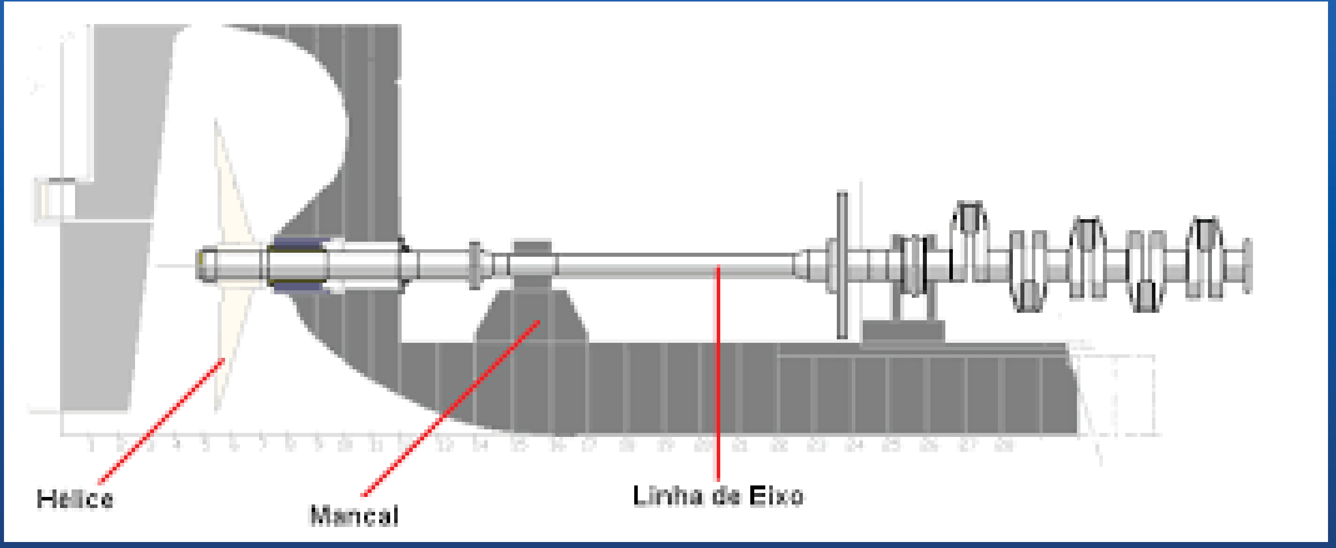
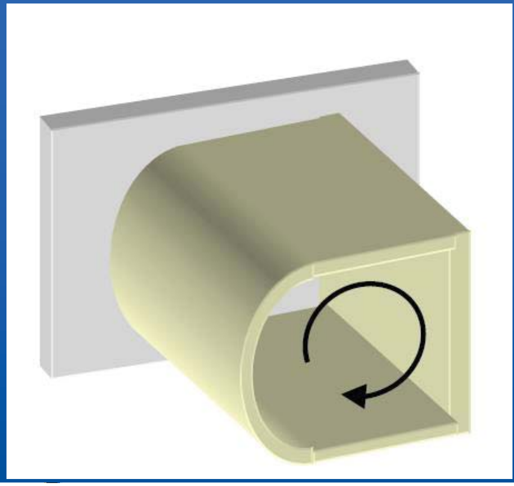
Torção de Membros Circulares

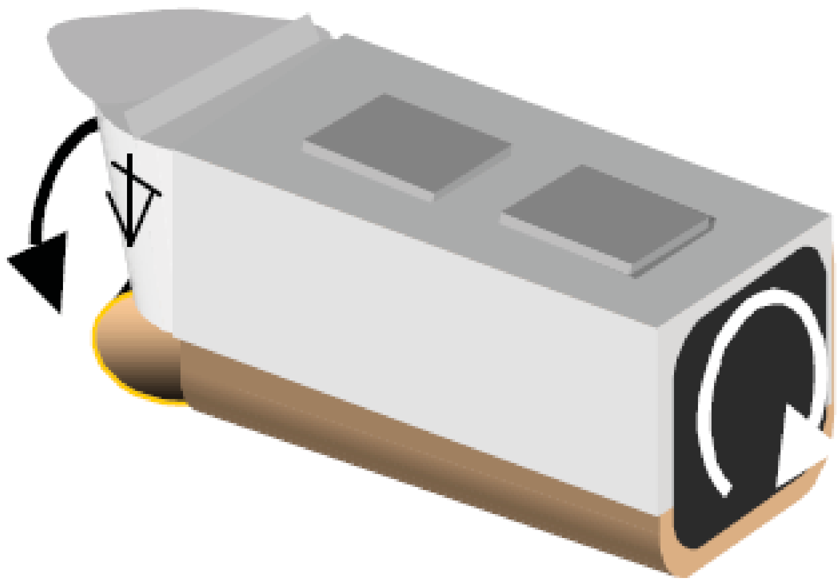
Diego F. Sarzosa Burgos
Núcleo de Mecânica da Fratura e Integridade Estrutural
Escola Politécnica – USP
E-mail: dsarzosa@usp.br

