MAT1513 - Laboratório de matemática - 1o semestre 2020 ´
Profa. Daniela - licenciatura noturno
Solução quinta lista de exercícios

(1) Dados a, b > 0, mostre que existe $c \neq 0$ tal que $a^x = b^{cx}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Como a e b são dados, sendo a,b > 0 podemos tomar $c = \log_b a$.

$c = \log_b a. \Rightarrow a = b^c \Rightarrow a^x = b^{cx}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Dados a, b > 0, considere $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se existe $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, tal que $f(x_0) = g(x_0)$ então $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou equivalentemente, a = b.

Solução: $f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow a^{x_0} = b^{x_0}$, como a função $\log_a x$ é a inversa da função f :
Para $a \neq 1$
$a^{x_0} = b^{x_0} \Rightarrow x_0 = \log_a b^{x_0} \Rightarrow x_0 = x_0 .\log_a b$,
como $x_0 \neq 0$, podemos dividir os dois lados por x_0:
$x_0 = x_0 .\log_a b \Rightarrow 1 = \log_a b \Rightarrow a^1 = b \Rightarrow a = b$.
Para a=1
$1^{x_0} = b^{x_0} \Rightarrow 1 = b^{x_0}$, como $x_0 \neq 0$, b=1 $\Rightarrow$ a = b.

(3) Com um lápis cuja ponta tem 0,02mm de espessura, deseja-se traçar o gráfico da função $f(x) = 2^x$. Até que distância à esquerda do eixo vertical pode-se ir sem que o gráfico atinja o eixo horizontal?

Solução: Sabemos que o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$ vai se aproximando do eixo horizontal conforme o x decresce, porém sem nunca tocá-lo.
Podemos considerar a ponta do lápis como um círculo de raio 0,01 mm, então quando traçamos o gráfico o centro do lápis estará no ponto (x,y) e a espessura será um erro de medida, dado um x_0, não teremos um valor exato para $f(x_0)$, visualizaremos um valor entre $[f(x_0) - 0{,}01 ; f(x_0) + 0{,}01]$.
Esse erro na visualização fará com que tenhamos a percepção de que o gráfico está mais perto do eixo das abcissas.
Por tanto, o ponto onde o gráfico atinge o eixo horizontal será o ponto (x, f(x)) tal que f(x) = 0,01
Desenvolvendo:
$2^x = 0{,}01 \Rightarrow x = \log_2 0{,}01 \Rightarrow x = \log 0{,}01/\log 2 \Rightarrow \log 10^{-2}/\log 2 \Rightarrow x = -2/\log 2 \Rightarrow x \approx - 6{,}644$mm
A distância à esquerda do eixo vertical (0,f(x)) até o ponto (-6,644,0) é 6,644, onde o gráfico atingirá o eixo horizontal.

(4) Encontre a função $f(x) = c \cdot a^x$ cujo gráfico é dado:

Solução:
(a) $f(0) = 6 \Rightarrow c \cdot a^0 = 6 \Rightarrow c = 6$
$f(3) = 24 \Rightarrow 6a^3 = 24 \Rightarrow a^3 = 4 \Rightarrow a = \sqrt[3]{4}$

Por tanto, $f(x) = 6\cdot(\sqrt[3]{4})^x$

(b) $f(0)= 2 \Rightarrow c \cdot a^0=2 \Rightarrow c=2$

$f(2) = 2/9 \Rightarrow 2a^3= 2/9 \Rightarrow a^2=1/9 \Rightarrow a = 1/3$

Por tanto, $f(x) = 2\cdot(1/3)^x$

(5) Prove que uma função do tipo exponencial, isto é $f(x) = c \cdot a^x$, fica determinada quando se conhecem apenas dois de seus valores. Mais precisamente, se $f(x) = c \cdot a^x$ e $g(x) = d \cdot b^x$ são tais que $f(x_1) = g(x_1)$ e $f(x_2) = g(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$, então $a = b$ e $c = d$.

Solução: $f(x_1) = g(x_1) \Rightarrow c\cdot a^{x_1} = d\cdot b^{x_1} \Rightarrow c/d = (b/a)^{x_1}$

$f(x_2) = g(x_2) \Rightarrow c\cdot a^{x_2} = d\cdot b^{x_2} \Rightarrow c/d = (b/a)^{x_2}$

Então $(b/a)^{x_1} = (b/a)^{x_2}$

Como $x_1 \neq x_2$, então $b/a = 1 \Rightarrow b=a$ e, como $c/d = (b/a)^{x_1} \Rightarrow c/d = 1 \Rightarrow c=d$.

