18-06-2020

terça-feira, 16 de junho de 2020 09:28

Limites

DEF: Sejam $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de D_f e $L \in \mathbb{R}$

simbolo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

ε epsilon

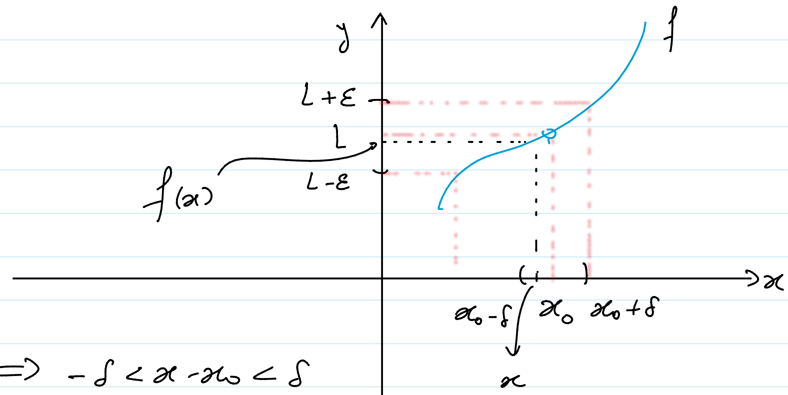
significa

δ delta

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

Se $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in D_f$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$

$x \neq x_0$



$r \in \mathbb{R}$, $r > 0$

$|x| \leq r$

$\Longleftrightarrow$

$-r \leq x \leq r$

$|x| \geq r$

$\Longleftrightarrow$

$x \leq -r$ ou $x \geq r$

$0 < |x - x_0| < \delta \Longleftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta$

$x \neq x_0$

$\Longleftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

$x \neq x_0$

$\Longleftrightarrow x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (intervalo aberto de extremos $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$)

$x \neq x_0$

$x_0 - \delta \quad x_0 \quad x_0 + \delta$

Lembrar: intervalos

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ — a b

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ — a b

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ — a b

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ — a

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ — a

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Notação: $]a,b[= (a,b)$

$]a,b] = (a,b]$

$[a,b[= [a,b)$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \iff L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$\iff f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$$

Propriedades: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$

i) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L \pm M$

ii) $\lim_{x \to x_0} k f(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x) = kL$

iii) $\lim_{x \to x_0} (f(x)\, g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = LM$

iv) Se $M \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}$

Exemplos: Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer

1) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$

2) $\lim_{x \to x_0} x^2 = \lim_{x \to x_0} (x \cdot x) \overset{iii)}{=} \lim_{x \to x_0} x \lim_{x \to x_0} x \overset{1)}{=} x_0 x_0 = x_0^2$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$

3) De modo geral

$\lim_{x \to x_0} x^k = x_0^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

conjunto dos números naturais

4) $\lim_{x \to x_0} k = k$, limite de uma constante é a própria constante

$\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$ é o conjunto dos

$\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais

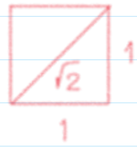
$\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais

5) $p(x)$ um polinômio, então

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

onde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ fixos $\quad \mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$

$\boxed{D_p = \mathbb{R}}$



$\sqrt{2}$ não é número racional que é chamado de número irracional

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = \lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)$$

$$\overset{i)}{=} \lim_{x \to x_0} a_0 + \lim_{x \to x_0} a_1 x + \lim_{x \to x_0} a_2 x^2 + \dots + \lim_{x \to x_0} a_n x^n$$

$$\overset{4) \text{ e } ii)}{=} a_0 + a_1 \lim_{x \to x_0} x + a_2 \lim_{x \to x_0} x^2 + \dots + a_n \lim_{x \to x_0} x^n$$

$$\overset{3)}{=} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = p(x_0)$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)}$$

6) $f(x)$ uma função racional, isto é, $f(x)$ é quociente de duas funções polinomiais.

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ funções polinomiais tais que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$\boxed{D_f = \{ x \in \mathbb{R} / q(x) \neq 0 \}}$$

Suponhamos que $\boxed{x_0 \in D_f}$, isto é, $q(x_0) \neq 0$

Temos por 5) que $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} q(x) = q(x_0) \neq 0$

Por iv) $\displaystyle \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} p(x)}{\lim_{x \to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = f(x_0)$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

$\boxed{\text{DEF:}}$ Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f$ ponto de acumulação de D_f

Dizemos que f é contínua em x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemplos: 1) toda função polinomial é contínua em todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$

2) toda função racional é contínua em todo ponto x_0 de seu domínio

Exercícios: Calcule os seguintes limites

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $\lim_{x \to 1} (x-1) = 0$, não posso usar a propriedade iv)

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x + 1, \quad \forall x \neq 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

2) $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$, $x_0 \geq 0$, se n é par

x_0 é qualquer se n é ímpar

não vou provar

Então $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua para todo $x_0 \in D_f = \begin{cases} \mathbb{R}_+, & \text{se } n \text{ é par} \\ \mathbb{R}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

raiz n-ésima

3) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$, $\lim_{x \to 1} (\sqrt{x} - 1) \overset{2)}{=} \sqrt{1} - 1 = 0$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x-1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} = \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \sqrt{x} + 1, \quad \forall x \neq 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{1} + 1 = 2$$

$\boxed{\text{DEF.:}}$ Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$

i) Seja $A \subset D_f$, dizemos que f é contínua em A, se f é contínua em todos os pontos de A.

ii) Dizemos que f é uma função contínua, se f é contínua em D_f, isto é, em todos os ponto de D_f.

Exemplos: As funções polinomiais, racionais e raízes n-ésimas são funções contínuas