9.3 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{y^2} = dx \;(y \neq 0) \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \dfrac{dy}{y^2} = \int dx$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{y} = x + C \;\Rightarrow -\; y = \dfrac{1}{x+C} \;\Rightarrow\; y = \dfrac{-1}{x+C},$

e $y = 0$ também é uma solução.

2. $yy' = x \;\Rightarrow\; \int y\,dy = \int x\,dx \;\Rightarrow$

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \;\Rightarrow\; y^2 = x^2 + 2C_1 \;\Rightarrow$

$x^2 - y^2 = C$ (onde $C = -2C_1$). Isto representa uma família de hipérboles.

3. $y' = xy \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \dfrac{dy}{y} = \int x\,dx \;\; (y \neq 0) \;\Rightarrow$

$\ln|y| = \dfrac{x^2}{2} + C \;\Rightarrow |y| = e^C e^{x^2/2} \;\Rightarrow\; y = Ke^{x^2/2},$

onde $K = \pm\, e^C$ é uma constante. (Na nossa derivação, $K \neq 0$, mas podemos considerar o caso $y = 0$ ao permitir que K seja zero.)

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{3y^2} \;\Rightarrow\; \int 3y^2\,dy = \int (x + \operatorname{sen} x)\,dx \;\Rightarrow$

$y^3 = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C \;\Rightarrow\; y = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}x^2 - \cos x + C}$

5. $x^2y' + y = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x^2} \;\Rightarrow$

$\displaystyle\int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{-dx}{x^2} \;\; (y \neq 0) \;\Rightarrow\; \ln|y| = \dfrac{1}{x} + K \;\Rightarrow$

$|y| = e^K e^{1/x} \;\Rightarrow\; y = Ce^{1/x}$, onde C é uma constante.

6. $y' = \dfrac{\ln x}{xy + xy^3} = \dfrac{\ln x}{x\,(y + y^3)} \;\Rightarrow$

$\displaystyle\int (y + y^3)\,dy = \int \dfrac{\ln x}{x}\,dx \;\Rightarrow$

$\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^4}{4} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C_1 \;\Rightarrow$

$y^4 + 2y^2 = 2(\ln x)^2 + 2C_1 \;\Rightarrow$

$(y^2 + 1)^2 = 2(\ln x)^2 + K \quad$ (onde $K = 2C_1 + 1$)

$\Rightarrow\; y^2 + 1 = \sqrt{2(\ln x)^2 + K}$

7. $\dfrac{du}{dt} = e^{u+2t} = e^u e^{2t} \;\Rightarrow\; \int e^{-u}\,du = \int e^{2t}\,dt \;\Rightarrow$

$-e^{-u} = \frac{1}{2}e^{2t} + C_1 \;\Rightarrow\; e^{-u} = -\frac{1}{2}e^{2t} + C$ (onde $C = -C_1$ e o lado direito é positivo, uma vez que $e^{-u} > 0$)

$\Rightarrow -\; u = \ln\left(C - \frac{1}{2}e^{2t}\right) \;\Rightarrow\; u = -\ln\left(C - \frac{1}{2}e^{2t}\right)$

8. $\dfrac{dx}{dt} = 1 + t - x - tx = (1+t)(1-x) \;\Rightarrow$

$\displaystyle\int \dfrac{dx}{1-x} = \int (1+t)\,dt \quad (x \neq 1) \;\Rightarrow$

$-\ln|1-x| = \frac{1}{2}t^2 + t + C \;\Rightarrow\; |1-x| = e^{-(t^2/2 + t + C)}$

$\Rightarrow\; 1 - x = \pm e^{-(t^2/2 + t + C)} \;\Rightarrow$

$x = 1 + Ae^{-(t^2/2 + t)} \quad$ (onde $A = \pm e^C$ ou 0)

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+x}{xy},\; x > 0,\; y(1) = -4.$

$\displaystyle\int y\,dy = \int \dfrac{1+x}{x}\,dx = \int \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)dx \;\Rightarrow$

$\frac{1}{2}y^2 = \ln|x| + x + C = \ln x + x + C$ (uma vez que $x > 0$).

$y(1) = -4 \;\Rightarrow\; \frac{(-4)^2}{2} = \ln 1 + 1 + C \;\Rightarrow$

$8 = 0 + 1 + C \Rightarrow C = 7$, assim $y^2 = 2\ln x + 2x + 14$.