(6) Uma cultura de bactérias cresce segundo a lei $N(t) = \alpha 10^{\lambda t}$, onde $N(t)$ é o número de bactérias em t horas, $t \geq 0$, α e λ são constantes positivas. Se após 2 horas o número inicial de bactérias $N(0) = 10.000$ é duplicado, qual será o número de bactérias após 6h?

Solução: Temos que $N(0) = 10.000 \Rightarrow \alpha 10^{\lambda 0}=10.000 \Rightarrow \alpha=10.000$

e $N(2) = 2\cdot 10.000 \Rightarrow \alpha 10^{\lambda 2}= 2\cdot\alpha \Rightarrow 10^{\lambda 2}= 2 \Rightarrow \lambda= (\log 2)/2$

Pede-se $N(6)$, $N(6) = 10.000\cdot 10^{6(\log 2)/2} \Rightarrow N(6) = 10.000\cdot 10^{3\log 2} \Rightarrow N(6) = 10.000\cdot(10^{\log 2})^3$

Lembrando que $a^{\log_a b}= b$

Então: $N(6) = 10.000\cdot(10^{\log 2})^3 = 10.000\cdot(2)^3 = 80.000$

(7) Um computador desvaloriza-se exponencialmente em função do tempo, de modo que o seu valor y, daqui a x anos, será $y = A \cdot k^x$, onde A e k são constantes positivas. Se hoje o computador vale R\$5.000, 00 e valerá a metade daqui a 2 anos, qual será seu valor daqui a 6 meses?

Solução: Tomando y como f(x), temos que $f(x_0) = 5000 \Rightarrow A \cdot k^{x_0} = 5000$

e $f(x_0+2) = 2500 \Rightarrow A \cdot k^{x_0+2} = 2500 \Rightarrow A \cdot k^{x_0} \cdot k^2 = 2500 \Rightarrow 5000\cdot k^2 = 2500 \Rightarrow k =\sqrt{(½)}$

Pede-se $f(½)$, $f(x_0+½) = A \cdot k^{x_0+1/2} \Rightarrow f(x_0+½) = A \cdot k^{x_0}\cdot k^{1/2} \Rightarrow f(x_0+½) = 5.000 \sqrt{(½)}^{½}$

$= 5.000 \sqrt[4]{(½)} \approx 4204{,}5$ reais.

(8) Considere a equação $2^x + m\, 2^{2-x} - 2m - 2 = 0$.

(a) Resolva a equação para m = 1.

Solução: $2^x + 1\cdot 2^{2-x} - 2\cdot 1- 2 = 0 \Rightarrow 2^x + 2^2/ 2^x - 4 = 0$, como $2^x \neq 0$

$2^x + 2^2/2^x - 4 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 4 - 4\cdot 2^x = 0$
chamando 2^x de k, para $k > 0$, $k^2 + 4 - 4k = 0 \Rightarrow (k - 2)^2 = 0 \Rightarrow k=2$
Então temos que $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

(b) Determine todos os valores de m para os quais a equação tem uma única raiz real.

Solução: $2^x + m\,2^{2-x} - 2m - 2 = 0 \Rightarrow 2^x + m\,2^2/2^x - 2m - 2 = 0$, como $2^x \neq 0$
$2^x + m\,2^2/2^x - 2m - 2 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 4m - 2m\cdot 2^x - 2\cdot 2^x = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 4m - 2^x(2m+2) = 0$
chamando 2^x de k, para $k > 0$, $k^2 + 4m - k(2m+2) = 0$.
$k=2^x$, é uma função injetora e, portanto cada valor de k será correspondente de no máximo um elemento de seu domínio (x).
Portanto, para que a equação apresentada tenha apenas uma única raiz real é necessário que a equação de 2° grau $k^2 + 4m - k(2m+2) = 0$, com $k > 0$, tenha apenas uma única raiz real.
Uma equação de 2° grau pode ter até 2 raízes reais. Como o domínio está limitado a $k > 0$, teremos 2 casos em que a equação só terá uma raiz real:
1) Sem limitar o domínio temos que o número destas raízes depende do discriminante(delta). Sendo
$\Delta > 0$ (a equação terá duas raízes reais)
$\Delta = 0$ (a equação terá uma única raiz real)
$\Delta < 0$ (a equação não terá nenhuma raiz real)
Esta relação pode ser explicada pela formula de bhaskara que nos permite encontrar as raízes de uma equação de 2° grau.
Então temos que $\Delta = 0 \Rightarrow (-2m-2)^2 - 4(1)(4m) = 0 \Rightarrow 4m^2+8m+4-16m = 0 \Rightarrow (2m-2)^2=0$
$\Rightarrow 2m-2=0 \Rightarrow m = 1$

