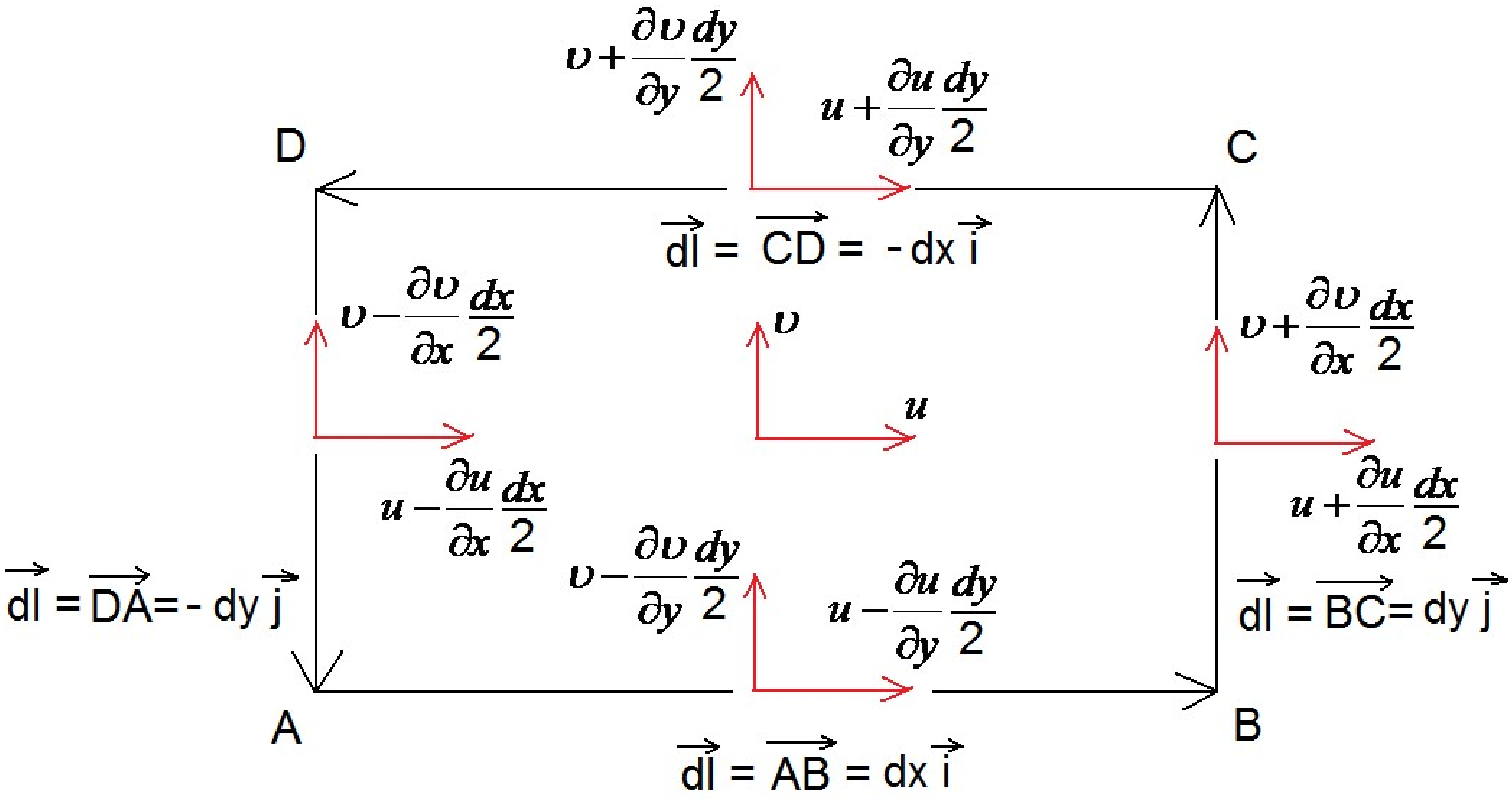
Vorticidade

1)Teorema de Stokes e Circulação

Se imaginarmos um elemento retangular *dxdy* e fizermos a integral de linha do vetor da velocidade ao longo do perímetro, seguindo o perímetro num sentido anti-horário, e chamando essa integral de Γ:

$$\Gamma = \oint_{ABCDA} \vec{u}.d\vec{l} = \int_{AB} \vec{u}.d\vec{l} + \int_{BC} \vec{u}.d\vec{l} + \int_{CD} \vec{u}.d\vec{l} + \int_{DA} \vec{u}.d\vec{l} \qquad (1.1)$$

