

## PTC-3440 - Modelos Probabilísticos

PROVA - 18/06/2020

**1a. QUESTÃO - Valor: 2,0 pontos:** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \exp\{-(x+y)\} & \text{para } 0 < x < y, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Determine  $c$ .
- Determine  $E(X|Y = y)$ .

**2a. QUESTÃO - Valor: 2,0 pontos:** Uma moeda justa é jogada até que ocorram 3 caras seguidas.

- Modele este problema como uma cadeia de Markov e obtenha a matriz de transição.
- Qual é a probabilidade de que existam pelo menos 8 jogadas?
- Seja  $N$  o número de jogadas até que 3 caras consecutivas ocorram. Calcule  $E(N)$ .

**3a. QUESTÃO - Valor: 1,0 ponto:** Considere uma fila ilimitada com um servidor onde chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson com taxa  $\lambda = 40$  por hora, e o tempo de serviço tem distribuição exponencial com taxa  $\mu$ . Entretanto sempre que um serviço é concluído o cliente, ao invés de sair do sistema, volta para o fim da fila com probabilidade 0,2. Determine  $\mu$  de modo que o **tempo médio de espera na fila** seja  $W_Q = 20$  minutos.

**4a. QUESTÃO - Valor: 2,0 pontos:** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo  $(0, 3)$  e  $(0, 5)$  respectivamente.

- Determine  $P(X \leq Y)$ .
- Determine a função densidade de probabilidade  $f_Z(z)$  de  $Z = \min\{X, Y\}$  e o valor esperado  $E(Z)$ .

**5a. QUESTÃO - Valor: 3,0 pontos:** Considere uma fila limitada com 2 servidores  $A, B$  trabalhando em paralelo, cada um com tempo de serviço exponencialmente distribuído com médias de 12 minutos e 20 minutos respectivamente. Chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson com taxa  $\lambda = 10$  por hora. Quando o sistema está vazio, um cliente que chega é igualmente provável de escolher qualquer um dos 2 servidores (isto é, a probabilidade de escolher  $A$  ou  $B$  é  $1/2$ ). Nas outras situações o cliente escolhe o primeiro servidor livre. Suponha que o sistema tenha uma capacidade máxima de **3** clientes.

- Determine as probabilidades limites  $P_n$ , e a proporção de clientes que entra no sistema.
- Determine o número médio de clientes no sistema (isto é,  $L$ ), e o tempo de espera médio no sistema de um cliente que entra (isto é,  $W$ ).
- Determine o número médio de clientes na fila (isto é,  $L_Q$ ), e o tempo de espera médio na fila de um cliente que entra (isto é,  $W_Q$ ).
- Qual é a probabilidade de uma pessoa ser servida pelo servidor  $B$ , dado que ela entrou no sistema?