TEORIA DO APREÇAMENTO POR ARBITRAGEM (APT) E MODELOS MULTIFATORES

Profa. Maria Paula Vieira Cicogna

Bodie et. al. (2014), cap. 10

Apreçamento por Arbitragem

Arbitragem = ganho sem risco por meio de ativos mal precificados

Negociação de ativos com desequilíbrios temporários de preços por meio da ***compra e venda simultâneas de ativos equivalentes*** com o objetivo de obter lucro sem risco

Princípio básico da teoria do mercado de capitais: preços de equilíbrio de mercado são racionais de forma que extinguem as possibilidades de arbitragem ⇨ mercados de ativos satisfazem a “condição de não arbitragem”

MODELOS MULTIFATORES

- ⇨ Permitem descrever e quantificar os diferentes fatores que afetam a taxa de retorno de um ativo durante um período de tempo
- ⇨ Modelos multifatores são úteis para gestão de riscos: medem a exposição a vários riscos macroeconômicos e permitem que carteiras de hedge sejam formadas para cada um dos riscos identificados

Considere um modelo de dois fatores: variação não esperada do produto (GDP) e mudanças não esperadas na taxa de juros (IR) ⇨ representam mudanças não antecipadas (valor esperado igual a zero)

A taxa de retorno do ativo *i* responde às duas fintes de risco macroeconômicas, assim como a às suas próprias influências específicas, ou seja:

$$r_i = E(r_i) + \beta_{iGDP}\mathrm{GDP} + \beta_{iIR}\mathrm{IR} + e_i$$

Modelos Multifatores

$$r_i = E(r_i) + \beta_{iGDP} GDP + \beta_{iIR} IR + e_i$$

Como estimar E(r)?

Coeficientes dos fatores medem a sensibilidade das taxas de retorno a cada fator ⇨ recebem o nome de ***fatores de sensibilidade, factor loading ou fatores betas***

e_i reflete as influências específicas da empresa

Do Modelo de Fator Único...

O CAPM diz que os retornos são compostos pela taxa de juros livre de risco (compensação do valor do dinheiro no tempo) e por um prêmio de risco do ativo em relação ao mercado (denotada por RP_M), da seguinte forma:

$$E(r) = r_f + \beta . RP_M$$

No Modelo de Fator Único vimos que o Beta é a medida de exposição ao fator de mercado

⇨ A relação retorno esperado – beta é representada pela SML: investidores são compensados por sua exposição ao risco do mercado, mas não são compensados pelo fator de risco específico do ativo (termo residual e_i)

...para o Modelo Multifatores

Com o Modelo Multifatores, surge a SML multifatores: prêmio de risco é determinado pela exposição a cada fator de risco sistemático e por um prêmio de risco associado a cada um desses fatores

No modelo de dois fatores, a SML de dois fatores é:

$$E(r) = r_f + \beta_{GDP} . RP_{GDP} + \beta_{IR} . RP_{IR}$$

No Modelo Multifatores, o prêmio de risco pode ser negativo

O prêmio de risco associado a cada fator pode ser pensado como o prêmio de risco de um portfolio que tem beta igual a 1 em um dado fator e beta igual a zero nos demais (CAPM)

Modelos Multifatores

Exemplo:

Suponha que o modelo de dois fatores foi estimado para uma companhia aérea e o resultado foi:

$$r = 0{,}133 + 1{,}2.\,GDP - 0{,}3.\,IR + e$$

Assim, os resultados mostram que (i) a taxa de retorno esperada da ação é de 13,33%; (ii) para cada aumento não esperado de um ponto percentual do GPD, o retorno da ação aumenta em média 1,2 vezes; e (iii) para cada aumento não esperado de um ponto percentual da taxa de juros, o retorno da ação diminui em 0,3 vezes

Suponha que o prêmio de risco para uma unidade de exposição ao GDP é de 6%, enquanto que o prêmio de risco para uma unidade de exposição à taxa de juros é de -7%