Se conhecermos a velocidade e seus gradientes no centro do elemento, podemos obter as velocidades nos centróides dos lados do elemento *dxdy*. Aproximando a velocidade média em cada lado pela velocidade em seu centróide, temos:



$\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2}$
$u + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}$
D
C
$\vec{dl} = \vec{CD} = -dx\,\vec{i}$
$\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}$
υ
$\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}$
u
$u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}$
$u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}$
$\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2}$
$u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}$
$\vec{dl} = \vec{DA} = -dy\,\vec{j}$
$\vec{dl} = \vec{BC} = dy\,\vec{j}$
A
B
$\vec{dl} = \vec{AB} = dx\,\vec{i}$

$$\int_{AB} \vec{u}\,.d\vec{l} = \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2} \right)\vec{i} + \left(\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2} \right)\vec{j} \right].\overrightarrow{AB}$$

$$= \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2} \right)\vec{i} + \left(\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2} \right)\vec{j} \right].dx\,\vec{i} = \left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2} \right)dx \tag{1.2}$$

$$\int_{BC} \vec{u}\,.d\vec{l} = \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2} \right)\vec{i} + \left(\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2} \right)\vec{j} \right].\overrightarrow{BC}$$

$$= \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2} \right)\vec{i} + \left(\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2} \right)\vec{j} \right].dy\,\vec{j} = \left(\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dx}{2} \right)dy \tag{1.3}$$

$$\int_{CD} \vec{u}\,.d\vec{l} = \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{j}\right].\overrightarrow{CD}$$

$$= \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{j}\right].\left(-dx\,\vec{i}\right) = \left(-u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx \tag{1.4}$$

$$\int_{DA} \vec{u}\,.d\vec{l} = \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{j}\right].\overrightarrow{DA}$$

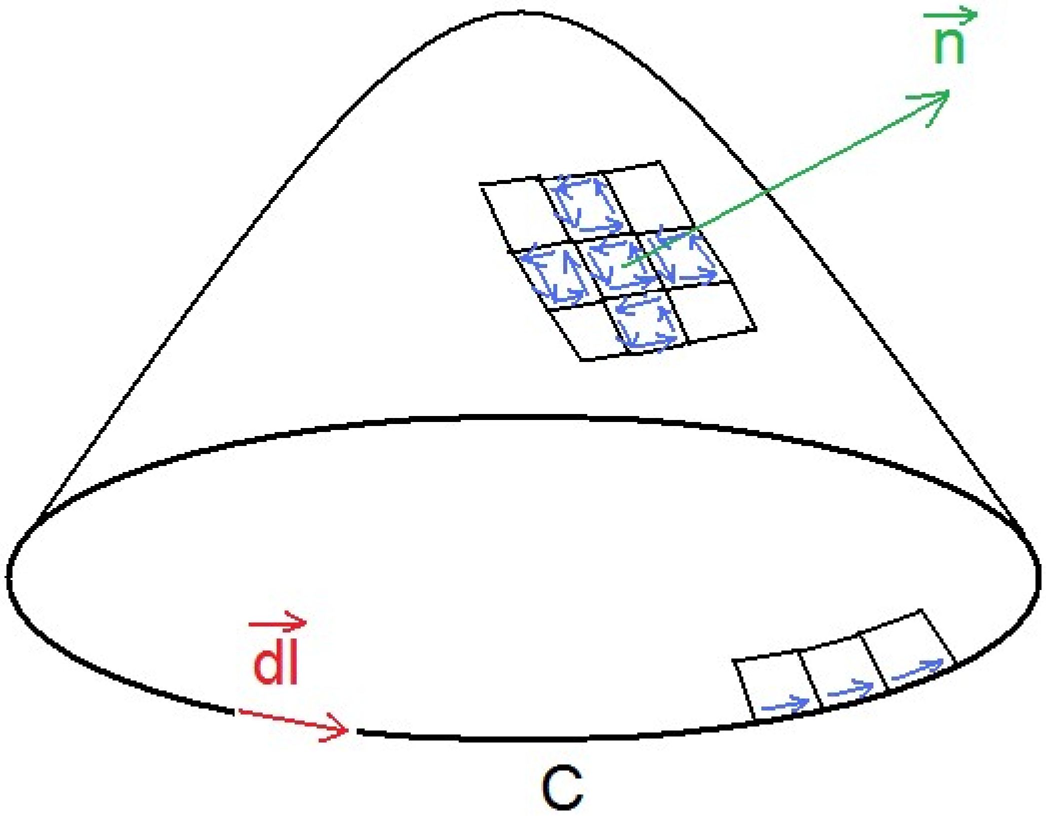
$$= \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{j}\right].\left(-dy\,\vec{j}\right) = \left(-\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy \tag{1.5}$$