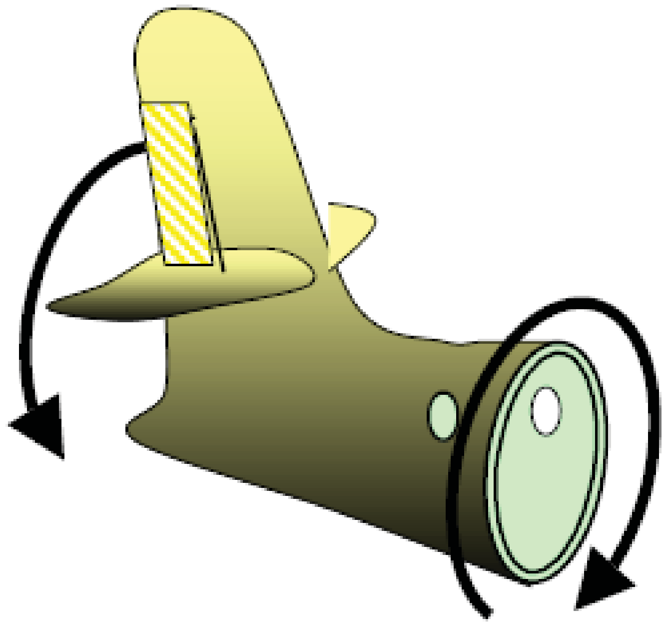
Torção



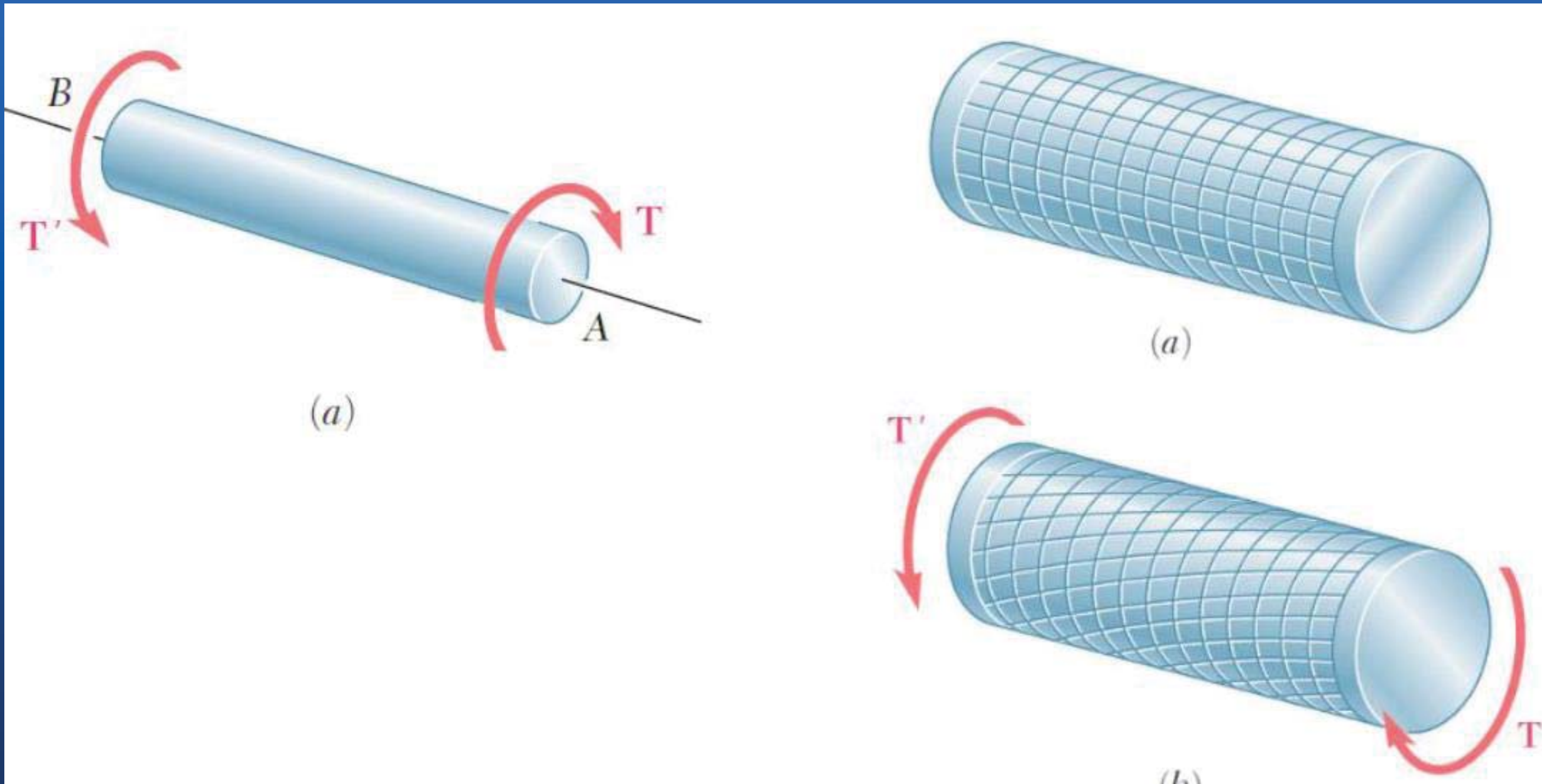
Torção em Membros de Parede Fina





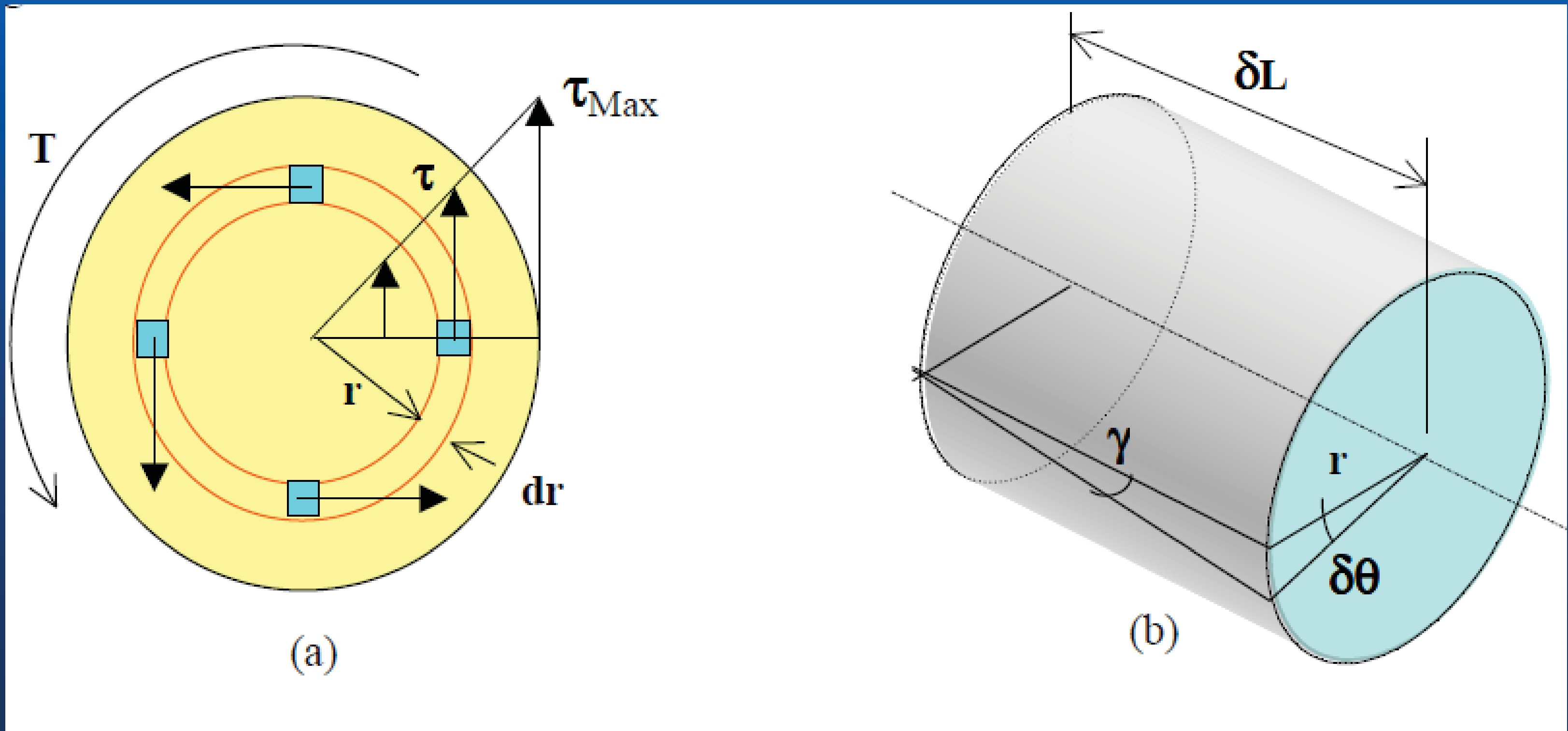


Torção

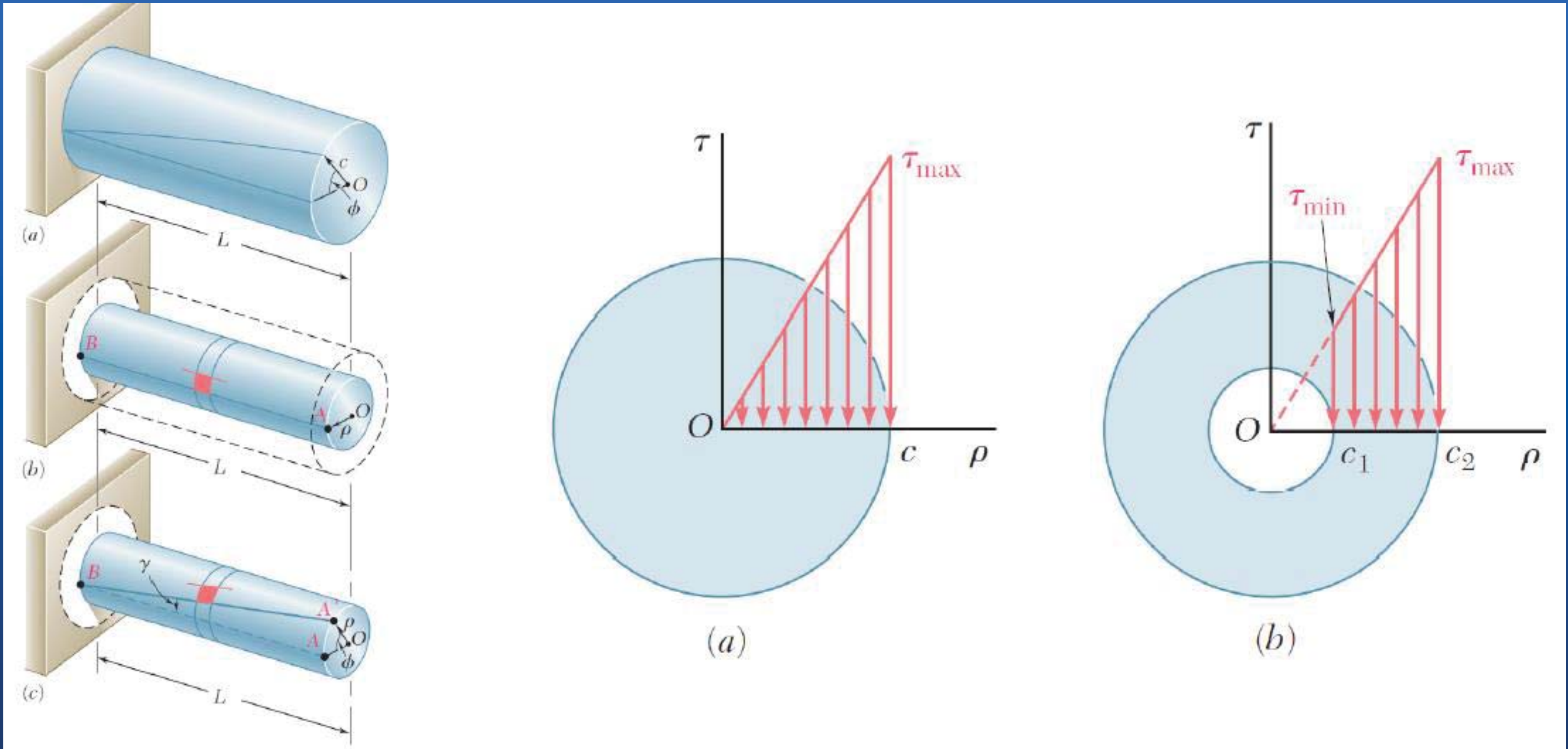


Torção

- **Admite-se que as deformações angulares variam linearmente desde o centro do membro**

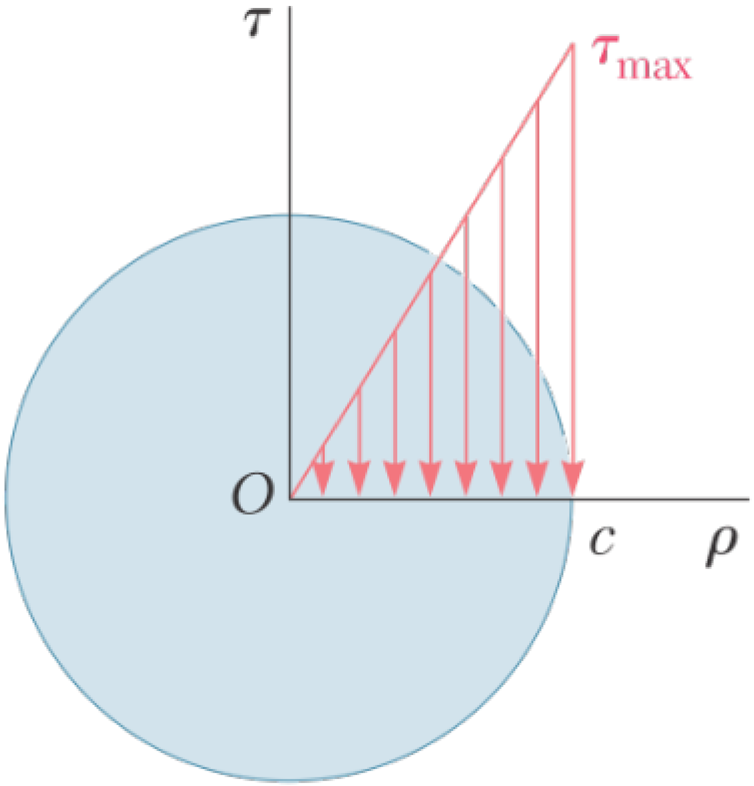


Torção



Torção

A tensão de cisalhamento atuante na barra circular pode ser calculada como:

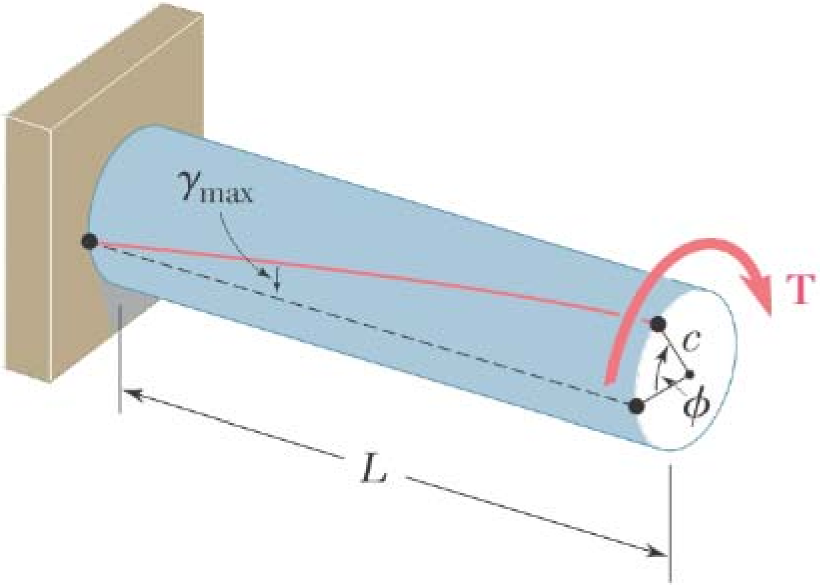


$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

σ = tensão de cisalhamento
T = momento torsor;
ρ = distância relativa ao centro da seção transversal da barra;
J = momento polar de inércia

Torção

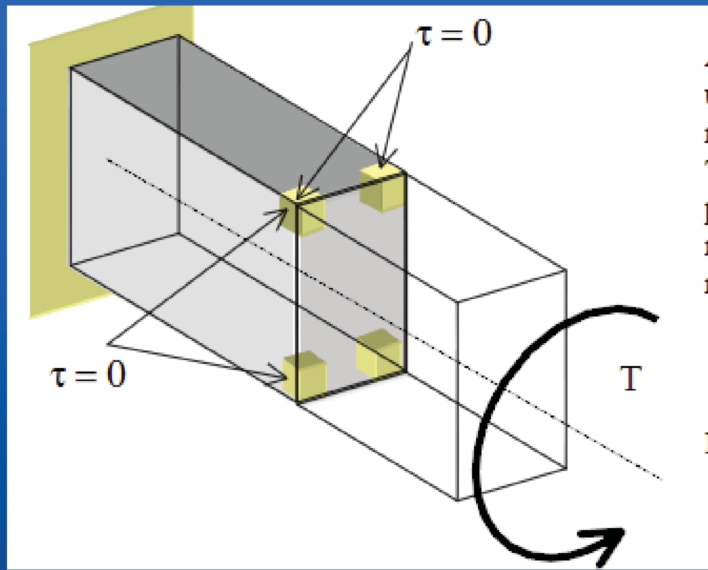
O ângulo de torção pode ser calculado como:



$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

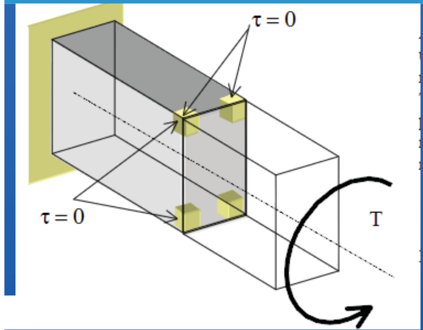
Φ = ângulo de torção
L = compimento da barra
G = módulo de cisalhamento
J = momento polar de inércia

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

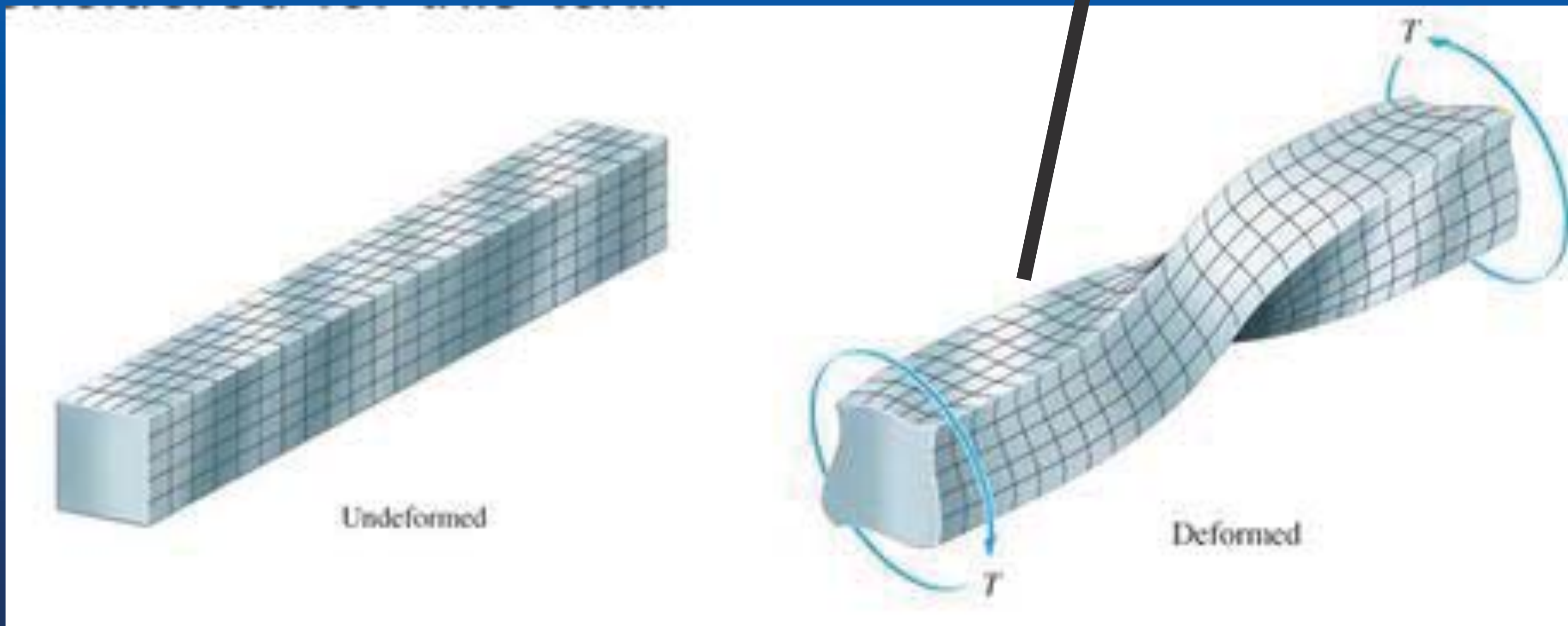


- Seções planas antes da deformação sofrem empenamento quando o membro sofre torção
- Distribuição complexa de tensões cisalhantes.
- Análise é muito mais complexa!