- ⇨ A porção do prêmio de risco da ação pela recompensa à exposição ao GDP é: 1,2 x 0,06 = 0,072
- ⇨ A porção do prêmio de risco da ação pela recompensa à exposição à taxa de juros é: -0,3 x -0,07 = 0,021
- ⇨ O prêmio de risco total deveria ser: 0,072 + 0,021 = 0,093 (9,3%)

Considerando que a taxa de juros livre de risco seja igual a 4%, o retorno esperado da ação pode ser escrito pela equação SML multifatores:

$$E(r) = 0{,}04 + 1{,}2 \times 0{,}06 + (-0{,}03) \times (-0{,}07) = 0{,}1333 = 13{,}33\%$$

Teoria do Apreçamento por Arbitragem (APT)

Proposições do APT*:

1) Os retornos de um ativo podem ser descritos pelo modelo de fatores;
2) Há ativos suficientes para diversificar o risco idiossincrático; e
3) Mercados de ativos com bom funcionamento não permitem a ***persistência*** de oportunidades de arbitragem

Uma oportunidade de arbitragem surge quando um investidor pode ganhar lucros sem risco, sem fazer um investimento líquido no ativo

Lei do Preço Único: se dois ativos são equivalentes em todos os aspectos economicamente relevantes, então eles devem ter o mesmo preço de mercado

Arbitradores: investidores que aproveitam as oportunidades de arbitragem: compram o ativo no mercado em que está mais barato e, simultaneamente, vendem o no mercado onde está mais caro ⇨ ganham a diferença de preço sem risco e sem fazer investimento líquido

Ao comprar o ativo no mercado de menor preço: aumentam o preço

Ao vender o ativo no mercado de maior preço: reduzem o preço

Operação de arbitragem se repete até que o preço se iguale e a oportunidade de arbitragem deixe de existir

[2]Stephen A. Ross, "Return, Risk and Arbitrage," in I. Friend and J. Bicksler, eds., *Risk and Return in Finance* (Cambridge, MA: Ballinger, 1976).

Teoria do Apreçamento por Arbitragem (APT)

A ideia de que os preços de mercado se movem até extinguir as oportunidades de arbitragem é um dos conceitos mais fundamentais da teoria do mercado de capitais

Um portfolio formado por arbitragem tem a propriedade de que qualquer investidor, apesar de sua aversão ao risco ou riqueza, irá desejar ter uma posição infinita

O ***CAPM é um modelo de argumento por dominância***: todos os investidores possuem o portfolio de mínima variância, de forma que se um ativo estiver mal precificado, investidores alteram seus portfolios comprando o ativo subprecificado e vendendo o ativo sobre precificado ⇨ com muitos investidores alterando seus portfolios, em um valor pequeno, os preços de equilíbrio são restabelecidos

Por sua vez, o argumento do preço de equilíbrio por não arbitragem diz que poucos investidores identificam a oportunidade de arbitragem e mobilizam elevados montantes para alocar nos ativos, de forma a restabelecer o equilíbrio rapidamente ⇨ implicações para os preços dos argumentos de não arbitragem são mais fortes do que os argumentos de dominância do risco-retorno

APT e Diversificação de Carteiras

Considere um portfolio ***P*** com ***n*** ativos de risco, cada um peso w_i, $\sum w_i = 1$, em que a taxa de retorno é dada pela equação do Modelo de Fatores:

$$\boldsymbol{r_P = \mathrm{E}(r_P) + \beta_P . F + e_P}$$

Em que:

$\beta_P = \sum w_i \,.\, \beta_i$; $\mathrm{E}(r_P) = \sum w_i \,.\, \mathrm{E}(r_i)$

$e_P = \sum w_i \,.\, e_i$ ⇨ componente não sistemático do portfolio (não correlacionado com F)

F = fator de risco (componente sistemático)

