Monitoria:

Ex 19: Demonstração:

Sejem $\alpha_1 f + \beta_1 g \in I$ e $\alpha_2 f + \beta_2 g \in I$.

Então,

$$(\alpha_1 f + \beta_1 g) + (\alpha_2 f + \beta_2 g) =$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) f + (\beta_1 + \beta_2) g \in I.$$

Agora tome $\alpha f + \beta g \in I$ e $h \in \mathbb{K}[x]$.

$$h(\alpha f + \beta g) = (\alpha h) f + (h \beta) g \in I$$

Pelo ex 18, existe $f_0 \in \mathbb{K}[x]$ tal que

$$I = f_0 \mathbb{K}[x]$$

obs: Podemos considerar f_0 um polinômio mônico. (Provem!)

Vamos provar que se $f_0 = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ então $f_0 = mdc(f,g)$

rep. um polinômio!

Note que $f, g \in I$:

$f = 1 \cdot f + 0 \cdot g$ e $g = 0 \cdot f + 1 \cdot g$. Daí

$f_0 \mid f$ e $f_0 \mid g$. (provem!)

$\underbrace{}_{= I}$

Além disso, como $f_0 \in f_0 \mathbb{K}[x] \Rightarrow$

$f_0 = \tilde{\alpha} f + \tilde{\beta} g$, para algum $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{K}[x]$.

Se $d' \mid f$ e $d' \mid g \Rightarrow d' \mid \alpha f$ e $d' \mid \beta g \Rightarrow$

$d' \mid \alpha f + \beta g = f_0$. Logo, como f_0 é mônico

$f_0 = mdc(f, g) = \tilde{\alpha} f + \tilde{\beta} g$. ∎

Ex. 22 (a)

Demonstração:

$g \neq$ const.

($\Rightarrow$) Considere $f = g \cdot h$ tal que $gr(g) \neq 0$ e $gr(h) \neq 0$. Como g e h não podem ser ambos associados a f (expliquem o porquê). devemos ter que ambos são divisores próprios, contradizendo o fato de f ser irredutível.

($\Leftarrow$)

Veja que se $f = gh \Rightarrow gr(f) = gr(g) + gr(h)$. Como $gr(g) = 0$ ou $gr(h) = 0$.

vamos supor sem perda de generalidade que $gr(h) = 0$, daí, $gr(f) = gr(g)$. Assim, h é um polinômio constante $(\neq 0)$ e g é associado. Portanto, f deve ser irredutível.

(b) Demonstração:

Vamos proceder por indução no $gr(f)$.

Se $n=1$, $f = ax+b$ é irredutível e ele é seu próprio divisor.

Suponhamos que se $gr(f) \leq n$ então f possui um div. irredutível. Vamos provar para $gr(f)=n+1$. Se f for irredutível, ele é seu próprio divisor. Se f for redutível então $f=g.h$ com $gr(g) < gr(f)$ e

$gr(h) < gr(f)$. Logo, g e h tem divisores irredutíveis (HI) e, portanto f tem um divisor irredutível.

$\blacksquare$

$$p \mid g \text{ e } g \mid f \Rightarrow p \mid f$$

p irredutível.