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

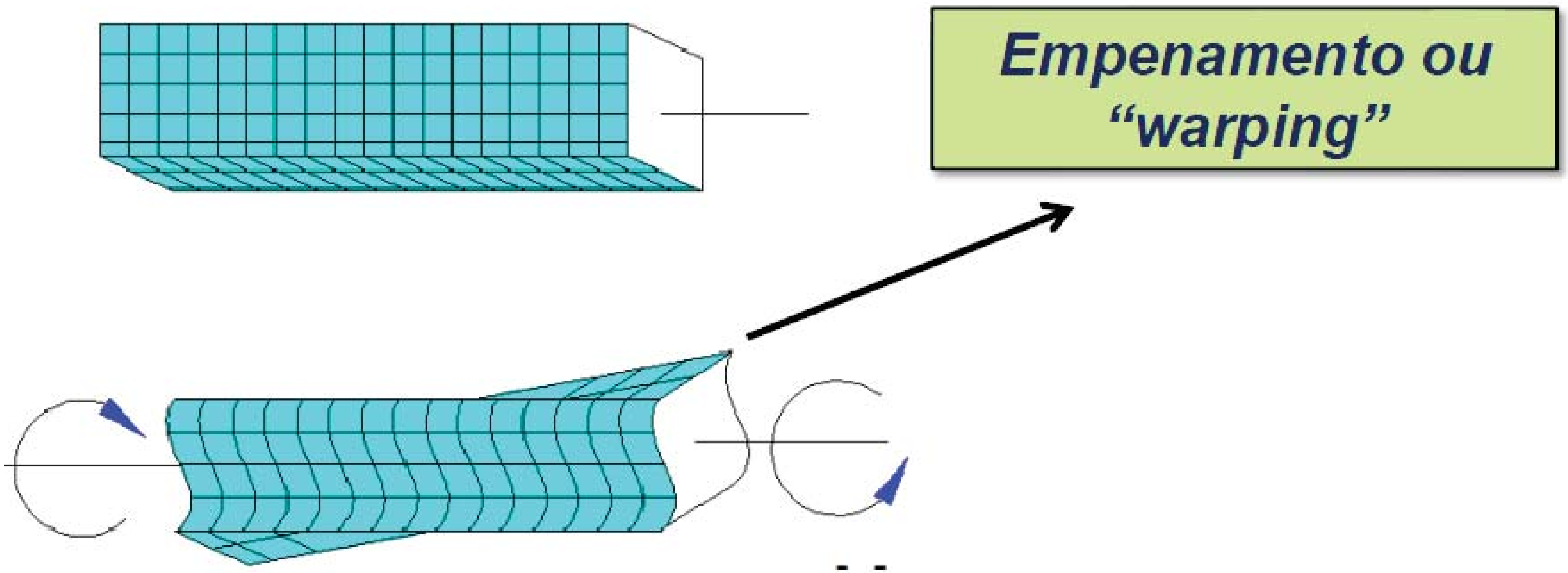


Empenamento ou Warping



Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Seções Planas não permanecem planas

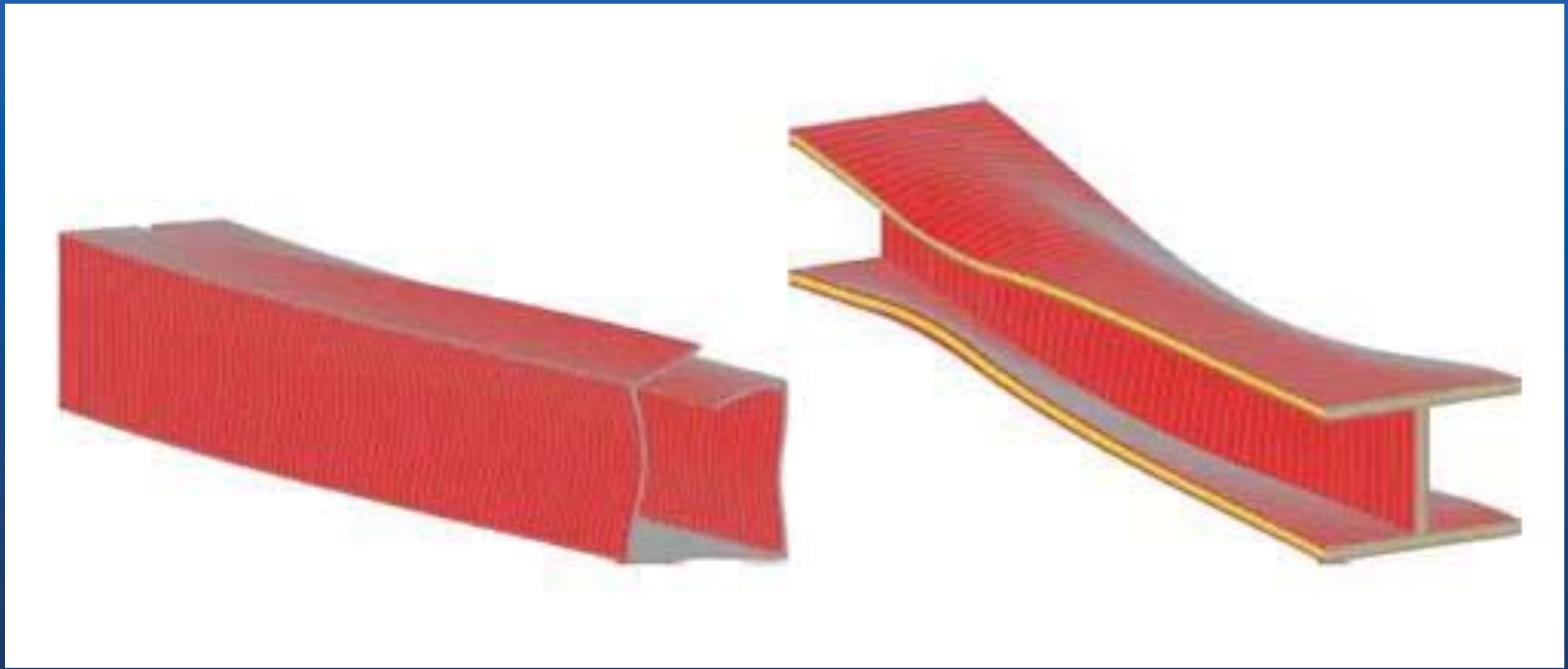


Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

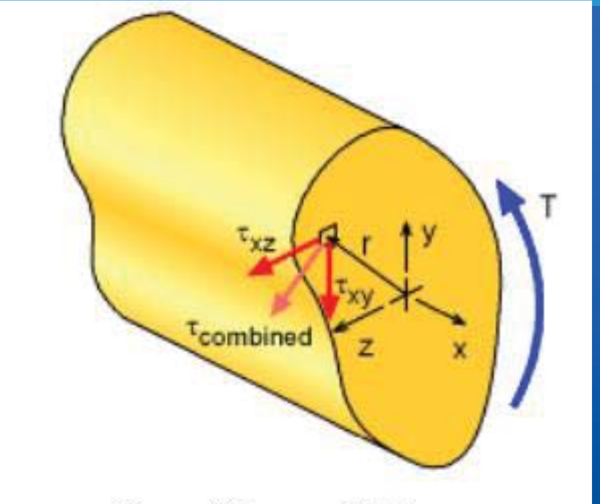
Seções Planas não permanecem planas

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

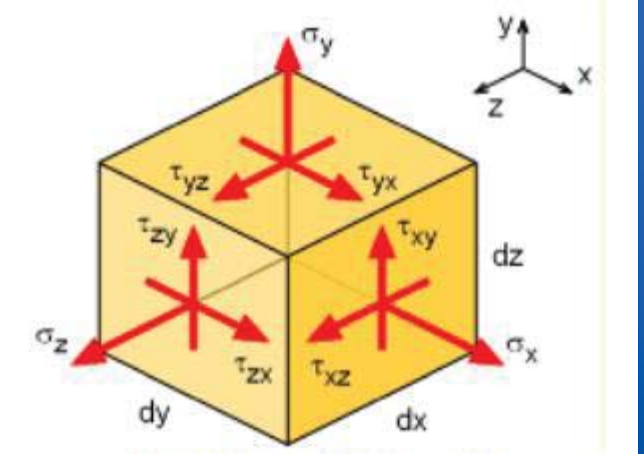
Seções Planas não permanecem planas



Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis



General 3D Stress State

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \boxed{\tau_{xy}}}{\partial y} + \frac{\partial \boxed{\tau_{xz}}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \boxed{\tau_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0$$

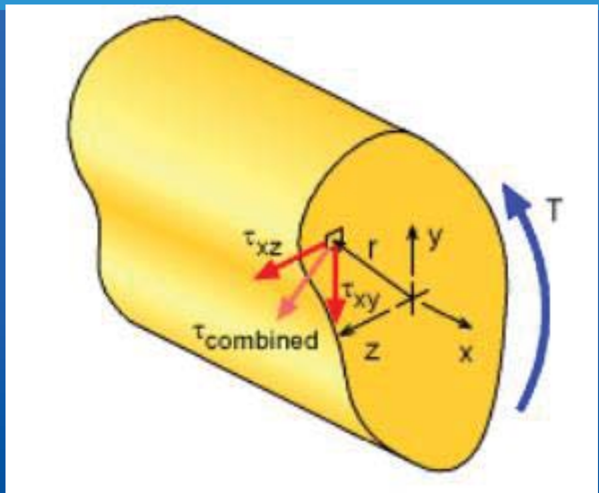
$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \boxed{\tau_{xz}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z = 0$$

Para torção pura

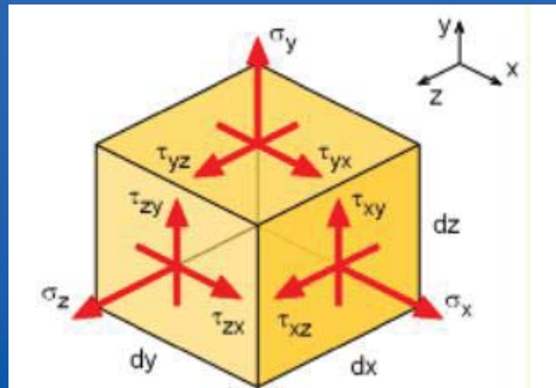
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis



General 3D Stress State

A solução é obtida por meio de uma função escalar ϕ:

Para torção pura

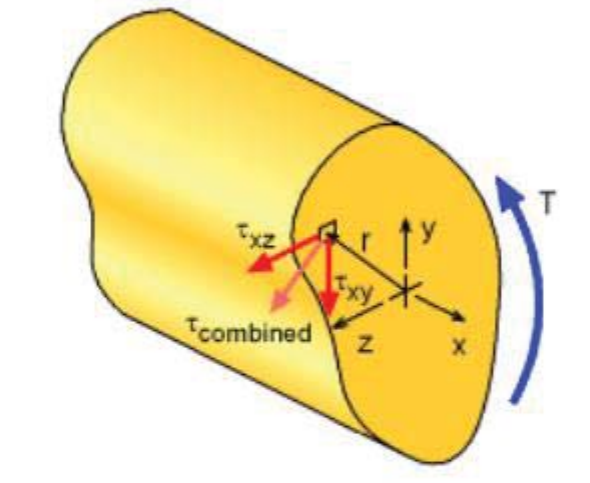
$$\sigma_x = \sigma_x = \sigma_x = \tau_{yz} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

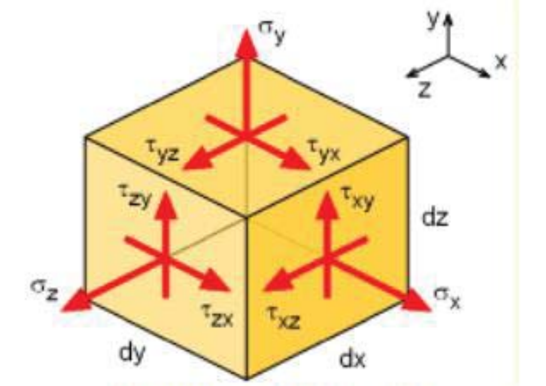
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis



General 3D Stress State

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

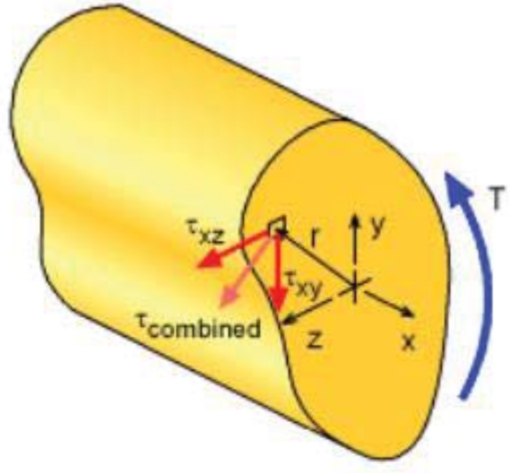
A solução é obtida por meio de uma função escalar ϕ:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

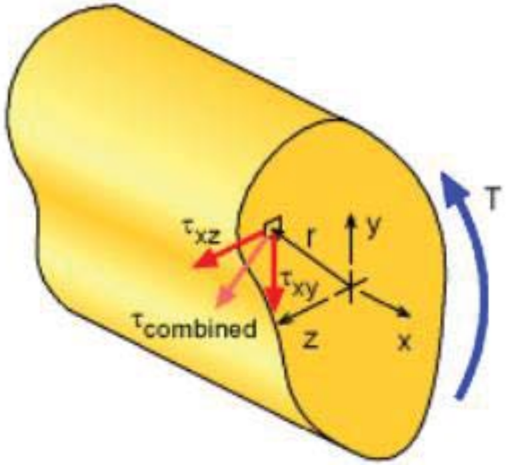
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

É necessário utilizar as relações deformações-deslocamentos para resolver o problema.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \longrightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

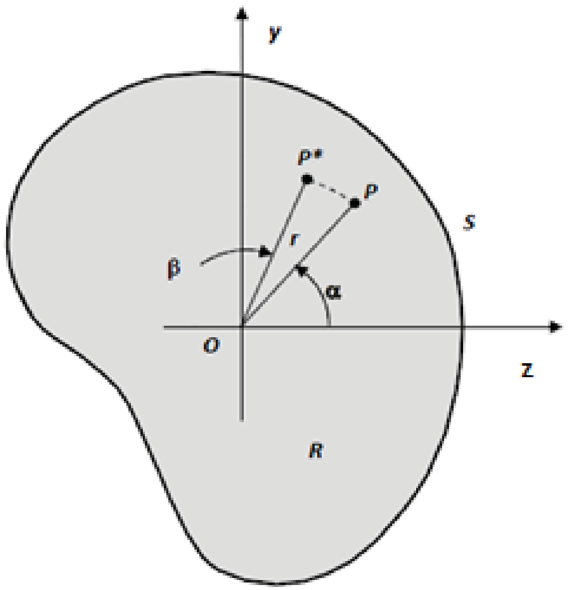
$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

É necessário utilizar as relações deformação-deslocamento para resolver o problema.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



$\beta = \theta x$

β = ângulo de rotação
θ = ângulo de rotação por unidade de comprimento
x = distânica ao longo do eixo x