Variância do Portfolio

Por ser um modelo de fatores, podemos dividir a variância do portfolio P nos componentes sistemático e não sistemático as seguinte forma:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 . \sigma_F^2 + \sigma^2(e_P)$$

Em que:

σ_F^2 = variância do fator F

$\sigma^2(e_P)$ = risco não sistemático do portfolio P, dado por:

$$\sigma^2(e_P) = Variância\left(\sum w_i \,.\, e_i\right) = \sum w_i^2 . \sigma^2(e_i)$$

*Para calcular a variância não sistemática, é importante que os componentes específicos (**e_is**) sejam não correlacionados*

APT e Diversificação de Carteiras

Se o portfolio for igualmente dividido, $w_i = {}^1/_n$, a variância não sistemática é dada por:

$$\sigma^2(e_P) = Variância\left(\sum w_i \, . \, e_i\right) = \sum \left(\frac{1}{n}\right)^2 . \, \sigma^2(e_i) = \frac{1}{n}\sum \frac{\sigma^2(e_i)}{n} = \frac{1}{n}\bar{\sigma}^2(e_i)$$

Quanto mais ativos forem incluídos no portfolio (maior diversificação), o componente não sistemático da variância tende a zero ⇨ efeito da diversificação

- Esse resultado é válido para portfolios com pesos diferentes de cada ativo: um ***portfolio bem diversificado é aquele que contém um número suficientemente grande de ativos, de forma que os pesos w_i se tornem suficientemente pequenos para que a variância não sistemática $\sigma^2(e_P)$ se torne negligenciável***
- Assim, para um portfolio bem diversificado, o valor esperado de e_P e sua variância são zero, podemos concluir que qualquer valor observado de e_P é negligenciável, de forma que para um portfolio bem diversificado, temos:

$$\boldsymbol{r_P = \mathrm{E}(r_P) + \beta_P . F}$$

APT e Diversificação de Carteiras

O risco não sistemático se anula em portfolios bem diversificados, de forma que o investidor deve ser remunerado apenas pelo risco sistemático do portfolio, conforme a equação do retorno esperado do portfolio:

$$\boldsymbol{r_P} = \mathbf{E}(\boldsymbol{r_P}) + \boldsymbol{\beta_P}.\boldsymbol{F}$$

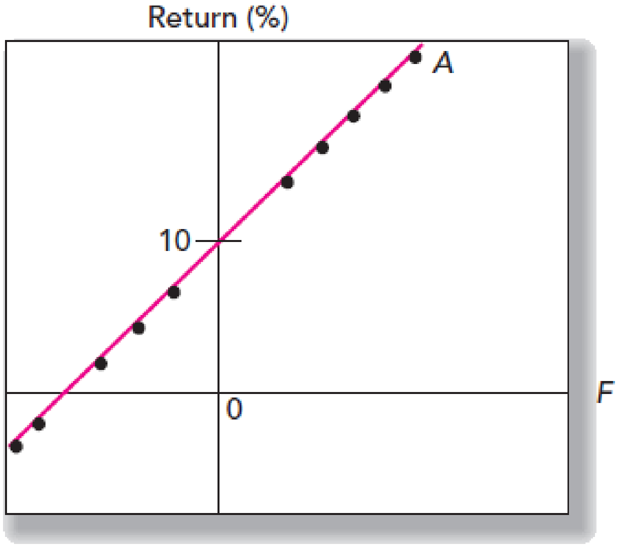
- ✓ Se F = 0: o investidor não tem risco sistemático ⇨ valor esperado do portfolio é dado pelo seu retorno (intercepto da reta do retorno)
- ✓ Se F > 0: retorno do portfolio excede seu valor esperado
- ✓ Se F < 0: retorno do portfolio é menor do que seu valor esperado

Logo: o retorno do portfolio é função do fator sistemático e pode ser representado pela reta descrita pela equação acima