Substituindo todos esses resultados na equação (2.1):

$$\Gamma = \oint_{ABCDA} \vec{u}\,.\,d\vec{l} = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy \tag{1.6}$$

Note que Γ é igual à vorticidade na direção *z*, ou seja, na direção normal ao elemento de área *dxdy*, com a normal apontando na direção do observador:

$$\Gamma = \oint_{ABCDA} \vec{u}\,.\,d\vec{l} = \omega\; dx\,dy = \vec{\omega}.\vec{n}\; dA \tag{1.7}$$



$\vec{n}$
$\vec{dl}$
C

Suponha agora que temos uma curva material C no espaço, e que essa curva tem um diafragma qualquer que vamos chamar de S. Esse diafragma pode ser subdividido em N elementos retangulares dA. Se fizermos a somatória das integrais de Γ sobre todos os N elementos retangulares, teremos:

$$\sum_{j=1}^{N}\Gamma=\sum_{j=1}^{N}\oint_{ABCDA}\vec{u}\,.d\vec{l}=\sum_{j=1}^{N}\vec{\omega}.\vec{n}\,dx\,dy=\int_{S}\vec{\omega}.\vec{n}\,dA \qquad (1.8)$$

Porém, ao fazermos a somatória das integrais de linha $\vec{u}.d\vec{l}$, cada trecho será percorrido duas vezes se um dado trecho for compartilhado por dois elementos de área, e percorrido em sentidos diferentes em cada um desse elementos, o que significa que a somatória de todas as integrais $\vec{u}.d\vec{l}$ resultará nula, exceto pelos trechos localizados exatamente sobre a curva C, que são percorridos uma única vez. Isso significa que a equação (2.8) fica:

$$\sum_{j=1}^{N}\Gamma=\sum_{j=1}^{N}\oint_{ABCDA}\vec{u}.d\vec{l}=\oint_{C}\vec{u}.d\vec{l}=\int_{S}\vec{\omega}.\vec{n}\,dA \tag{1.9}$$

Chegamos então à forma final do Teorema de Stokes:

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{u}.d\vec{l} = \int_S \vec{\omega}.\vec{n}\, dA \tag{1.10}$$

Chamamos Γ_C de circulação do vetor da velocidade sobre a curva C. Podemos dizer que:

