe a_n tal que $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$.
- $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, senão, i.e, $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

- $x \in \mathbb{Q}$, se existe a_n tal que $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$.
- $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, senão, i.e, $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Exemplo

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \ddots}}}}} = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ \cdots]$$

- $x \in \mathbb{Q}$, se existe a_n tal que $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$.
- $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, senão, i.e, $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Exemplo

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}} = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ \cdots]$$

Observemos que

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = [3; 7],$$

- $x \in \mathbb{Q}$, se existe a_n tal que $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$.
- $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, senão, i.e, $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Exemplo

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \ddots}}}}} = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ \cdots]$$

Observemos que

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = [3; 7],$$

e que

$$3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = [3; 7, 15, 1].$$

Fração contínua de um número irracional

Toda expansão em frações contínuas infinita representa um número irracional.

Fração contínua de um número irracional

Toda expansão em frações contínuas infinita representa um número irracional.

Se

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots],$$

Chamamos $\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}$, convergentes de x.

Fração contínua de um número irracional

Toda expansão em frações contínuas infinita representa um número irracional.

Se

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots],$$

Chamamos $\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}$, convergentes de x.

Teorema

Para todo número irracional x a sequência infinita dos seus convergentes verifica,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = x.$$

Logo existe uma sequência infinita de racionais que são aproximações muito melhores para os irracionais.

Exemplos

Representações em frações contínuas, muito mais simples.

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = \cdots$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots].$$

Logo,

$$\sqrt{2} = [1; \overline{2}].$$

Exemplos

Solução da equação: $x^2 - x - 1 = 0$.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = [1; \overline{1}].$$

Exemplos

Solução da equação: $x^2 - x - 1 = 0$.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = [1; \overline{1}].$$

Números com representação em frações contínuas infinitas periódicas se denominam Irracionalidades Quadráticas, e são solução de uma equação do tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

Solução da equação: $x^2 - x - 1 = 0$.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = [1; \overline{1}].$$

Números com representação em frações contínuas infinitas periódicas se denominam Irracionalidades Quadráticas, e são solução de uma equação do tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \ldots].$$

ALGORITMO DE EUCLIDES

Dados $p, q \in \mathbb{Z}$, existem $a, r \in \mathbb{N}$ com $0 < r < q$, tais que

$$p = aq + r$$

Então, dado $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, temos

$$\begin{aligned}
p =& a_0 q + r_1; & \qquad 0 < r_1 < q \\
q =& a_1 r_1 + r_2; & \qquad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 =& a_2 r_2 + r_3; & \qquad 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots & \\
r_{n-1} =& a_n r_n; & \qquad .
\end{aligned}$$

ALGORITMO DE EUCLIDES

Logo,

$$\frac{p}{q} = a_o + \frac{r_1}{q}, \qquad \frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \cdots$$

Portanto,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

ALGORITMO DE EUCLIDES

Logo,

$$\frac{p}{q} = a_o + \frac{r_1}{q}, \qquad \frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \cdots$$

Portanto,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Um número $x \in \mathbb{R}$ é racional se, e somente se, possui uma expansão em frações contínuas finita,

Interpretação geométrica

Enchemos um retângulo de tamanho $1 \times y$ com quadrados, sempre colocando o maior quadrado possível dentro do espaço ainda livre.

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ indicam o número de quadrados de cada tamanho.

Interpretação geométrica

Enchemos um retângulo de tamanho $1 \times y$ com quadrados, sempre colocando o maior quadrado possível dentro do espaço ainda livre.

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ indicam o número de quadrados de cada tamanho.

Se os lados do retangulo são 35 e 27, então $\frac{35}{27} = [1; 3, 2, 1, 2]$ pois temos:

Interpretação geométrica

Enchemos um retângulo de tamanho $1 \times y$ com quadrados, sempre colocando o maior quadrado possível dentro do espaço ainda livre.

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ indicam o número de quadrados de cada tamanho.

Se os lados do retangulo são 35 e 27, então $\frac{35}{27} = [1; 3, 2, 1, 2]$ pois temos:

$a_0 = 1$ quadrado grande, $a_1 = 3$ quadrados menores, $a_2 = 2$ quadrados ainda menores, $a_3 = 1$ quadrado ainda ainda menor.

Interpretação geométrica

Enchemos um retângulo de tamanho $1 \times y$ com quadrados, sempre colocando o maior quadrado possível dentro do espaço ainda livre.

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ indicam o número de quadrados de cada tamanho.

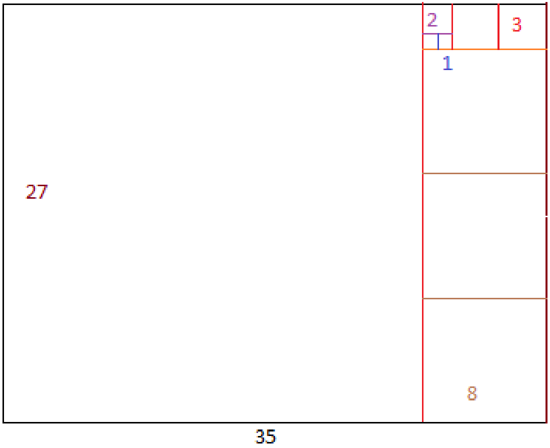
Se os lados do retangulo são 35 e 27, então $\frac{35}{27} = [1; 3, 2, 1, 2]$ pois temos:

$a_0 = 1$ quadrado grande, $a_1 = 3$ quadrados menores, $a_2 = 2$ quadrados ainda menores, $a_3 = 1$ quadrado ainda ainda menor.

Se o número fosse irracional, então a_n seria um número grande de quadrados ainda ainda ainda menores.

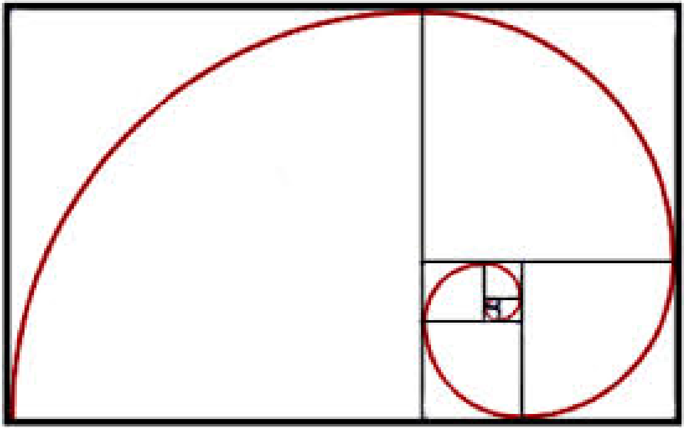
Interpretação geométrica

$$\frac{35}{27} = [1; 3, 2, 1, 2]$$



Interpretação geométrica

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; \overline{1}].$$



Natureza