O gráfico ao lado mostra o retorno de um portfolio bem diversificado (portfolio A), com $\boldsymbol{\beta_A} = \mathbf{1}$

O portfolio A tem retorno esperado igual a 10%, sendo sua equação dada por:

$$\boldsymbol{r_A} = \mathbf{0,10} + \mathbf{1}.\boldsymbol{F}$$

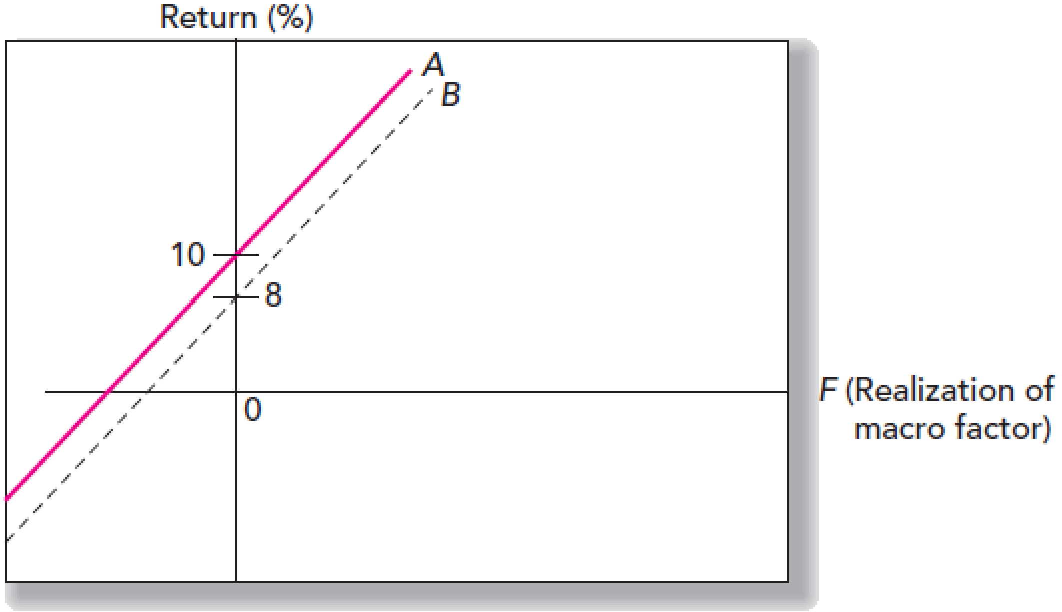


A

APT e Diversificação de Carteiras

Considere agora que outro portfolio bem diversificado está disponível (portfolio B). O retorno esperado do portfolio B é 8% e seu beta também é igual a 1

Comparando as retas dos retornos de A e de B, temos o gráfico ao lado ⇨ podemos perceber que os retornos de A sempre serão superiores a B, independentemente do que aconteça com os fator sistemático



Nessa situação, há **oportunidade de arbitragem:**

Montar portfolio P_{ARB}, da seguinte forma:

- ✓ Vender $1 milhão de B; e
- ✓ Comprar $1 milhão de A

⇨investimento líquido igual a zero com lucro, sem risco, de $20.000:

$$
\begin{array}{rl}
 & r_A \times \$A = (0,10 + 1.F) \times \$A \\
+ & -r_B \times \$B = -(0,08 + 1.F) \times \$B \\
\hline
 & P_{ARB} = 0,02 \times \$1M = \$20.000
\end{array}
$$

Essa estratégia será feita infinitas vezes até que a discrepância entre os dois portfolios desapareça

Portfolios bem diversificados com betas iguais devem ter os mesmos retornos esperados quando o mercado está em equilíbrio, ou abre-se oportunidade de arbitragem

APT e Diversificação de Carteiras

A equação do retorno do portfolio nos mostra o prêmio de risco do portfolio bem diversificado é proporcional ao beta do fator sistemático:

$$\boldsymbol{r_P} = \mathbf{E}(\boldsymbol{r_P}) + \boldsymbol{\beta_P}.\boldsymbol{F}$$