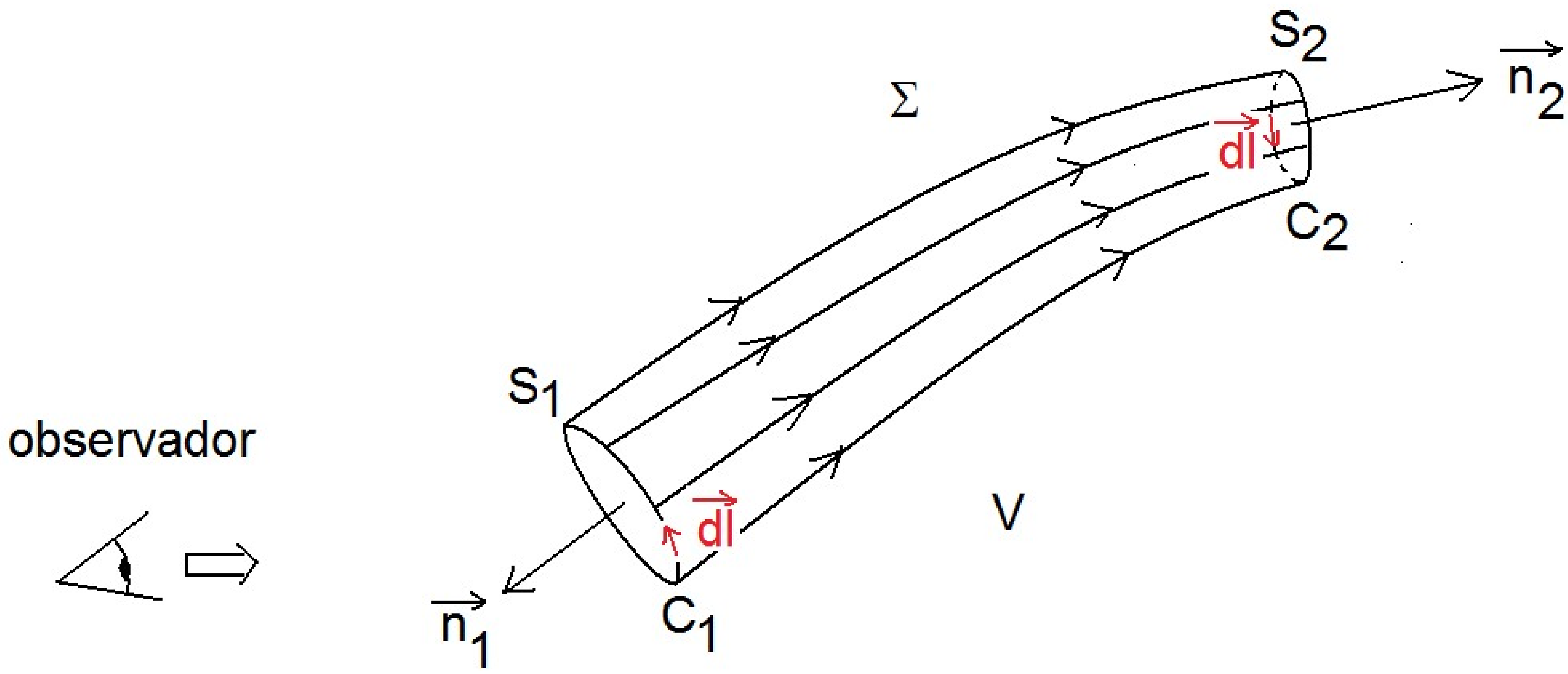
"A circulação do vetor da velocidade sobre uma curva C que tem por diafragma uma superfície S é igual ao fluxo do vetor da vorticidade através da superfície S. Ao fazermos a integral de linha $\vec{u}.d\vec{l}$ a curva C tem que ser percorrida num sentido anti-horário se os vetores normais aos elementos de área dA da superfície apontarem na direção do observador."

2)Intensidade de um Vórtice

Se tivermos um filete de vórtice no espaço (um filete cuja superfície é formada por linhas que tangenciam os vetores da vorticidade) e tomarmos um elemento volumétrico V desse filete, teremos:

$$\int_V \nabla.\vec{\omega}\, dV = \int_S \vec{\omega}.\vec{n}\, dA \tag{2.1}$$

Porém, como o campo de vorticidade é solenoidal $\left(\nabla.\vec{\omega}=0\right)$, a integral do lado esquerdo da equação (3.1) é nula. Na integral do lado direito, as únicas superfícies onde o produto escalar $\vec{\omega}.\vec{n}$ é não nulo são as superfícies S_1 e S_2, pois sobre a superfície lateral Σ qualquer normal será sempre ortogonal aos vetores da vorticidade. Assim:



observador
S_1
S_2
Σ
$\vec{n}_1$
$\vec{n}_2$
$\vec{dl}$
$\vec{dl}$
C_1
C_2
V

$$\int_{S} \vec{\omega}.\vec{n}\, dA = \int_{S_1} \vec{\omega}.\vec{n}_1\, dA + \int_{S_2} \vec{\omega}.\vec{n}_2\, dA = 0 \tag{2.2}$$

Ou seja:

$$\int_{S_1} \vec{\omega}.\vec{n}_1\, dA = -\int_{S_2} \vec{\omega}.\vec{n}_2\, dA = \int_{S_2} \vec{\omega}.\left(-\vec{n}_2\right) dA \tag{2.3}$$