Deslocamentos (v,w) no plano da seção :

$$v = \theta xz$$

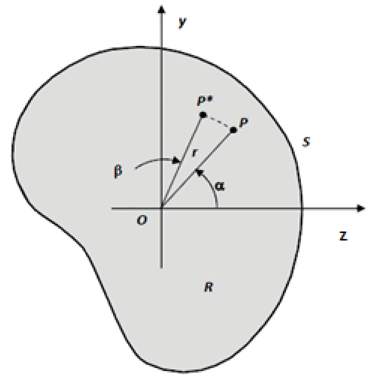
$$w = -\theta xy$$

Deslocamento (u) fora do plano da seção :

$$u = \theta\psi(y,z)$$

Função de empenamento

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



$\beta = \theta x$

β = ângulo de rotação
θ = ângulo de rotação por unidade de comprimento
x = distânica ao longo do eixo x

Função de empenamento

$$\psi(y,z)$$

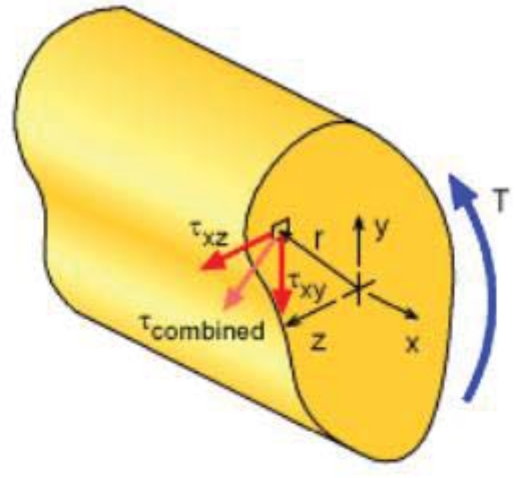
Deslocamentos (u,v,w)

$$w = -\theta xy \qquad v = \theta xz \qquad u = \theta\psi(y,z)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \theta\frac{\partial \psi}{\partial y} + \theta z \qquad \gamma_{xz} = \theta\frac{\partial \psi}{\partial z} - \theta y$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

Lei de Hooke:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\gamma_{xy} = \theta\frac{\partial\psi}{\partial y} + \theta z \qquad \gamma_{xz} = \theta\frac{\partial\psi}{\partial z} - \theta y$$

Função de empenamento

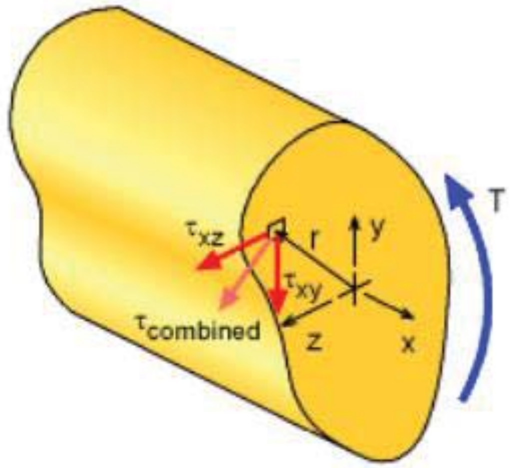
$$\psi(y,z)$$

Função escalar

$$\phi(y,z)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial\boxed{\phi}}{\partial y} \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

Função de empenamento

$$\psi(y,z)$$

Função escalar

$$\phi(y,z)$$

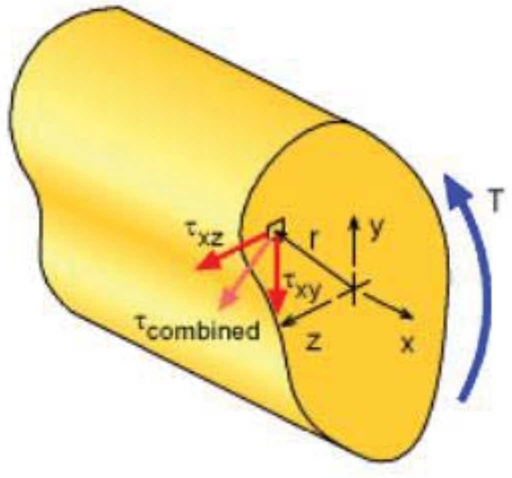
Substituindo a função escalar e a função de empenamcento na Lei de Hooke:

(1) $$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G\left(\theta \frac{\partial \psi}{\partial z} - \theta y\right) \equiv \tau_{xz}$$

(2) $$-\frac{\partial \phi}{\partial z} = G\left(\theta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \theta z\right) \equiv \tau_{xy}$$

Temos duas funções incógnitas, ϕ e ψ, e duas equações.

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

Função de empenamento

$$\psi(y,z)$$

Função escalar

$$\phi(y,z)$$

Para eliminar a função de empenamento da equação final do problema derivamos a eq. (1) em relação a "y" e a eq. (2) em relação a "z" e subtraímos:

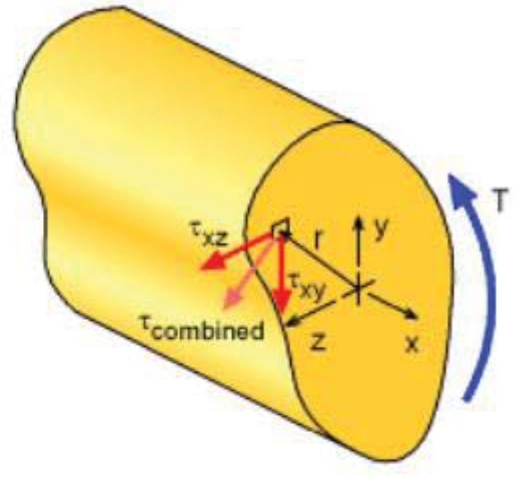
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = G\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - G\theta\frac{\partial y}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = G\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y} + G\theta\frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -2G\theta$$

Eq. de Poisson

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

Função de empenamento

$$\psi(y,z)$$

Função escalar

$$\phi(y,z)$$

Para eliminar a função de empenamento da equação final do problema derivamos a eq. (1) em relação a "y" e a eq. (2) em relação a "z" e subtraímos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = G\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - G\theta\frac{\partial y}{\partial y}$$

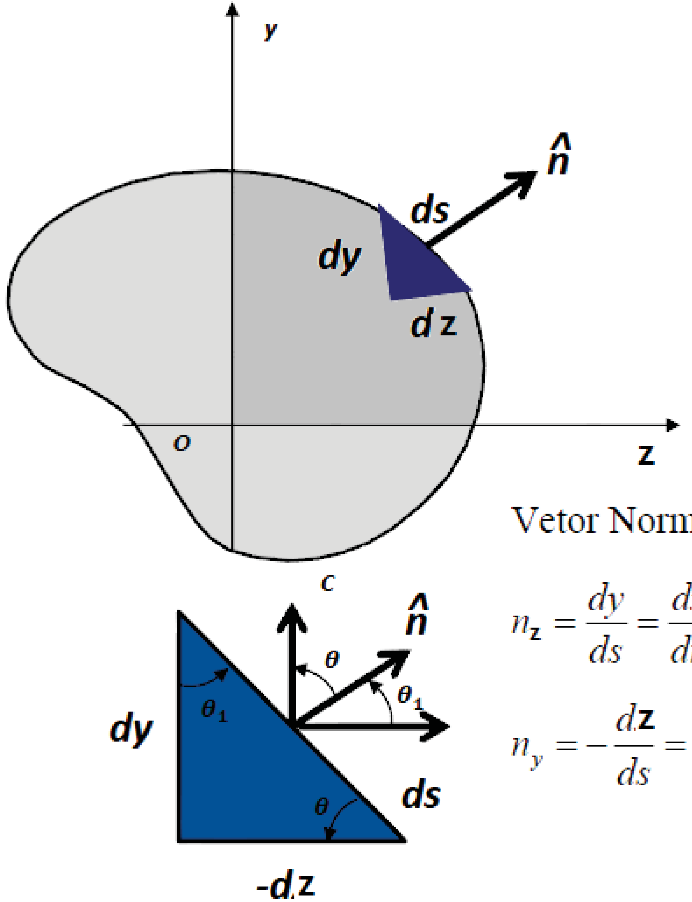
$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = G\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y} + G\theta\frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -2G\theta$$

Eq. de Poisson

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Condição de contorno:



Vetor Normal

$$n_z = \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{dn}$$

$$n_y = -\frac{dz}{ds} = \frac{dy}{dn}$$

Para resolver o problema as condições de contorno devem ser conhecidas.

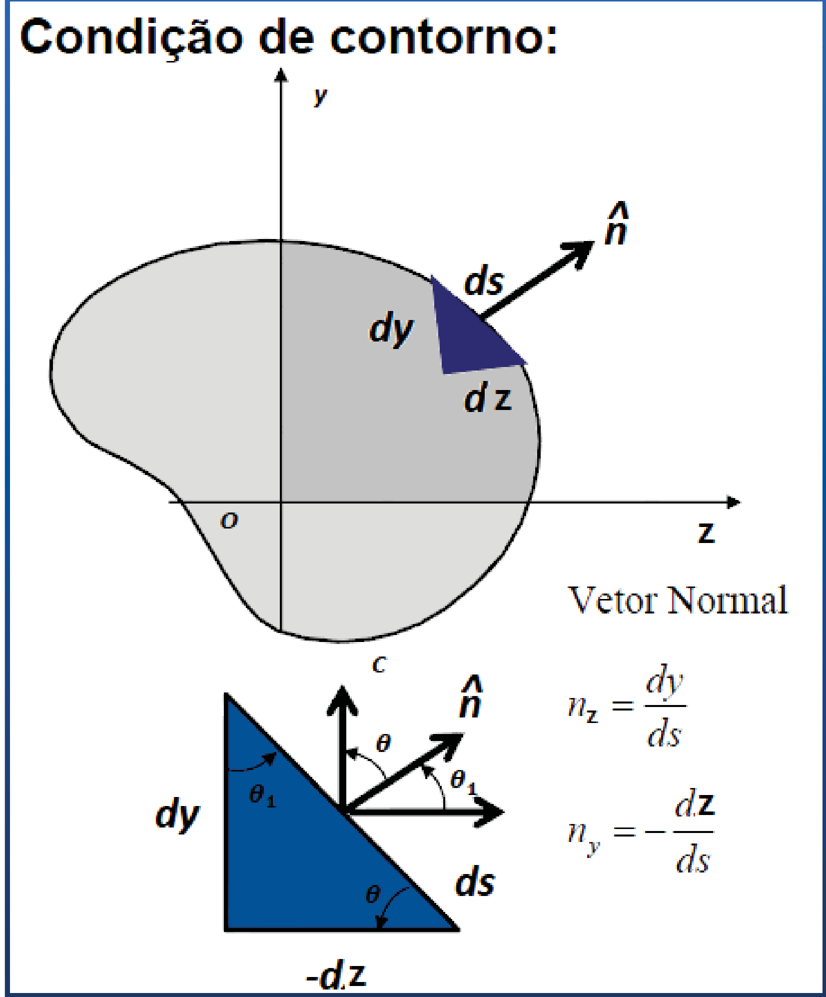
τ_{xz} τ_{xy} n_z n_y

$$t^{(\hat{n})} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$$t^{(\hat{n})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No contorno não existe nenhum esforço aplicado

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

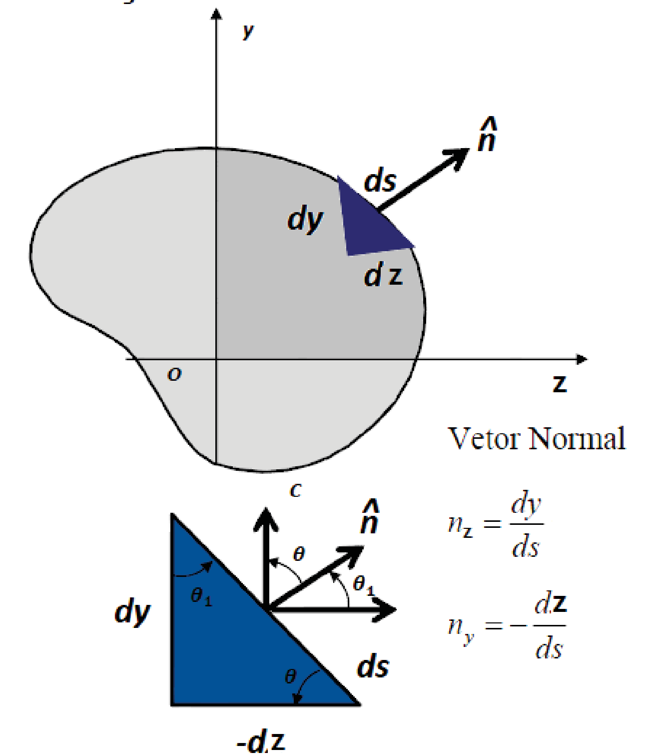


Para resolver o problema as condições de contorno devem ser conhecidas.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial \phi}{\partial z} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{dz}{ds} \\ \dfrac{dy}{ds} \end{bmatrix}$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Condição de contorno:



Para resolver o problema as condições de contorno devem ser conhecidas.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