Considere que o ativo livre de risco tenha retorno de 4% e portfolios bem diversificados com diferentes betas:

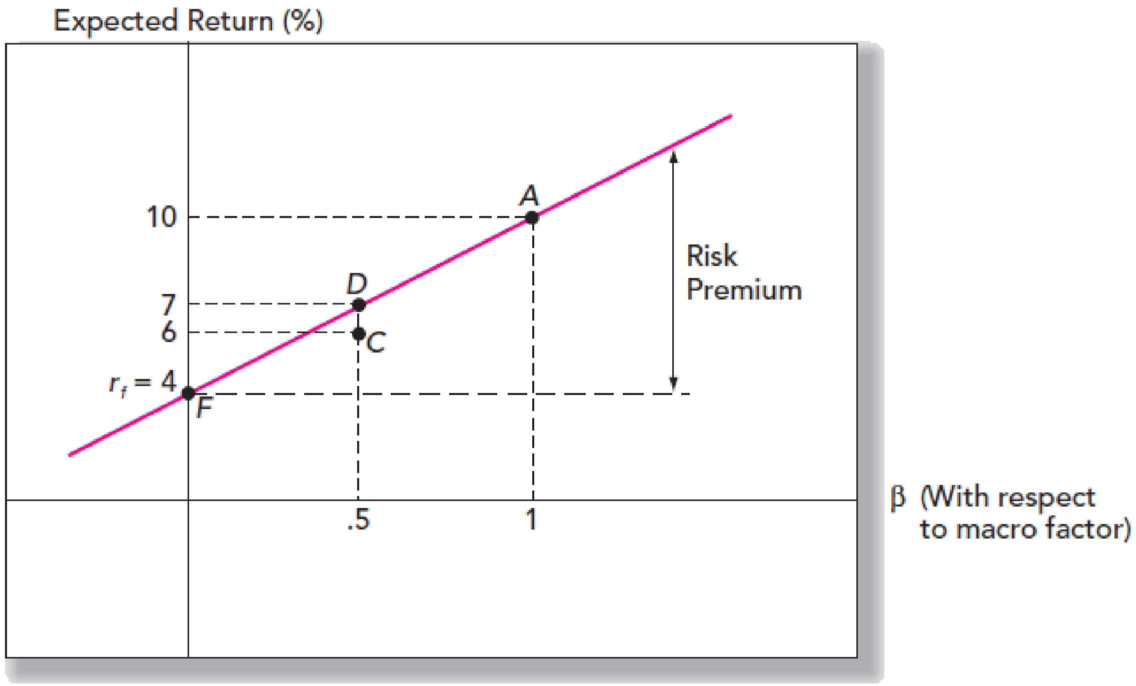
Portfolio C: $\beta_C = 0{,}5$ e $\mathrm{E}(r_C) = 6\%$

Portfolio D: composto por 50% portfolio A e 50% do ativo livre de risco, forma que $\beta_D = 0{,}5 \times 0 + 0{,}5 \times 1 = 0{,}5$ e $\mathrm{E}(r_D) = 0{,}5 \times 4\% + 0{,}5 \times 10\% = 7\%$

Portfolio D tem mesmo beta de C, mas retorno esperado maior, abrindo espaço para operação de arbitragem!

Considerando que os portfolios possuem o mesmo fator sistemático, **para não haver oportunidades de arbitragem, o retorno esperado dos portfolios bem diversificados devem estar sobre a reta da equação do retorno esperado em função do beta do fator sistemático F**

(com intercepto no ativo livre de risco)



APT e Diversificação de Carteiras

SML de Um Fator

Seja o portfolio do índice de mercado (M) um portfolio bem diversificado e o fator sistemático calculado como o retorno não esperado de M (beta de M é igual a 1)

Portanto, usando M para escrever a equação do retorno esperado do portfolio de risco P, temos:

