9

Equações Diferenciais

9.5 Equações Lineares

Equações Lineares

Uma equação diferencial **linear** de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde *P* e *Q* são funções contínuas em um dado intervalo. Esse tipo de equação ocorre frequentemente em vários ramos da ciência, como veremos.

Equações Lineares

Um exemplo de uma equação linear é $xy' + y = 2x$ porque, para $x \neq 0$, esta pode ser escrita na forma

$$\boxed{2} \qquad y' + \frac{1}{x}y = 2$$

Observe que essa equação diferencial não é separável, porque é impossível fatorar a expressão para y' como uma função de x vezes uma função de y. Mas ainda podemos resolver a equação observando que, pela Regra do Produto,

$$xy' + y = (xy)'$$

e assim podemos escrever a equação como

$$(xy)' = 2x$$

Equações Lineares

Se integrarmos ambos os lados dessa equação, obteremos

$$xy = x^2 + C \quad \text{ou} \quad y = x + \frac{C}{x}$$

Se nos tivesse sido dada a equação diferencial na forma da Equação 2, teríamos de fazer uma etapa preliminar multiplicando cada lado da equação por *x*.

Ocorre que toda equação diferencial linear de primeira ordem pode ser resolvida de uma maneira similar pela multiplicação de ambos os lados da Equação 1 por uma função adequada $I(x)$, chamada *fator integrante.*

Equações Lineares

Tentamos encontrar I de modo que o lado esquerdo da Equação 1, quando multiplicado por $I(x)$, torna-se a derivada do produto $I(x)y$:

$$\boxed{3} \qquad I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)'$$

Se pudermos encontrar tal função I, a Equação 1 ficará

$$(I(x)y)' = I(x)\,Q(x)$$

Equações Lineares

Integrando ambos os lados teremos

$$I(x)y = \int I(x)\,Q(x)\,dx + C$$

de modo que a solução será

$$\boxed{4} \qquad y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)\,Q(x)\,dx + C\right]$$

Equações Lineares

Para encontrarmos esse I, expandimos a Equação 3 e cancelamos termos:

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)\,P(x) = I'(x)$$

Esta é uma equação separável para I, que resolvemos como a seguir:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$

$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

Equações Lineares

onde $A = \pm e^C$. Estamos procurando um fator de integração particular, não o mais geral; assim, tomamos $A = 1$ e usamos

$$\boxed{5} \qquad I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

Então, a fórmula para a solução geral da Equação 1 é fornecida pela Equação 4, onde I é dado pela Equação 5. Em vez de memorizar esta fórmula, contudo, apenas lembramos a forma do fato integrante.

> Para resolver a equação diferencial linear $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique ambos os lados pelo **fator integrante** $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre ambos os lados.

Exemplo 1

Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2.$

SOLUÇÃO: A equação dada é linear porque ela tem a forma da Equação 1 com $P(x) = 3x^2$ e $Q(x) = 6x^2$. Um fator integrante é

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por e^{x^3}, obtemos

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

ou

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Integrando ambos os lados teremos

$$e^{x^3}y = \int 6x^2 e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$

Exemplo 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

SOLUÇÃO: Devemos primeiro dividir ambos os lados pelo coeficiente de y' para colocar a equação diferencial na forma padrão:

$$\boxed{6} \qquad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$$

O fator integrante é

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

A multiplicação de ambos os lados da Equação 6 por *x* fornece

$$xy' + y = \frac{1}{x} \qquad \text{ou} \qquad (xy)' = \frac{1}{x}$$

Então,

$$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

e, assim,

$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Uma vez que $y(1) = 2$, temos

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

Logo, a solução para o problema de valor inicial é

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$

Aplicação a Circuitos Elétricos

Aplicação a Circuitos Elétricos

Neste caso, consideramos o circuito elétrico simples, mostrado na Figura 4: uma força eletromotriz (geralmente uma pilha ou gerador) que produz uma tensão de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ amperes (A) em um instante t.

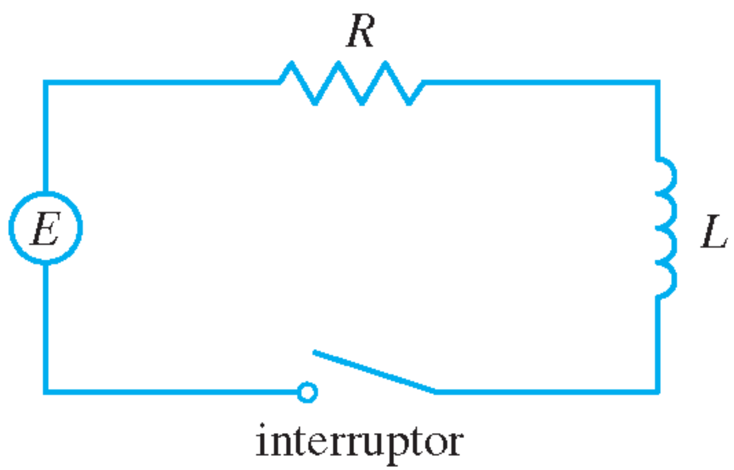

Figura 4

Aplicação a Circuitos Elétricos

O circuito também possui um resistor com resistência de R ohms (Ω) e um indutor com indutância de L henrys (H).

A Lei de Ohm calcula a queda na tensão devida ao resistor como RI. A queda de tensão por causa do indutor é $L(dI/dt)$. Uma das Leis de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão é igual à tensão fornecida $E(t)$. Então temos

$$\boxed{7} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Exemplo 4

Suponha que no circuito simples da Figura 4 a resistência seja 12 Ω e a indutância seja 4 H. Se uma pilha fornecer uma voltagem constante de 60 V e o interruptor for fechado quando $t = 0$, então a corrente começa com $I(0) = 0$. Encontre (a) $I(t)$, (b) a corrente depois de 1 s, e (c) o valor-limite da corrente.

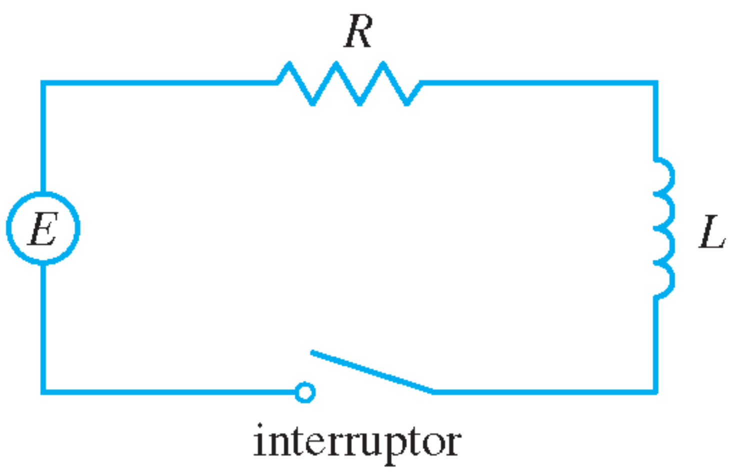

Figura 4

Exemplo 4 – *Solução*

(a) Se colocarmos L = 4, R = 12 e E(t) = 60 na Equação 7, obteremos o problema de valor inicial

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

ou

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Multiplicando pelo fator integrante $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$, obtemos

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Como $I(0) = 0$, temos $5 + C = 0$, assim, $C = -5$ e

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

(b) Depois de um segundo a corrente é

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4{,}75 \text{ A}$$

(c) O valor-limite da corrente é dado por

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t \to \infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$