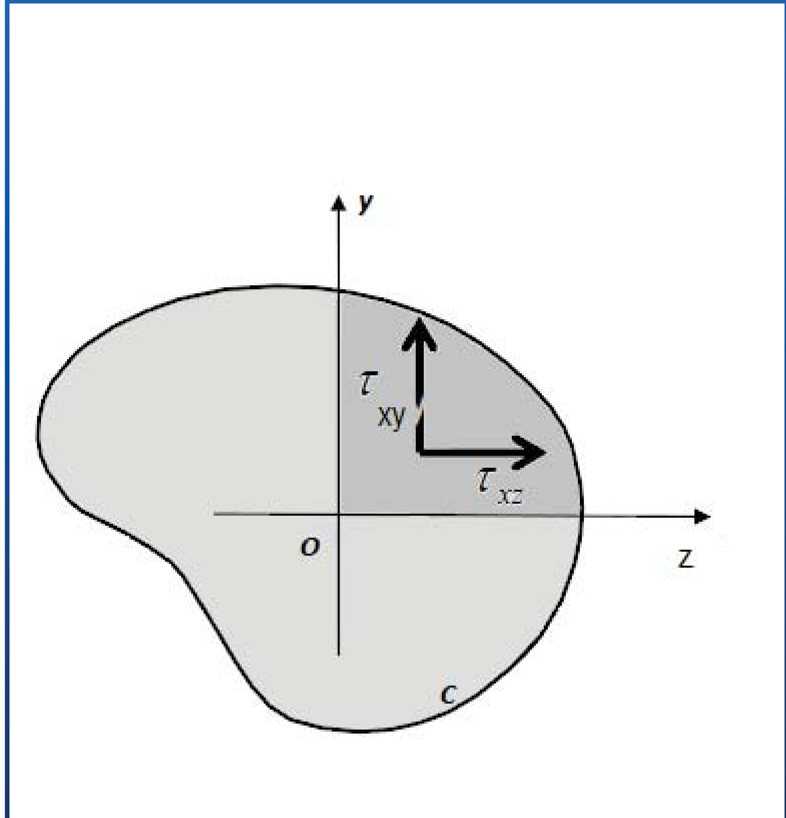
$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0, \quad s = f(z, y)$$

$$\phi = k$$

- A função escalar de tensão (ϕ) deve ser <u>constante</u> ao longo do contorno.
- A equação de equilíbrio deve ser satisfeita pela função tensão ϕ

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Momento torsor



$$\sum M_x = T = \int_A \left(z\tau_{xy} - y\tau_{xz} \right) dydz$$

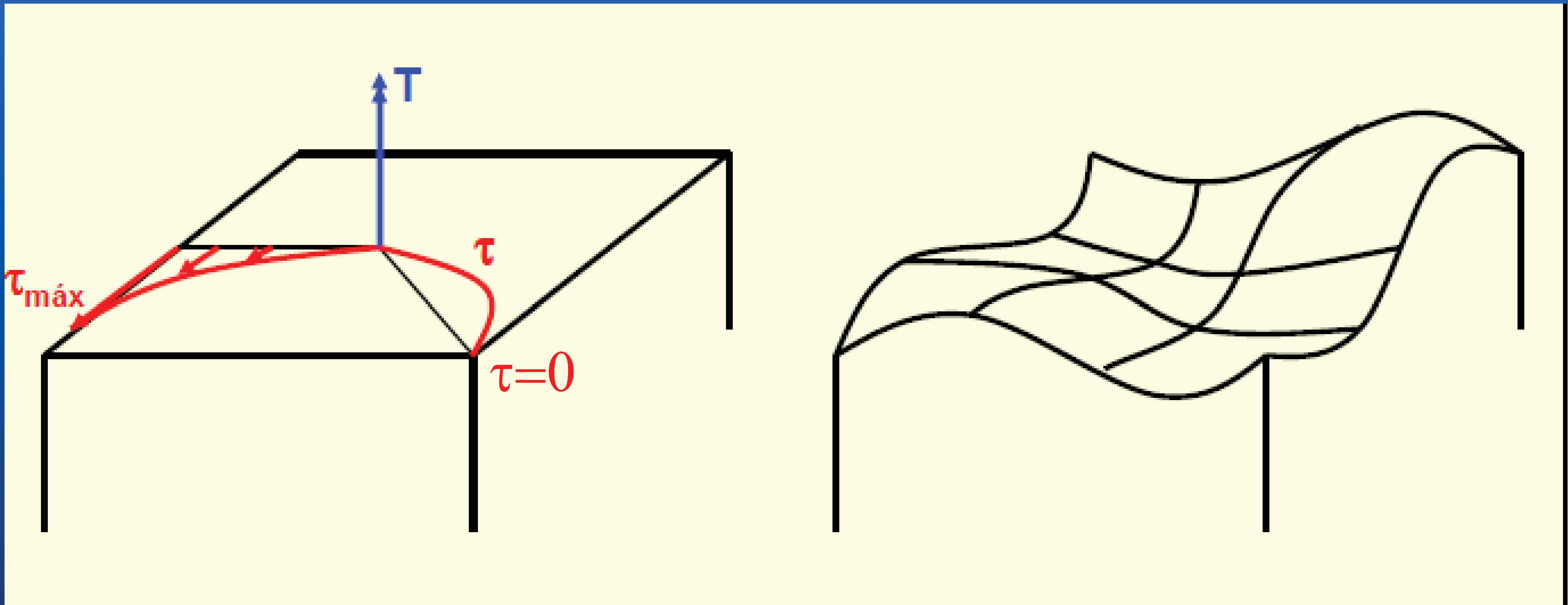
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\sum T = \int_A \left(-z\frac{\partial \phi}{\partial z} - y\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dydz$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Distribuição das tensões de cisalhamento para seção quadrada



$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=-2G\theta$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

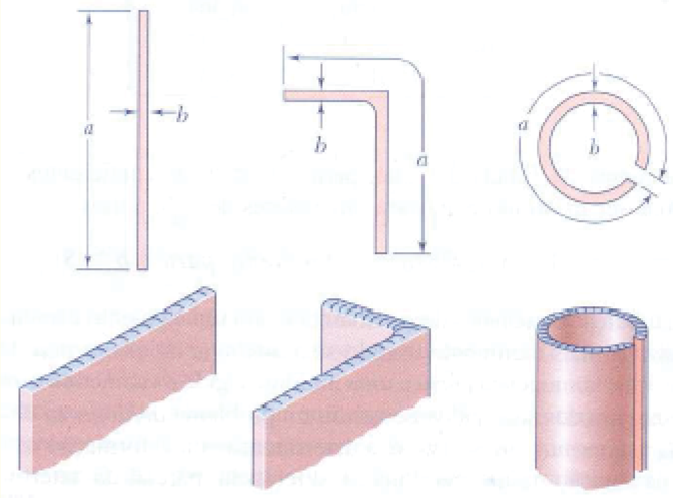
$$\tau_{xz}=\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Coeficientes C_1 e C_2:

a/b	C_1	C_2
1	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3	0,267	0,263
4	0,282	0,281
5	0,291	0,291
10	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

Barras de paredes finas e espessura constante. Seção Aberta. Independente da forma.

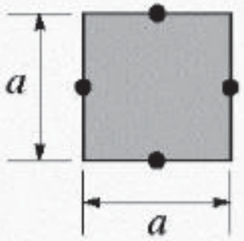
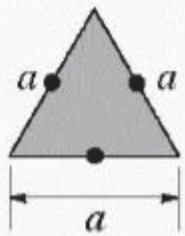
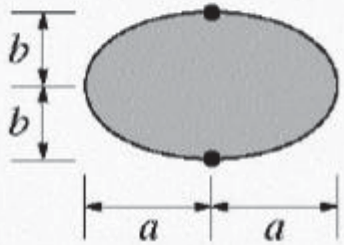


$$\tau_{máx} = \frac{T}{C_1 \cdot a \cdot b^2}$$

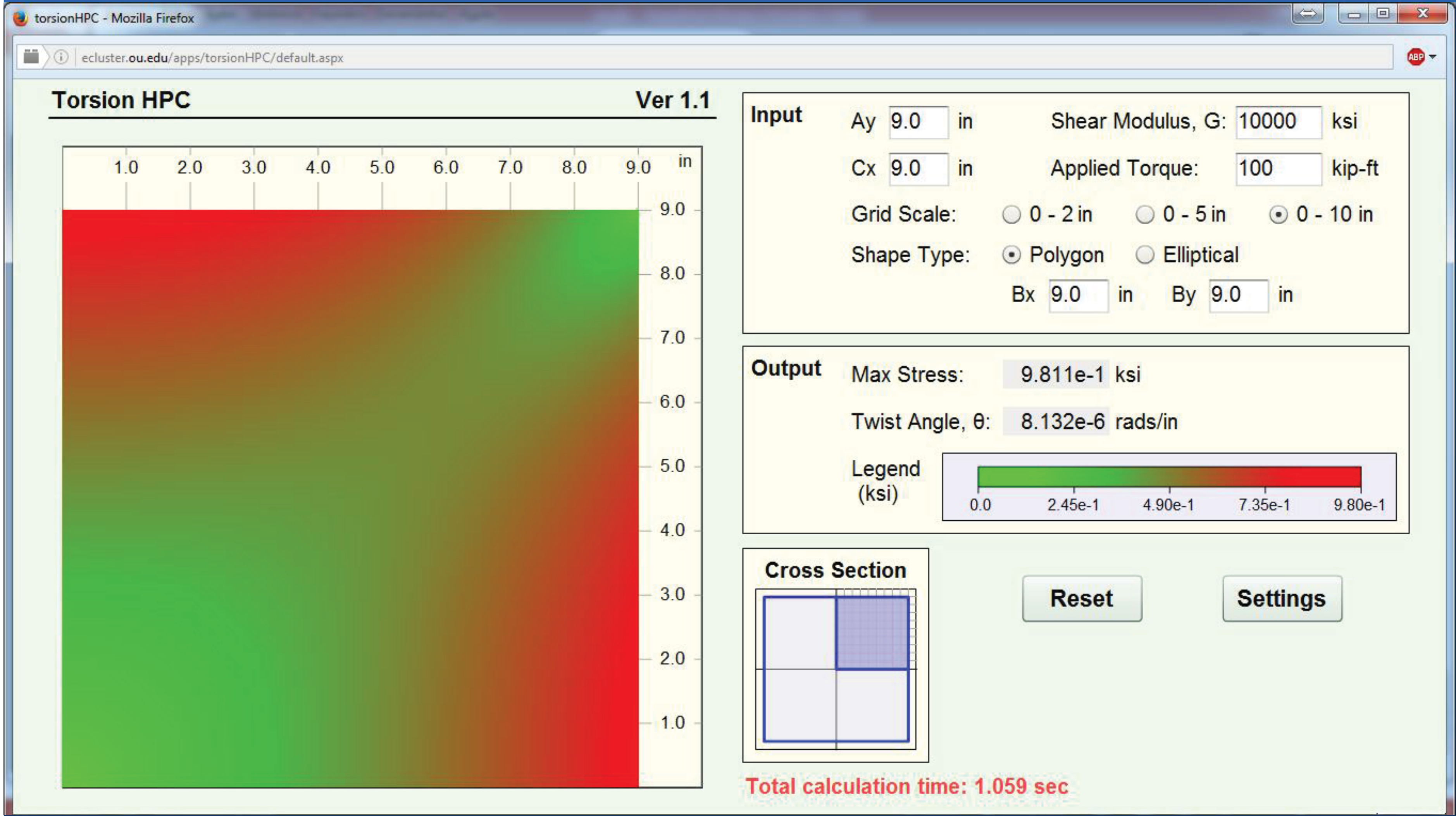
$$\phi = \frac{T \cdot L}{C_2 \cdot a \cdot b^3 \cdot G}$$

- onde: a → lado maior
  b → lado menor

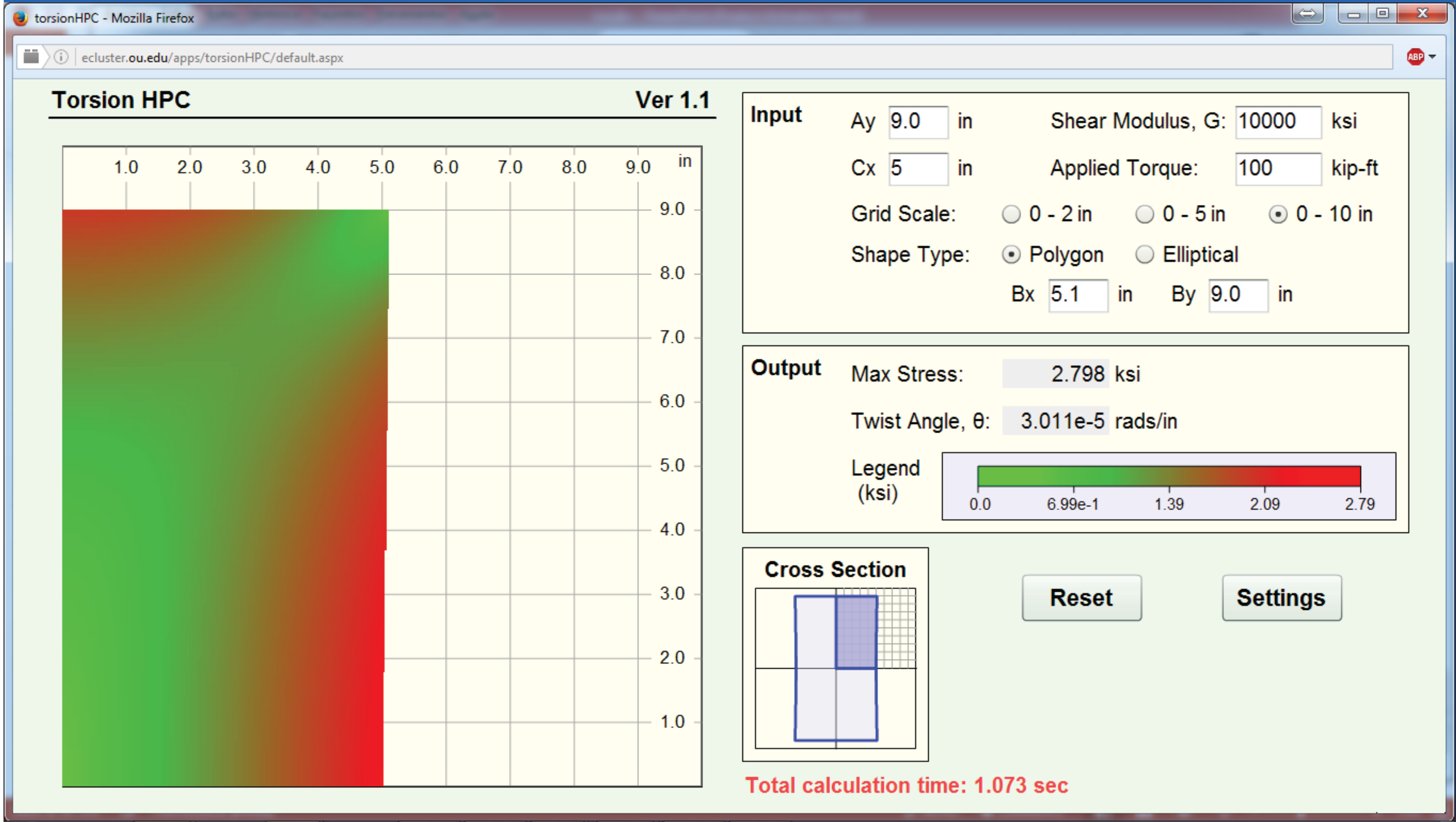
Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Forma da seção transversal	$\tau_{máx}$	ϕ
Quadrada 	$\dfrac{4{,}81\,T}{a^3}$	$\dfrac{7{,}10\,TL}{a^4G}$
Triangular 	$\dfrac{20\,T}{a^3}$	$\dfrac{46\,TL}{a^4G}$
Elíptica 	$\dfrac{2\,T}{\pi ab^2}$	$\dfrac{(a^2+b^2)TL}{\pi a^3b^3G}$