2) Temos que como $k > 0$, caso exista um valor de m para o qual uma das raízes da equação $k^2 + 4m - k(2m+2) = 0$, seja menor ou igual a zero e a outra seja positiva, só teremos uma raiz no domínio.

Trabalhando, por tanto, com $\Delta > 0$, tal que $x_1 \leq 0$ e $x_2>0$ ou $x_2 \leq 0$ e $x_1>0$
$\Delta > 0 \Rightarrow (-2m-2)^2 - 4(1)(4m) > 0 \Rightarrow 4m^2+8m+4-16m > 0 \Rightarrow (2m-2)^2 > 0$
$\Rightarrow \{m \in \mathbb{R} : m \neq 1\}$

$$x = \frac{-(-2m-2) \pm \sqrt{(2m-2)^2}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_1 = \frac{2m+2 + \sqrt{(2m-2)^2}}{2\cdot 1} \text{ e } x_2 = \frac{2m+2 - \sqrt{(2m-2)^2}}{2\cdot 1}$$
$\Rightarrow x_1=2m$ e $x_2 = 2$
Como $x_2>0$, $x_1 \leq 0 \Rightarrow 2m \leq 0 \Rightarrow m \leq 0$

Então os valores de m para os quais a equação tem uma única raiz real são $m \leq 0$ e $m=1$.

(9) A função $f(x) = a + 2^{bx+c}$ possui imagem igual ao conjunto $]-1, +\infty[$, e o gráfico de f passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -3/4)$. Determine os valores a, b e c.

Solução: Temos que a função 2^{bx+c} tem imagem $]0, +\infty[$, então conforme o valor de x decresce o gráfico se aproxima do eixo horizontal sem nunca tocá-lo, ao somarmos "a" a esta a função o gráfico se desloca verticalmente uma unidade para baixo, sendo $]-1, +\infty[$ a imagem da função $f(x) = a + 2^{bx+c}$., por tanto a = -1.

Temos que $f(0) = -3/4 \Rightarrow -1 + 2^{b0+c} = -3/4 \Rightarrow 2^c = ¼ \Rightarrow 2^c = 2^{-2} \Rightarrow c = 2$

$f(1) = 0 \Rightarrow -1 + 2^{b-2} = 0 \Rightarrow 2^b / 2^2 = 1 \Rightarrow 2^b = 2^2 \Rightarrow b = 2$

Por tanto, $a = -1$, $b = 2$ e $c = -2$.

(10) Se $f(x) = 2^{2x+1}$ e $f(a) = 4f(b)$, determine a relação entre os valores a e b.

Solução: $f(a) = 4f(b) \Rightarrow 2^{2a+1} = 4(2^{2b+1}) \Rightarrow 2^{2a+1} = 2^2(2^{2b+1}) \Rightarrow 2^{2a+1} = 2^{2b+3} \Rightarrow 2a+1 = 2b+3$
$\Rightarrow a = b+1$.

(11) Uma quantidade fixa de um gás ideal é mantida a temperatura constante, e seu volume varia com o tempo de acordo com a função $V(t) = \log_2(5 + \text{sen}(\pi t))$, $0 \leq t \leq 2$, em que t é medido em horas, V (t) é medido em m^3. Determine em que instante, no intervalo [0, 2], o volume atinge seu valor mínimo.

Solução: Como a função $\log_2(x)$ é crescente, temos que $V(t) = \log_2(V(t) = \log_2(5 + \text{sen}(\pi t))$ atingirá seu valor mínimo quando $5 + \text{sen}(\pi t)$ for mínimo, ou seja $\text{sen}(\pi t) = -1$(mínimo da função seno), para $t \in [0, 2]$, então $0 \leq \pi t \leq 2\pi$.
Neste intervalo, o $\text{sen}(\pi t)$ atinge seu valor mínimo somente quando $\pi t = 3\pi/2 \Rightarrow t = 3/2$.