MAE0399 - Análise de Dados e Simulação - 1º semestre de 2020 -
Profa. Márcia D'Elia Branco

Lista 6

1) Proponha um algoritmo para estimar $\theta = E[e^{-X}]$ usando o método de variáveis negativamente correlacionadas. Considere $X \sim Exp(0.5)$.

(a) Descreva o algoritmo partindo da simulação de uma $U_{(0,1)}$.
(b) Implemente o algoritmo para obter a estimativa de θ e compare com o valor verdadeiro.

2) Seja X uma v.a. com média conhecida $E[X] < \infty$. O interesse é estimar $P(X \leq a)$ para alguma constante a. O estimador ingênuo é dado por $I = 1$, se $X \leq a$ e $I = 0$, se $X > a$. Considere o estimador alternativo dado por $T = I + c(X - E[X])$.

(a) Determine a constante c tal que a variância de T seja minima.
(b) Obtenha a expressão para a porcentagem de redução da variância obtida com o uso de T no lugar de I. Considere o c ótimo obtido anteriormente.
(c) Para $X \sim U_{(0,1)}$, determinar a porcentagem de redução da variância.

3) Considere $X \mid Y = y \sim N(0, \frac{1}{y})$ e $Y \sim Exp(1)$. O interesse é estimar $\theta = P(X > 1)$.

(a) Explique como estimar θ usando Monte Carlo simples.
(b) Proponha um estimador mais eficiente usando o método do condicionamento. Justifique porque esse novo estimador é mais eficiênte que o anterior.
(c) Implemente ambos os algoritmos usando uma amostra de tamanho $R = 500$. Compare os tempos computacionais e os resultados obtidos.

4) Seja X uma v.a. com a seguinte densidade de probabilidade

$$f(x) = K(1+x)^{125}(1-x)^{3}8x^{34} \ , \quad 0 < x < 1,$$

em que K é uma constante de padronização.

Obtenha o estimador de $\theta = E[X]$ usando o método de amostragem por importância (IS). Use como proposta a distribuição $Beta(39, 35)$.

5) Considere um Passeio Aleatório com espaço de estados $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de transição dada por

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(a) Implente um programa para simular desse processo. Considere dois valores iniciais diferentes e uma amostra de tamanho 50 para cada um dos casos. Apresente os resultados usando um gráfico dos valores simulados versus o número da simulação (tempo).

(b) Especifique agora apenas um valor inicial e simule uma amostra de tamanho 1000. Calcule as frequências relativas de cada estado e proponha uma distribuição estacionária para o processo.

(c) Calcule a verdadeira distribuição estacionária e compare com sua estimativa.

6) Considere o seguinte modelo Beta-Binomial

$$X \mid \theta, n \sim B(n, \theta) \text{ com priori } \theta \sim Beta(2, 4).$$

(a) Obtenha a distribuição marginal de X (analiticamente) .

(b) Explique como o algoritmo de Gibbs pode ser usado para simular uma amostra da distribuição marginal de X. Considere n conhecido. Implemente esse algoritmo, considerando $n = 16$, um *burn-in* de tamanho $B = 100$ e uma amostra de Monte Carlo de tamanho $n = 500$. Apresentem algumas medidas resumos (média, mediana, desvio padrão, quantis) da amostra simulada.

(c) Faça um gráfico comparando as frequências dos valores simulados (observadas) com as frequências esperadas considerando as probabilidades verdadeiras dadas pela marginal de X (Beta-binomial) .

7) O interesse é simular de uma $Gama(a, 1)$, usando como proposta uma $Gama([a], \frac{[a]}{a})$ e o algoritmo de M-H. Em que $[a]$ representa o maior inteiro contido no número.

Escolha um valor para a (não inteiro) e implemente o algoritmo M-H independente, partindo somente da simulação de números aleatórios básicos $[U_{(0,1)}]$.

8) O interesse é simular de uma $N(0, 1)$ usando o algoritmo de M-H Passeio aleatório com erro $t - Student$ com ν graus de liberdades.

Implemente o algoritmo para $\nu = 5, 10$ e 20 e simule 100 valores. Faça o gráfico das médias desses valores até a etapa j, para $j = 1, 2, \ldots, 100$, em cada um dos casos. Para qual valor de ν esta mais clara a convergência do algoritmo? Justifique.