Exemplos

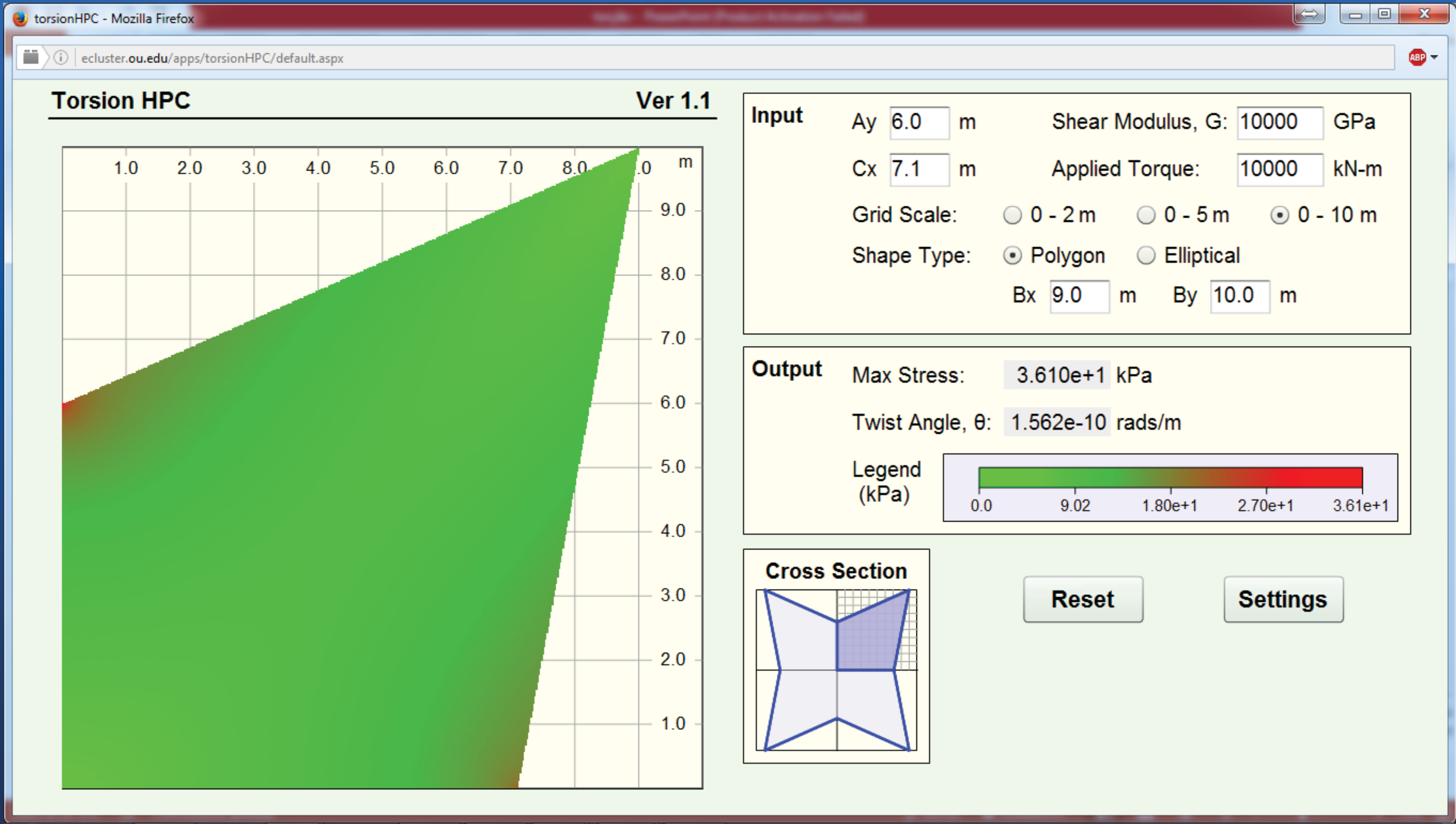

torsionHPC - Mozilla Firefox
ecluster.ou.edu/apps/torsionHPC/default.aspx
Torsion HPC
Ver 1.1
1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 in
9.0 8.0 7.0 6.0 5.0 4.0 3.0 2.0 1.0
Input
Ay 9.0 in
Shear Modulus, G: 10000 ksi
Cx 9.0 in
Applied Torque: 100 kip-ft
Grid Scale: 0 - 2 in 0 - 5 in 0 - 10 in
Shape Type: Polygon Elliptical
Bx 9.0 in By 9.0 in
Output
Max Stress: 9.811e-1 ksi
Twist Angle, θ: 8.132e-6 rads/in
Legend (ksi)
0.0 2.45e-1 4.90e-1 7.35e-1 9.80e-1
Cross Section
Reset
Settings
Total calculation time: 1.059 sec

Exemplos



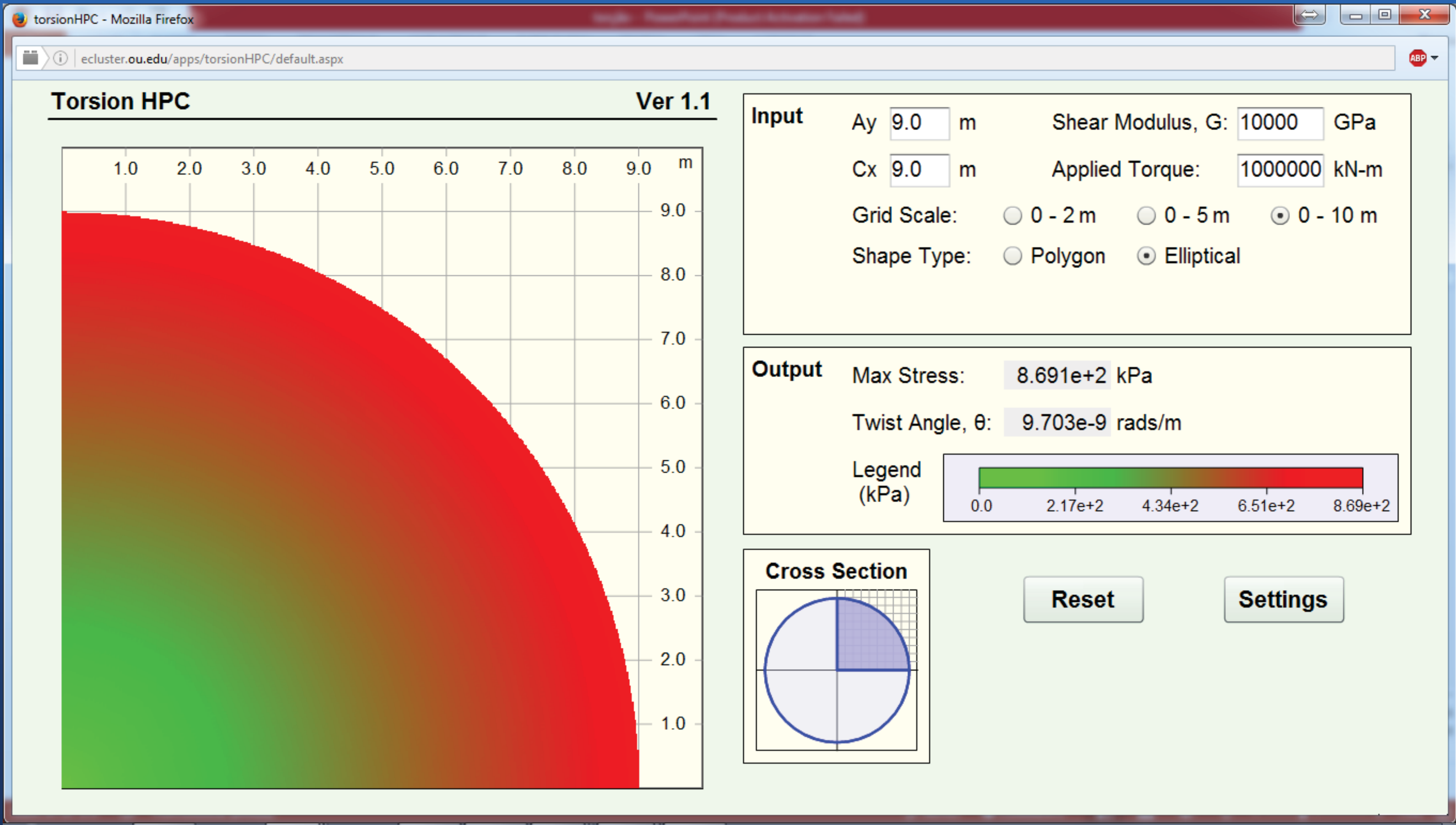
torsionHPC - Mozilla Firefox
ecluster.ou.edu/apps/torsionHPC/default.aspx
Torsion HPC
Ver 1.1
Input
Ay 9.0 in
Shear Modulus, G: 10000 ksi
Cx 5 in
Applied Torque: 100 kip-ft
Grid Scale: 0 - 2 in 0 - 5 in 0 - 10 in
Shape Type: Polygon Elliptical
Bx 5.1 in By 9.0 in
Output
Max Stress: 2.798 ksi
Twist Angle, θ: 3.011e-5 rads/in
Legend (ksi)
0.0 6.99e-1 1.39 2.09 2.79
Cross Section
Reset
Settings
Total calculation time: 1.073 sec

Exemplos



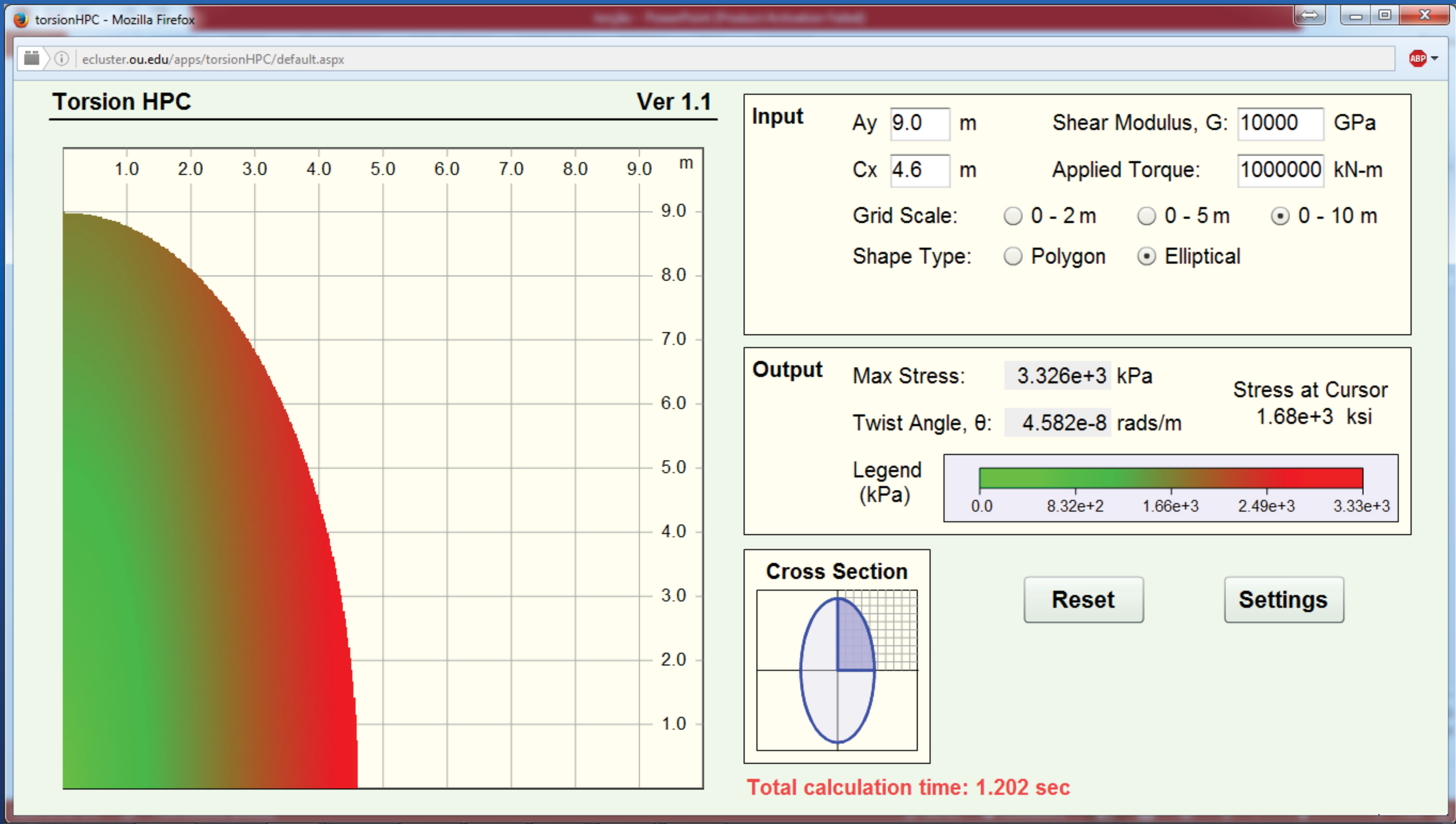
torsionHPC - Mozilla Firefox
ecluster.ou.edu/apps/torsionHPC/default.aspx
Torsion HPC
Ver 1.1
Input
Ay 6.0 m
Shear Modulus, G: 10000 GPa
Cx 7.1 m
Applied Torque: 10000 kN-m
Grid Scale: 0 - 2 m 0 - 5 m 0 - 10 m
Shape Type: Polygon Elliptical
Bx 9.0 m By 10.0 m
Output
Max Stress: 3.610e+1 kPa
Twist Angle, θ: 1.562e-10 rads/m
Legend (kPa)
0.0 9.02 1.80e+1 2.70e+1 3.61e+1
Cross Section
Reset
Settings