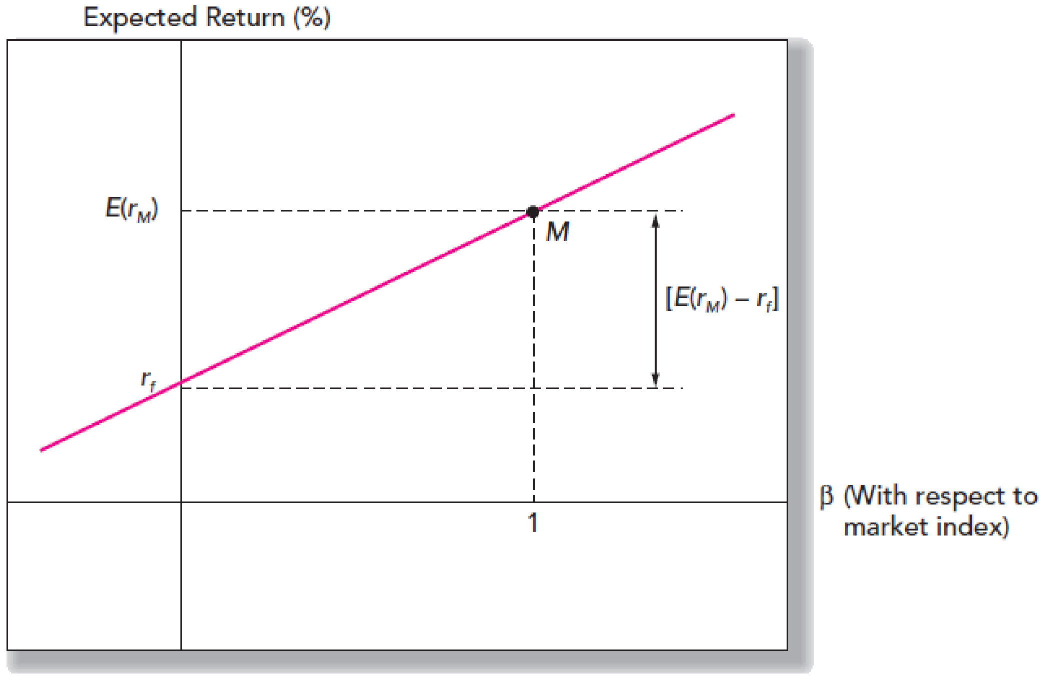
$$E(r_P) = r_f + \underbrace{[E(r_M - r_f)]}_{F} . \beta_P$$

Temos, assim, a SML para um fator, equivalente à SML do CAPM, em que:

Intercepto = r_f

Inclinação = $E(r_M - r_f)$

A SML para um fator pode ser vista no gráfico ao lado



APT e Diversificação de Carteiras

Exemplo

Suponha que o índice de mercado é um portfolio bem diversificado com retorno esperado de 10% e que os retornos não esperados do índice de mercado podem ser utilizados como o fator sistemático.

A taxa de juros livre de risco ter retorno de 4%.

Considerando que portfolio bem diversificado E tem beta igual a 2/3, pela SML, o retorno esperado de E é:

$$E(r_E) = 0{,}04 + [0{,}10 - 0{,}04].{}^{2}/_{3} = 0{,}08$$

Monte a estratégia de arbitragem, caso o retorno esperado de E fosse 9%.

Arbitragem:

✓ Comprar $1 do portfolio E

✓ Vender $1 do portfolio G, que deve ter o mesmo Beta de E.