Mas os versores $\vec{n}_1$ e $-\vec{n}_2$ apontam na direção de um observador que enxerga as curvas C_1 e C_2 num sentido anti-horário. Assim:

$$\boxed{\Gamma_1 = \Gamma_2} \tag{2.4}$$

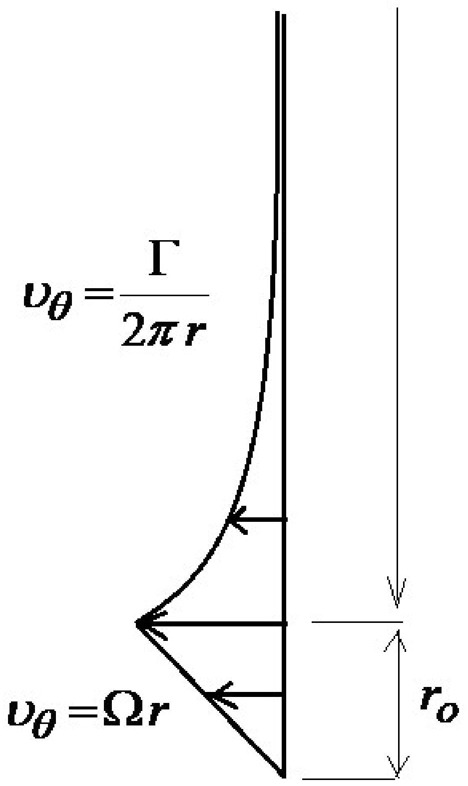
Esse resultado significa que o fluxo do vetor da vorticidade, é constante ao longo do comprimento de um filete de vórtices, ou seja, a intensidade (ou circulação) de um filete de vórtices é constante ao longo de seu comprimento.

3)Teoremas de Helmholtz

A intensidade (circulação) de um filamento de vórtice permanece constante ao longo de seu comprimento.

Um filamento de vórtice não pode começar ou terminar em um ponto dentro do fluido. Filamentos de vórtices tem que formar circuitos fechados ou se estender até as fronteiras do escoamento.

Exemplo: O vórtice de Rankine funciona como um bom exemplo para a aplicação do teorema de Stokes e o conceito de circulação.



No vórtice de Rankine, o campo de velocidades é dado por:

$\upsilon_\theta = \Omega r$ para $r \leq r_o$; $\upsilon_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$ para $r > r_o$.

Assim, temos toda a vorticidade concentrada no núcleo rotacional de raio $r \leq r_o$. De fato, calculando a vorticidade no núcleo:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{r\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \upsilon_r & \upsilon_\theta & \upsilon_z \end{vmatrix} + \frac{\upsilon_\theta}{r}\vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{r\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \Omega r & 0 \end{vmatrix} + \Omega\vec{e}_z$$

Isso resulta $\boxed{\vec{\omega} = 2\Omega\vec{e}_z}$

O escoamento externo ao núcleo é irrotacional (potencial):

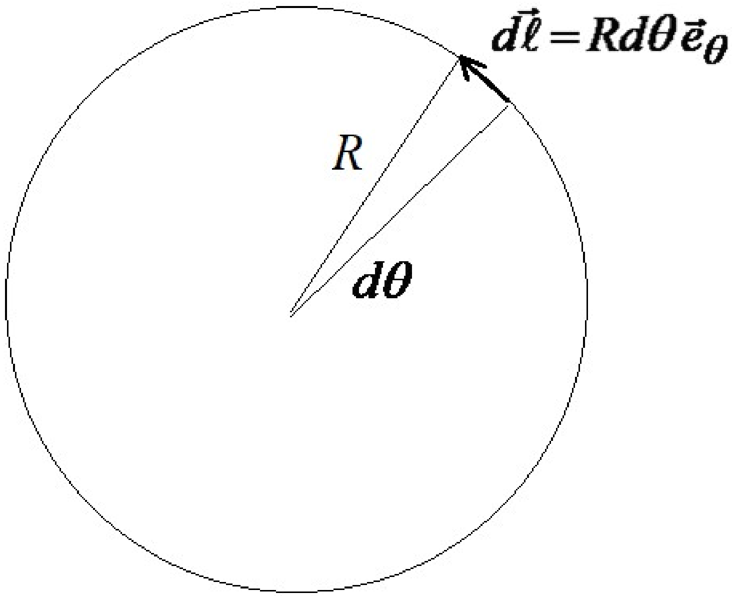
$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{r\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \upsilon_r & \upsilon_\theta & \upsilon_z \end{vmatrix} + \frac{\upsilon_\theta}{r}\vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{r\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dfrac{\Gamma}{2\pi r} & 0 \end{vmatrix} + \frac{\Gamma}{2\pi r^2}\vec{e}_z = 0$$