Exemplos



torsionHPC - Mozilla Firefox
ecluster.ou.edu/apps/torsionHPC/default.aspx
Torsion HPC
Ver 1.1
1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 m
9.0 8.0 7.0 6.0 5.0 4.0 3.0 2.0 1.0
Input
Ay 9.0 m
Cx 9.0 m
Shear Modulus, G: 10000 GPa
Applied Torque: 1000000 kN-m
Grid Scale: 0 - 2 m 0 - 5 m 0 - 10 m
Shape Type: Polygon Elliptical
Output
Max Stress: 8.691e+2 kPa
Twist Angle, θ: 9.703e-9 rads/m
Legend (kPa)
0.0 2.17e+2 4.34e+2 6.51e+2 8.69e+2
Cross Section
Reset
Settings

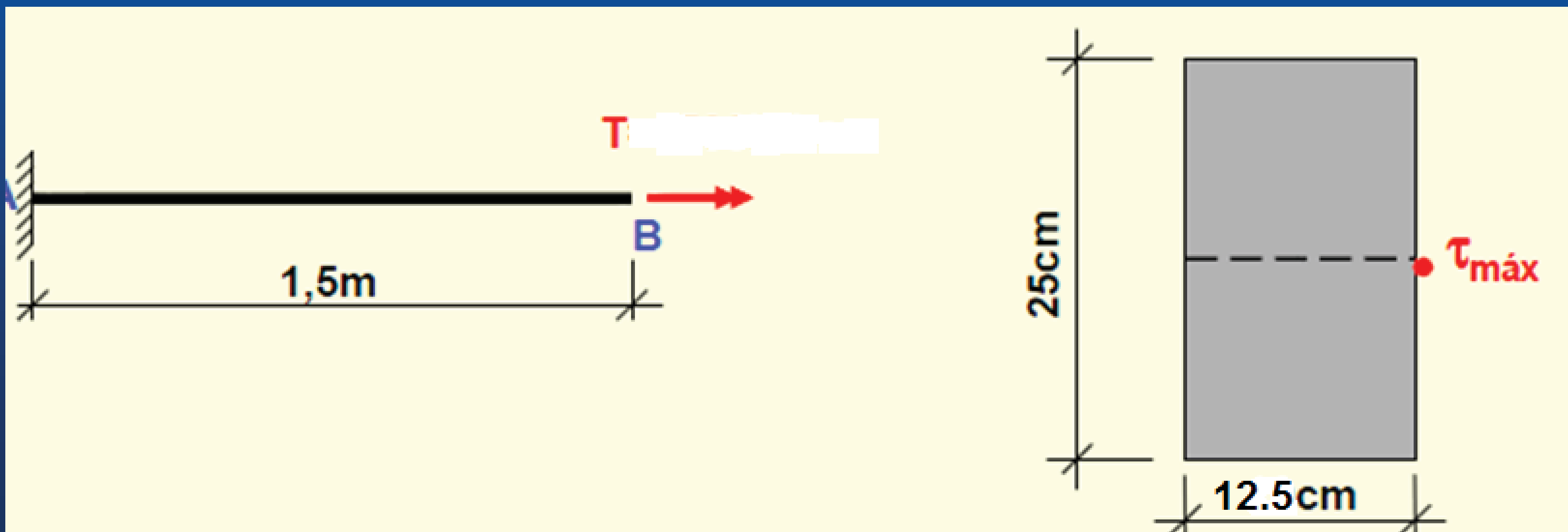
Exemplos



torsionHPC - Mozilla Firefox
ecluster.ou.edu/apps/torsionHPC/default.aspx
Torsion HPC
Ver 1.1
1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 m
9.0 8.0 7.0 6.0 5.0 4.0 3.0 2.0 1.0
Input
Ay 9.0 m
Cx 4.6 m
Shear Modulus, G: 10000 GPa
Applied Torque: 1000000 kN-m
Grid Scale: 0 - 2 m 0 - 5 m 0 - 10 m
Shape Type: Polygon Elliptical
Output
Max Stress: 3.326e+3 kPa
Twist Angle, θ: 4.582e-8 rads/m
Stress at Cursor
1.68e+3 ksi
Legend
(kPa)
0.0 8.32e+2 1.66e+3 2.49e+3 3.33e+3
Cross Section
Reset
Settings
Total calculation time: 1.202 sec

Exemplos

- Calcular a tensão máxima na barra de seção 125x250 mm, submetida a um momento de torção de 10^5 N-m. Qual será o ângulo de torção sabendo que o comprimento da barra é 1.5 m. E = 206 GPa, ν = 0.3;

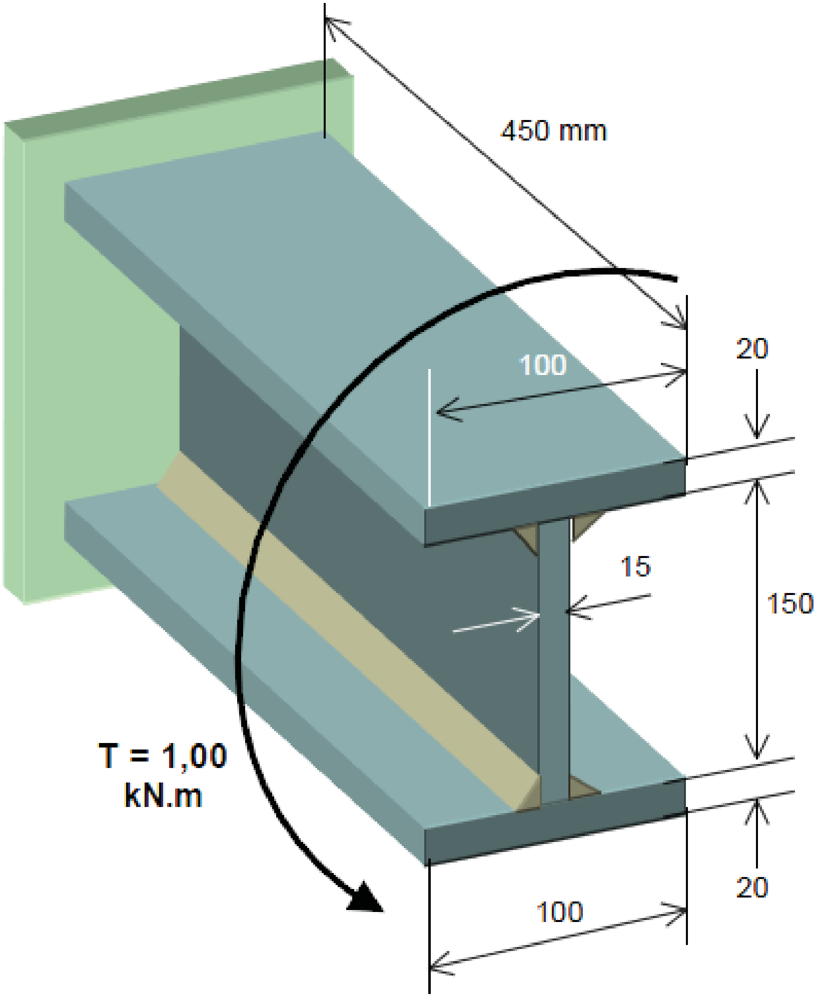


Exemplo

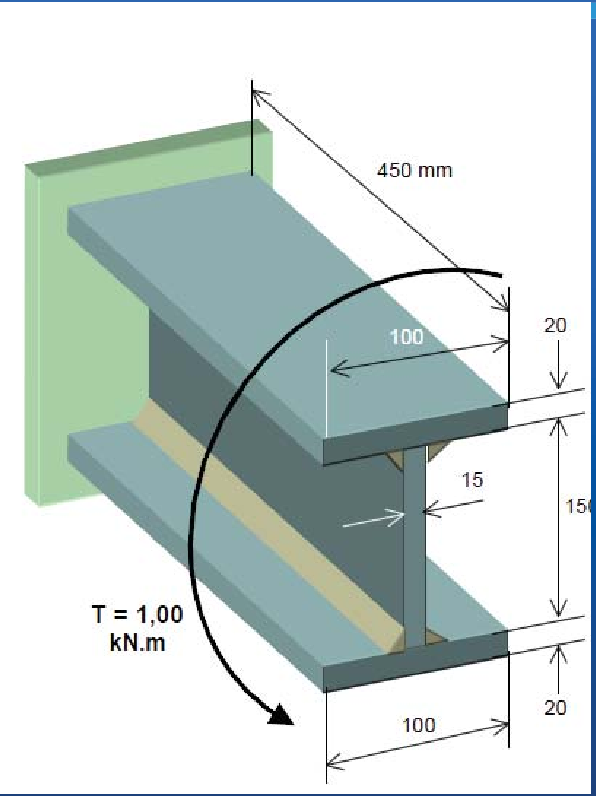
<u>Exemplo 4.6.3</u> - O perfil "I" esquematizado é montado através da união de duas barras chatas de aço, de 100 x 20 mm² ("mesas") soldadas a outra barra chata, também de aço, de 150 x 15 mm² ("alma"), sendo submetido a um torque T = 1,00 kN.m em sua extensão de 450 mm. Pede-se determinar:

a) a máxima tensão tangencial no perfil, e
b) o ângulo de torção do perfil .

Solução:



Exemplo

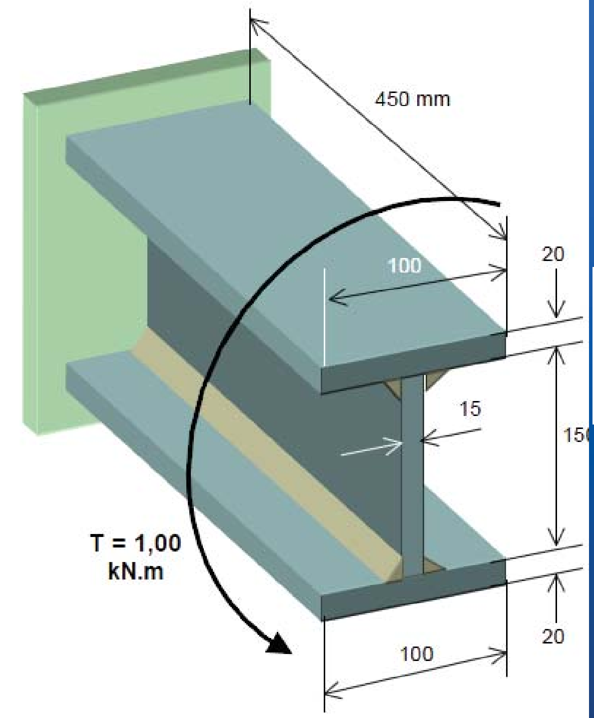


- **Key points:**
  - O momento T é suportado pelas almas e flange da viga.
  - A ângulo de torção ϕ das almas é o mesmo do flange (compatibilidade das deformações).

$$T = 2T_{flange} + T_{alma}$$

$$\phi_{flange} = \phi_{alma}$$

Exemplo



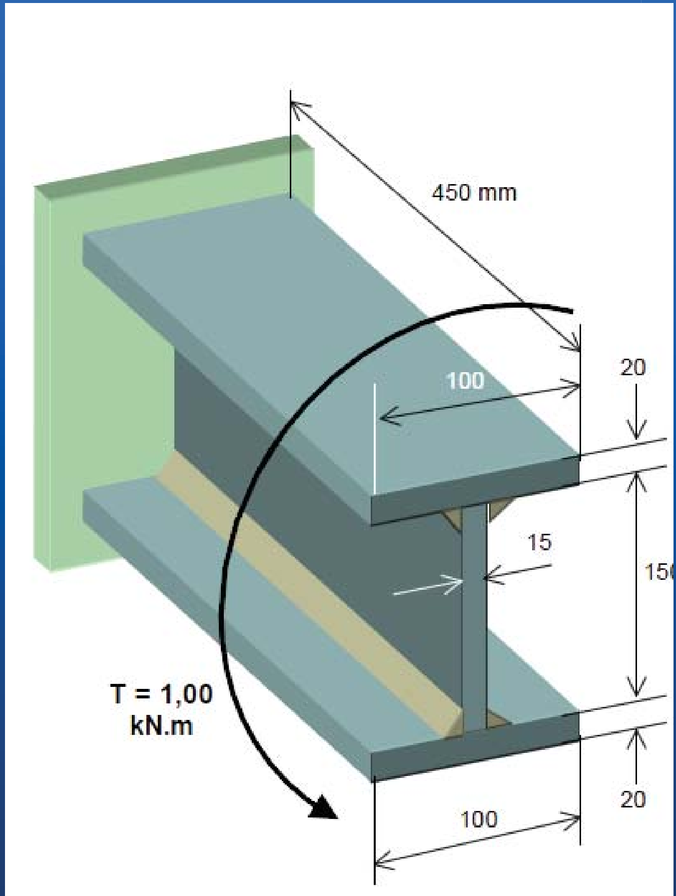
$$T = 2T_{flange} + T_{alma}$$

$$\phi_{flange} = \phi_{alma}$$

$$\frac{T_{flange} L}{J_{flange} G} = \frac{T_{alma} L}{J_{alma} G}$$

$$\frac{T_{flange}}{\left(C_2 ab^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(C_2 ab^3\right)_{alma}}$$