Para isso, G é formado por 1/3 de ativo livre de risco e por 2/3 do portfolio de mercado M. Nesse caso:
$\beta_G = {}^{1}/_{3} \times 0 + {}^{2}/_{3} \times 1 = {}^{2}/_{3}$ e $\mathrm{E}(r_G) = {}^{1}/_{3} \times 0{,}04 + {}^{2}/_{3} \times 0{,}10 = 0{,}08$

$$\boldsymbol{r_E} \times \$\mathbf{1} = \left(\mathbf{0{,}09} + {}^{\mathbf{2}}/_{\mathbf{3}}\,.\,\boldsymbol{F}\right) \times \$1$$

$$-\boldsymbol{r_G} \times \$\mathbf{1} = -\left(\mathbf{0{,}08} + {}^{\mathbf{2}}/_{\mathbf{3}}\,.\,\boldsymbol{F}\right) \times \$\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{P_{ARB}} = \mathbf{0{,}01} \times \$1$$

O retorno por unidade monetária investida é livre de risco e é precisamente igual ao desvio do retorno esperado do portfolio E em relação à SML

APT e Diversificação de Carteiras

Exercício

Utilize os mesmos dados do exemplo anterior.

Considere agora que o portfolio H é bem diversificado, com beta igual a 1/3 e retorno esperado de 5%.

Há oportunidade de arbitragem nessa situação? Caso haja, qual a estratégia de arbitragem possível e qual o retorno livre de risco da estratégia de arbitragem?

Respostas: (i) sim, há oportunidade de arbitragem; (ii) comprar $1 do portfolio H e vender $1 do portfolio formado por 2/3 de ativo livre de risco e 1/3 do portfolio de mercado; (iii) retorno = 0,01 .

APT e Diversificação de Carteiras

APT, CAPM e Modelo de Índices

Utilizando as condições de não arbitragem, chegamos ao mesmo resultado do retorno esperado – beta do CAPM, sem os pressupostos restritivos do CAPM

Esse resultado depende de três pressupostos:

(i) A existência de um Modelo de Fatores para descrever os retornos dos ativos;

(ii) Um número suficiente de ativos para formar portfolios bem diversificados; e

(iii) Ausência de oportunidades de arbitragem.

Diferentemente do CAPM, o APT não exige que o portfolio de mercado na relação SML seja o verdadeiro portfolio de mercado ⇨ qualquer portfolio de mercado bem diversificado, que esteja sobre a SML, pode servir como o portfolio para benchmark

O APT fornece mais razões para utilizar o modelo de índices para implementar a relação SML (desde que o portfolio de índice utilizado seja suficientemente bem diversificado)

APT e Ativos Individuais

O retorno esperado de um portfolio bem diversificado é proporcional ao seu beta. Se essa relação é válida para todos os portfolios bem diversificados, então ela deve ser satisfeita por ***quase todos os ativos individuais***

Se a relação de não arbitragem retorno esperado – beta é assegurada para infinitos portfolios bem diversificados, diferentes entre sim, então essa relação deve é virtualmente assegurada para todos os ativos individuais, com exceção de um pequeno número de ativos

- ⇨ O termo “virtualmente assegurada” é utilizado para distinguir essa conclusão da afirmação de que todos os ativos seguramente cumprem essa relação
- ⇨ Em portfolios bem diversificados deve-se ter muitas pequenas posições em todos os ativos. Se apenas um dos ativos violar a condição retorno esperado – beta, o efeito dessa violação será mínimo no portfolio bem diversificado, de forma que as oportunidades de arbitragem serão desprezíveis
- ⇨ Porém, caso a violação da condição retorno esperado – beta ocorra para muitos ativos, então a relação não se manterá para portfolios bem diversificados e surgirão oportunidades de arbitragem

APT Multifatores

Considere o modelo de dois fatores (que pode ser facilmente aumentado para multifatores):

$$r_i = E(r_i) + \beta_{i1}.F_1 + \beta_{i2}.F_2 + e_i$$

Cada fator tem valor esperado zero, visto que é a variação não esperada da variável sistemática (não a variável sistemática em nível);

O componente específico (e_i) também tem valor esperado zero

Portfolio de Fator: portfolio bem diversificado construído de forma a ter beta igual a 1 para um dos fatores e beta igual a zero para os demais fatores