A relação entra a circulação Γ e a vorticidade ω pode ser obtida pela igualdade das velocidades interna e externa ao núcleo em $r = r_o$:

$$\Omega r_o = \frac{\Gamma}{2\pi r_o} \Rightarrow \frac{\omega}{2} r_o = \frac{\Gamma}{2\pi r_o} \quad \text{que resulta: } \boxed{\Gamma = \omega \pi r_o^2}$$

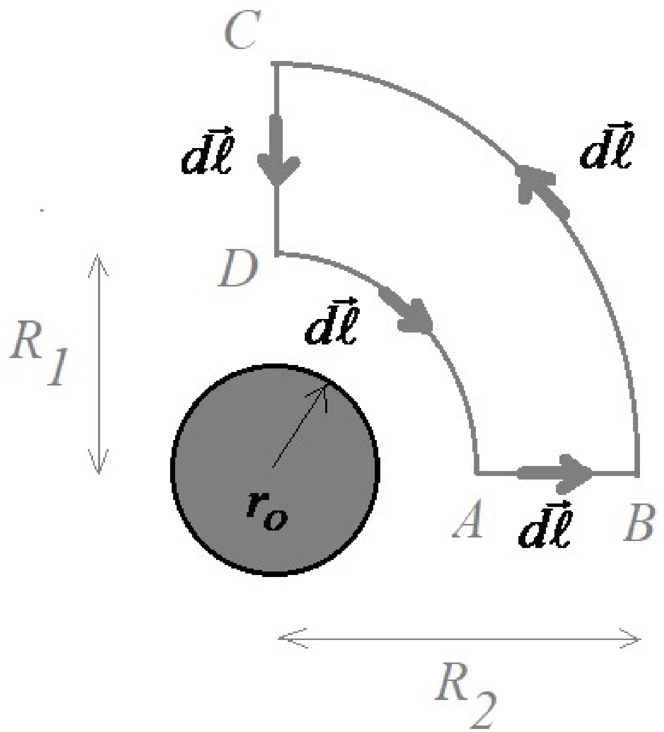
Dado que a vorticidade é constante no núcleo, o resultado $\Gamma = \omega \pi r_o^2$ representa exatamente o fluxo do vetor da vorticidade através da superfície em forma de circunferência que constitui o núcleo do vórtice.

É fácil também ver que o calculo da circulação Γ_C sobre qualquer curva C ao redor do núcleo resultará no mesmo valor de circulação Γ. Por exemplo, se calcularmos a circulação sobre uma circunferência de raio $R > r_o$, com R qualquer:



$$\Gamma_C = \oint_C \vec{V}.d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi R}\vec{e}_\theta.R d\theta \vec{e}_\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi} d\theta = \Gamma$$

Por outro lado, o cálculo da circulação Γ_C sobre um circuito que não envolve o núcleo será sempre nulo. Por exemplo, um circuito fechado como o da figura:



$$\Gamma_C = \oint_C \vec{V}.d\vec{\ell} = \int_{AB} \vec{V}.d\vec{\ell} + \int_{BC} \vec{V}.d\vec{\ell} + \int_{CD} \vec{V}.d\vec{\ell} + \int_{DA} \vec{V}.d\vec{\ell}$$