10. $xe^{-t}\dfrac{dx}{dt} = t,\; x(0) = 1.\; \int x\,dx = \int te^t\,dt \;\Rightarrow$

$\frac{1}{2}x^2 = (t-1)\,e^t + C$ [integração por partes ou Fórmula 96]

$x(0) = 1$, então $\frac{1}{2} = (0-1)\,e^0 + C$ e $C = \frac{3}{2}$. Portanto,

$x^2 = 2(t-1)\,e^t + 3 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{2(t-1)\,e^t + 3}$ [utilize a raiz quadrada positiva uma vez que $x(0) = +1$].

11. $x + 2y\sqrt{x^2+1}\,\dfrac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; x\,dx + 2y\sqrt{x^2+1}\,dy = 0,$

$y(0) = 1.\; \displaystyle\int 2y\,dy = -\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} \;\Rightarrow$

$y^2 = -\sqrt{x^2+1} + C.\; y(0) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = -1 + C \;\Rightarrow$

$C = 2$, logo $y^2 = 2 - \sqrt{x^2+1}$.

12. $e^y y' = \dfrac{3x^2}{1+y},\; y(2) = 0.\; \int e^y(1+y)\,dy = \int 3x^2\,dx \;\Rightarrow$

$ye^y = x^3 + C.\; y(2) = 0$, logo $0 = 2^3 + C$ e $C = -8$.

Portanto $ye^y = x^3 - 8$.

13. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t+1}{2(u-1)},\; u(0) = -1.$

$\int 2(u-1)\,du = \int (2t+1)\,dt \;\Rightarrow$

$u^2 - 2u = t^2 + t + C.\; u(0) = -1$ logo

$(-1)^2 - 2(-1) = 0^2 + 0 + C$ e $C = 3$. Portanto,

$u^2 - 2u = t^2 + t + 3$; resolvendo para u, temos

$u = 1 - \sqrt{t^2 + t + 4}$.

14. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{ty + 3t}{t^2+1} = \dfrac{t(y+3)}{t^2+1},$

$y(2) = 2.\; \displaystyle\int \dfrac{dy}{y+3} = \int \dfrac{t\,dt}{t^2+1} \;\Rightarrow$

$\ln|y+3| = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C \;\Rightarrow\; y + 3 = A\sqrt{t^2+1}.$

$y(2) = 2 \;\Rightarrow\; 5 = A\sqrt{5} \;\Rightarrow\; A = \sqrt{5} \;\Rightarrow$

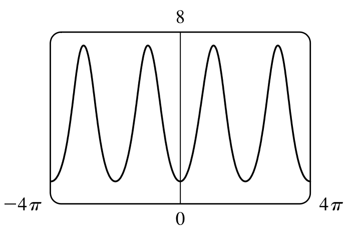
$y = -3 + \sqrt{5t^2 + 5}.$

15. $y' = y \operatorname{sen} x, y(0) = 1.\ \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{sen} x \, dx \quad \Leftrightarrow$

$\ln|y| = -\cos x + C \quad \Rightarrow |y| = e^{-\cos x + C} \quad \Rightarrow$

$y(x) = Ae^{-\cos x}.\ \ y(0) = Ae^{-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = e^1$, assim

$y = e \cdot e^{-\cos x} = e^{1 - \cos x}$.



16. Seja $y = f(x)$. Então $\dfrac{dy}{dx} = x^3 y$ e $y(0) = 1$. $\dfrac{dy}{y} = x^3\,dx$ (se $y \neq 0$), logo $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int x^3\,dx$ e $\ln|y| = \frac{1}{4}x^4 + C$; $y(0) = 1 \Rightarrow C = 0$, logo $\ln|y| = \frac{1}{4}x^4$, $|y| = e^{x^4/4}$ e $y = f(x) = e^{x^4/4}$ [uma vez que $y(0) = 1$].

17. Seja $y = g(x)$. Então $\dfrac{dy}{dx} = y(1+y)$ e $y(0) = 1$.

$\displaystyle\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy = \int dx$

$\Rightarrow \quad \ln|y| - \ln|1+y| = x + C \quad \Rightarrow \quad \left|\dfrac{y}{1+y}\right| = e^C e^x$

$\Rightarrow \quad \dfrac{y}{1+y} = Ae^x$. $y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = A$, logo

$\dfrac{y}{1+y} = \dfrac{e^x}{2}$. Resolvendo em y: $y = \dfrac{e^x}{2 - e^x}$.