Exemplo



$$\left(\frac{a}{b}\right)_{flange} = \frac{100}{20} = 5$$

$$C_2 = 0.291$$

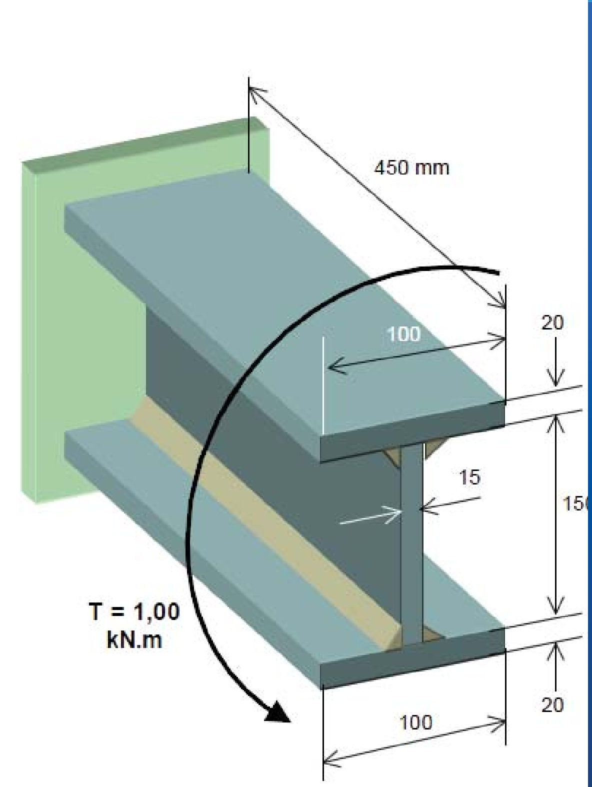
Coeficientes C_1 e C_2:

a/b	C_1	C_2
1	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3	0,267	0,263
4	0,282	0,281
5	0,291	0,291
10	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{alma} = \frac{150}{15} = 10$$

$$C_2 = 0.312$$

Exemplo

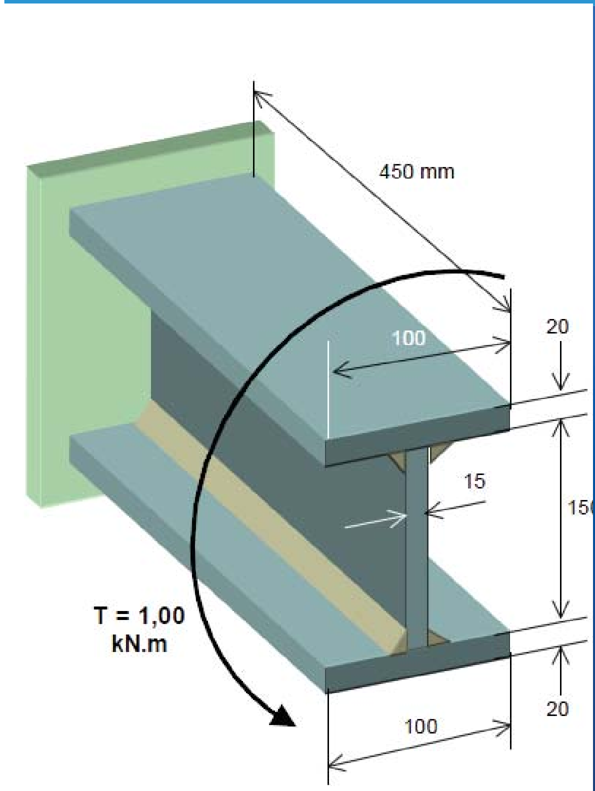


$$\frac{T_{flange}}{\left(C_2 ab^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(C_2 ab^3\right)_{alma}}$$

$$C_2 = 0.291 \qquad C_2 = 0.312$$

$$\frac{T_{flange}}{\left(0.291 ab^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(0.312 ab^3\right)_{alma}}$$

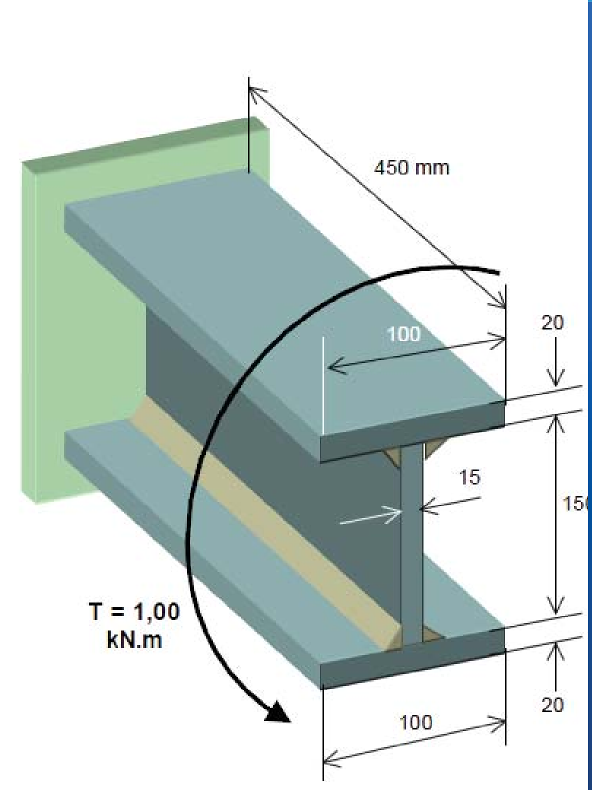
Exemplo



$$\frac{T_{flange}}{\left(0.291ab^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(0.312ab^3\right)_{alma}}$$

$$\frac{T_{flange}}{\left(0.291\times 100\times 20^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(0.312\times 150\times 15^3\right)_{alma}}$$

Exemplo



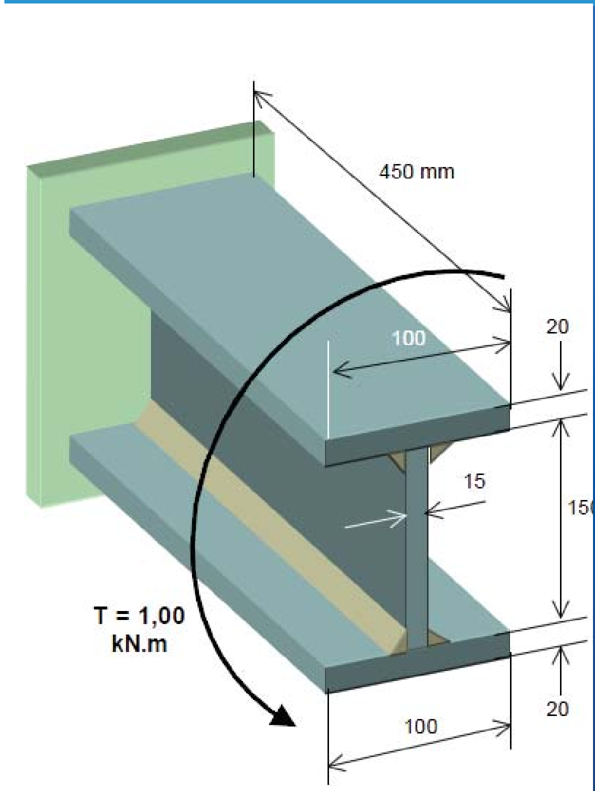
$$\frac{T_{flange}}{\left(0.291ab^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(0.312ab^3\right)_{alma}}$$

$$0.679T_{flange} = T_{alma}$$

$$T = 2T_{flange} + T_{alma}$$

$$T = 2T_{flange} + 0.679T_{flange}$$

Exemplo



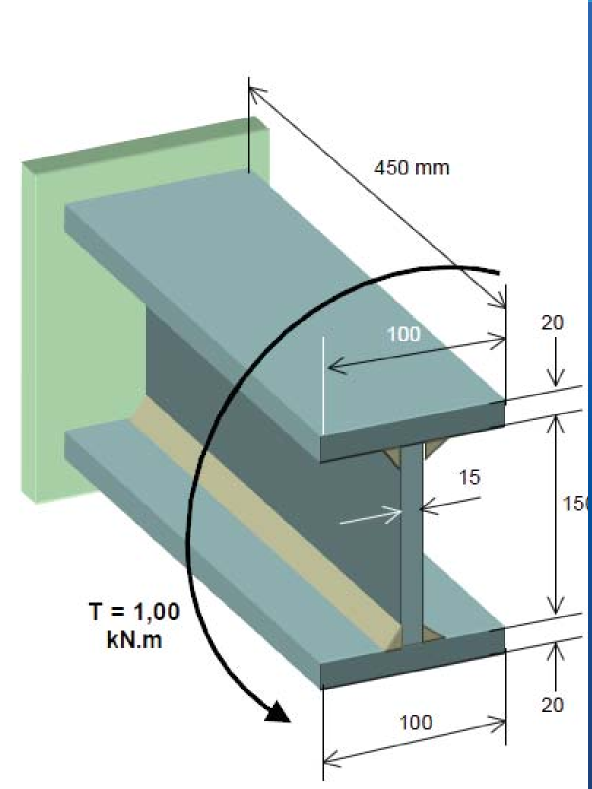
$$T = 2T_{flange} + 0.679T_{flange}$$

$$T_{flange} = \frac{T}{2.679}$$

$$0.679\frac{T}{2.679} = T_{alma}$$

$$\frac{T}{3.945} = T_{alma}$$

Exemplo



$$\frac{T}{3.945} = T_{alma}$$

$$\tau_{alma} = \frac{T_{alma}}{C_1 a b^2}$$

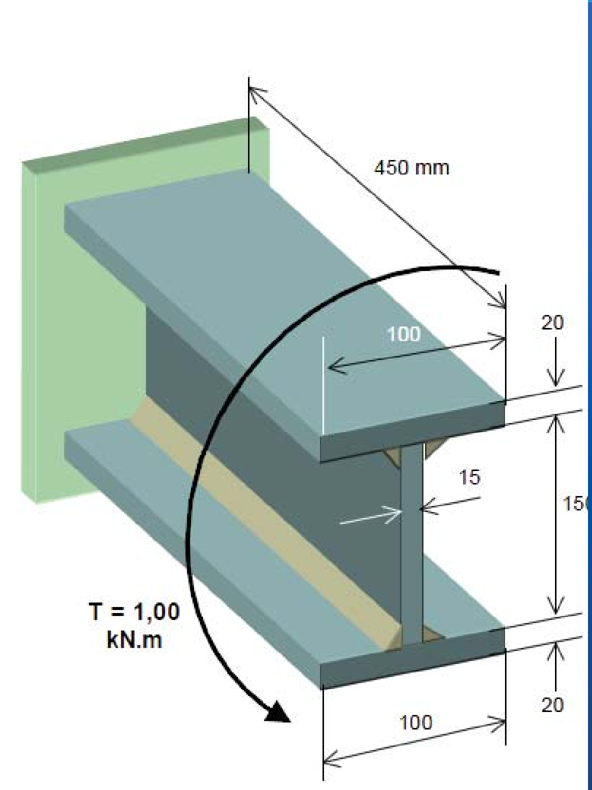
$$\left(\frac{a}{b}\right)_{alma} = \frac{150}{15} = 10$$

$$C_1 = 0.312$$

Coeficientes C_1 e C_2:

a/b	C_1	C_2
1	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3	0,267	0,263
4	0,282	0,281
5	0,291	0,291
10	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

Exemplo



$$\frac{T}{3.945} = T_{alma} \rightarrow \tau_{alma} = \frac{T_{alma}}{C_1 a b^2}$$

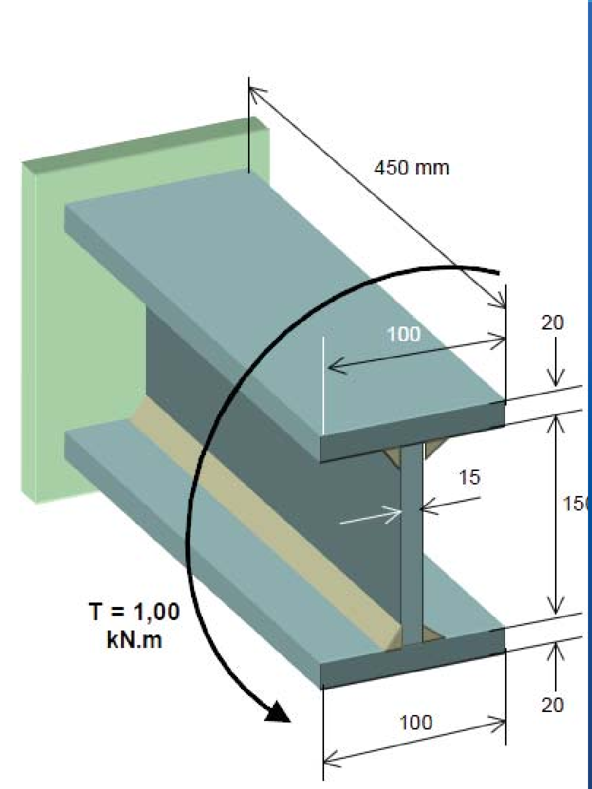
$$\downarrow$$

$$\tau_{alma} = \frac{\dfrac{10^6}{3.945}}{0.312 \times 150 \times 15^2}$$

$$\downarrow$$

$$\tau_{alma} = 24$$ MPa

Exemplo



$$T_{flange} = \frac{T}{2.679}$$

$$\tau_{flange} = \frac{T_{flange}}{C_1 a b^2}$$

$$\tau_{flange} = \frac{\dfrac{10^6}{3.945}}{0.291 \times 100 \times 20^2}$$

$$\tau_{flange} = 32$$ MPa