Notas sobre o Guidorizzi, Calculo 1, 5ed - Semana 15 - página 272.
Artur Hideyuki Tomita

0.1 9.6. Máximos e mínimos, 9.7. Condições necessárias e suficientes para máximos e mínimos locais.

Na página 272 temos a definição de ponto de máximo e de mínimo (ou extremantes quando nos referimos a qualquer um deles). Vendo no gráfico é fácil identificar quem são estes pontos.

Dizemos que um ponto é máximo ou mínimo local (ou extremante local quando nos referimos a qualquer um deles) se num intervalo em torno do ponto ele é máximo ou mínimo.

São dados aluns exemplos de cálculos dos extremantes locais e de máximo ou mínimo usando o gráfico (exemplo 1 e 2).

O exemplo 3 é um exemplo de otimização, no caso, escrevemos os cones retos de área total fixada S e buscamos o cone de volume máximo. Isto é feito olhando o gráfico de volume, onde o volume é uma função do raio r (a altura também é em função do raio r, pois S é fixa). Note que se o raio vai para 0 ou a altura vai para 0 o volume vai para 0, assim este problema não tem cone de volume mínimo.

Os pontos no interior do intervalo cuja derivada dá 0 são chamados de pontos críticos. O fato importante aqui é que se um extremante está no interior do intervalo, sua derivada é 0. Assim, para encontrar um extremante no interior do intervalo, sempre primeiro analisamos os pontos críticos.

Os teoremas 1 é uma condições necessária para uma função derivável e o teorema 2 é uma condição suficiente para uma função com segunda derivada sem a necessidade de fazer o varal. Note que quando a segunda derivada dá 0 é necessário analisar pelo varal para saber o comportamento da função em torno do ponto.

0.2 9.8. Máximo e mínimo de função contínua em intervalo fechado.

O Teorema de Wierstrass diz que toda função contínua num intervalo fechado e limitado tem máximo e mínimo. Quando a função é derivável no interior do intervalo, sabemos que os extremantes no interior do intervalo são extremantes locais e pelo Teorema 1 da seção 9.7. é um ponto crítico. Assim para encontrar os extremantes neste caso, não precisamos analisar o gráfico da função. Os extremantes estão nas extremidades do intervalo ou são pontos críticos, assim o que fazemos e separar as extremidades e os pontos críticos, calcular o valor da função nesses pontos e ver qual o maior e o menor valor encontrados. Os pontos que dão o maior valor são os pontos de máximo e os pontos que dão o menor valor são os pontos de mínimo.

1 10. Primitivas.

1.1 10.1. Relação entre funções com derivadas iguais.

O teorema da página 284 diz que se f é continua num intervalo e $f'(x) = 0$ para todo x no interior desse intervalo então a função é constante. Isto só é válido quando consideramos um intervalo. Se a função está definida em pedaços, então a derivada por ser 0 em cada pedaço sem que a função seja constante (vide o primeiro exemplo.)

O Corolário indica que se duas funções contínuas num intervalo e tem a mesma derivada no interior do intervalo então elas diferem por uma constante.

O Exemplo 1, mostra que se $f(x) = f'(x)$ para todo x em $\mathbb{R}$ então $f(x)$ é um múltiplo real de e^x.

O Exemplo 2, é chamado de solução da equação diferencil $y' = y$ com condição inicial $y(0) = 2$. Como já sabemos as soluções de $y' = y$, a condição inicial vai dar o valor da constante k, no caso $y(x) = ke^x$ para algum k e $2 = y(0) = ke^0 = k$, o que determina que $k = 2$.

Os exemplos 3, 4 e 5 são outros exemplos de equções diferenciais simples, mas isto não será cobrado nesta disciplina.

1.2 10.2. Primitiva de uma função.

Uma função F é primitiva de f num intervalo I se F é derivável e $F' = f$ em I.

No caso, se F é primitiva de f, iremos dizer que $\int f dx = F + k$, $k \in \mathbb{R}$ então $\int f dx$ é uma família de funções que diferem por uma constante. Isto por que como foi visto anteriormente, isto é a família de todas as funções cuja derivada é a f.

Essa notação $\int f dx$ na verdade fará mais sentido quando enunciarmos os teoremas fundamentais do cálculo. No momento, é apenas uma notação.

As primitivas que estamos vendo saem pela conta da derivação fazendo os ajustes necessários. Na verdade, o que vemos é que podemos conferir por derivação que a função na tabela é a primitiva. A primitava de x^α aparece na 293. A primitiva de outras funções importantes aparecem nos exercícios e devem ser pensados como a tabela básica das primitivas de funções. Na hora de calcular as primitivas deve se usar as propriedades da derivação, como por exemplo, $\int (f + g)dx = \int f dx + \int g dx$. E usar que a derivade de cx é c para o cálculo de algumas derivadas simples. Por exemplo, para achar a primitiva de e^{5x}, sabemos que ela deve estar relacionada a e^{5x}. Assim, $(e^{5x})' = 5.e^{5x}$. Portanto, dividindo por 5 ambos os lados temos $\frac{1}{5}.(e^{5x})' = 5.e^{5x}$. Mas $\frac{1}{5}.(e^{5x})' = (\frac{1}{5}.e^{5x})'$, e então a primitiva de e^{5x} é $\frac{1}{5}.e^{5x} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

É preciso tomar um certo cuidado, temos que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, mas $\int \sin x dx = -\cos x + k$, $k \in \mathbb{R}$ e $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, mas $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$, $k \in \mathbb{R}$.