Exercícios

MAP 2110 - Diurno

IME USP

23 de junho

Sumário

Se A é uma matriz quadrada $n \times n$

- $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ é um polinômio de grau n
- Suas raízes serão chamadas autovalores de A
- Um vetor não nulo $\mathbf{v}$ que satisfaz $A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = 0$ é chamado de autovetor associado a λ.
- Se encontramos n autovetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n$, então a matriz $P = [\mathbf{v_1} \cdots \mathbf{v}_n]$ é invertível e $P^{-1}AP$ é diagonal.
- No caso acima dizemos que A é diagonalizável.

1

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Achar o polinômio característico e os auto valores.
2. Achar os autovetores e a matriz P inversível tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.

Se $p(\lambda)$ é o polinômio característico de uma matriz A, e se P é uma matriz invertível, então $P^{-1}AP$ tem o mesmo polinômio característico $p(\lambda)$

3

A sequência de Fibonacci é assim:

$$F_0 = 0 \text{ e } F_1 = 1 \tag{1}$$

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \tag{2}$$

Mostre que vale :

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k$$

E a fórmula de Cassini:

$$F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n$$

4

Dê exemplo de uma matriz que tenha os seguintes polinômios característicos:

1. $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$
2. $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$
3. $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$
4. $p(\lambda) = 2\lambda^2 - 2\lambda - 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

têm o mesmo polinômio característico (e portanto os mesmos autovalores), mas não tem os mesmos autovetores!

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se $\mathbf{v}_1$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ de uma matriz A e $\mathbf{v}_2$ é outro autovetor de A, será que podemos achar a matriz original A sabendo que

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}?$$