- ⇨ Portfolio de Fator é um portfolio de acompanhamento (*tracking portfolio*) sobre a evolução do fator sistemático com o qual tem beta igual a 1, sendo não correlacionado com os demais fatores de risco
- ⇨ É possível formar portfolios de fatores porque há muitos ativos para escolha e, relativamente, um número reduzido de fatores
- ⇨ Portfolios de fatores servem como portfolios de benchmark para a SML multifatores

APT Multifatores

- ✓ Para qualquer portfolio P, a exposição a cada um dos fatores é dada pelos seus betas: $\boldsymbol{\beta_{P1}}$ e $\boldsymbol{\beta_{P2}}$
- ✓ Um portfolio concorrente Q pode ser formado investindo nos portfolios de fatores com pesos $\boldsymbol{\beta_{P1}}$ no primeiro portfolio de fator e $\boldsymbol{\beta_{P2}}$ no segundo, além de $1 - \boldsymbol{\beta_{P1}} - \boldsymbol{\beta_{P2}}$ no ativo livre de risco
- ✓ Por construção, o portfolio Q tem betas iguais ao portfolio P e retorno esperado dado por:

$$\boldsymbol{E(r_Q) = \beta_{P1}.E(r_1) + \beta_{P2}.E(r_2) + (1 - \beta_{P1} - \beta_{P2}).r_f}$$

$$\boldsymbol{E(r_Q) = r_f + \beta_{P1}.[E(r_1 - r_f)] + \beta_{P2}.[E(r_2 - r_f)]}$$

Logo, para qualquer portfolio bem diversificado com betas $\boldsymbol{\beta_{P1}}$ e $\boldsymbol{\beta_{P2}}$ deve ter o retorno dado pela equação acima, caso contrário surgem oportunidades de arbitragem

A equação do retorno esperado para o caso multifatores é um generalização da SML para um único fator

Da mesma forma, a extensão da equação do retorno esperado do portfolio para os ativos individuais é a mesma do modelo com um único fator

APT Multifatores

Exemplo:

Considere dois portfolios de fatores com retornos esperados $E(r_1)$ = 10% e $E(r_2)$ = 12%. A taxa de retorno do ativo livre de risco é de 4%, de forma que o prêmio de risco do portfolio 1 é de 6% e do portfolio 2 é de 8%.

Seja o portfolio A bem diversificado, com beta para o primeiro fator igual a 0,5 e para o segundo fator igual a 0,75, então:

- ✓ Prêmio de risco atribuível ao fator 1 é dado por: $\beta_{A1} \times \left[E(r_1) - r_f\right] = 0{,}5 \times 0{,}06 = 0{,}03$
- ✓ Prêmio de risco atribuível ao fator 2 é dado por: $\beta_{A2} \times \left[E(r_2) - r_f\right] = 0{,}75 \times 0{,}08 = 0{,}06$
- ✓ Prêmio de risco total do portfolio A é: 0,03 + 0,06 = 0,09
- ✓ Retorno total do portfolio A é: 0,04 + 0,09 = 0,13

Suponha que o retorno observado do portfolio A é de 12%. Qual operação de arbitragem pode ser montada?

⇨ Forme o portfolio Q por meio dos portfolios de fatores com o mesmo beta de A:

- Peso: 50% no primeiro fator, 75% no segundo fator e -25% no ativo livre de risco

⇨ Compre $1 de Q e venda $1 de A; o retorno será igual a:

$$\$1 \times E\left(r_Q\right) + \$1 \times E(r_A) = \$1 \times 0{,}13 - \$1 \times 0{,}12 = \$0{,}01$$

APT Multifatores

Exercício:

Utilizando os mesmos dados do exemplo anterior, encontre a taxa de retorno de equilíbrio de um portfolio com $\beta_1 = 0{,}2$ e $\beta_2 = 1{,}4$.

Resposta: E(r) = 0,164 ou 16,4%