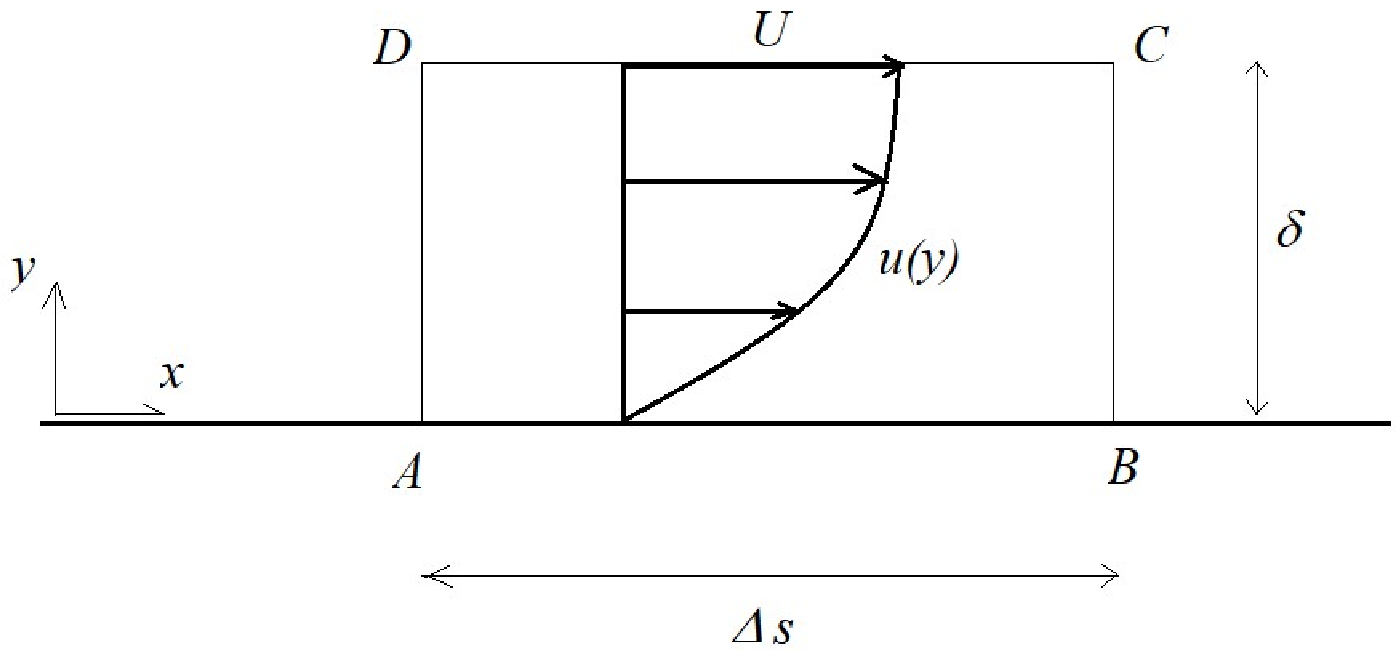
Isso resulta:

$$\Gamma_C = \underbrace{\int_{R_1}^{R_2} \upsilon_\theta\, \vec{e}_\theta . dr\, \vec{e}_r}_{0} + \int_0^{\pi/2} \upsilon_\theta\, \vec{e}_\theta . R_2 d\theta\, \vec{e}_\theta + \underbrace{\int_{R_1}^{R_2} \upsilon_\theta\, \vec{e}_\theta . \left(-dr\, \vec{e}_r\right)}_{0} + \int_0^{\pi/2} \upsilon_\theta\, \vec{e}_\theta . \left(-R_1 d\theta\, \vec{e}_\theta\right)$$

Finalmente:

$$\Gamma_C = \int_0^{\pi/2} \frac{\Gamma}{2\pi R_2} R_2 d\theta - \int_0^{\pi/2} \frac{\Gamma}{2\pi R_1} R_1 d\theta = 0$$

Exemplo: Calcule a circulação no percurso ABCDA da figura, considerando o perfil de velocidades $u = u(y)$ e $\upsilon = 0$.



Pela definição de circulação:

$$\Gamma = \oint \vec{\upsilon} . d\vec{\ell}$$

Isso resulta:

$$\Gamma = \underbrace{\int_{AB} \vec{\upsilon} . d\vec{\ell}}_{u(0)\,\vec{e}_x \,.\, \Delta s\, \vec{e}_x} + \underbrace{\int_{BC} \vec{\upsilon} . d\vec{\ell}}_{u(y)\,\vec{e}_x \,.\, \Delta s\, \vec{e}_y} + \underbrace{\int_{CD} \vec{\upsilon} . d\vec{\ell}}_{u(\delta)\,\vec{e}_x \,.\, -\Delta s\, \vec{e}_x} + \underbrace{\int_{DA} \vec{\upsilon} . d\vec{\ell}}_{u(y)\,\vec{e}_x \,.\, -\Delta s\, \vec{e}_y} = \left[u(0) - u(\delta)\right]\Delta s$$

$$\boxed{\Gamma = -U\, \Delta s}$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega} . \vec{n}\, dS$$

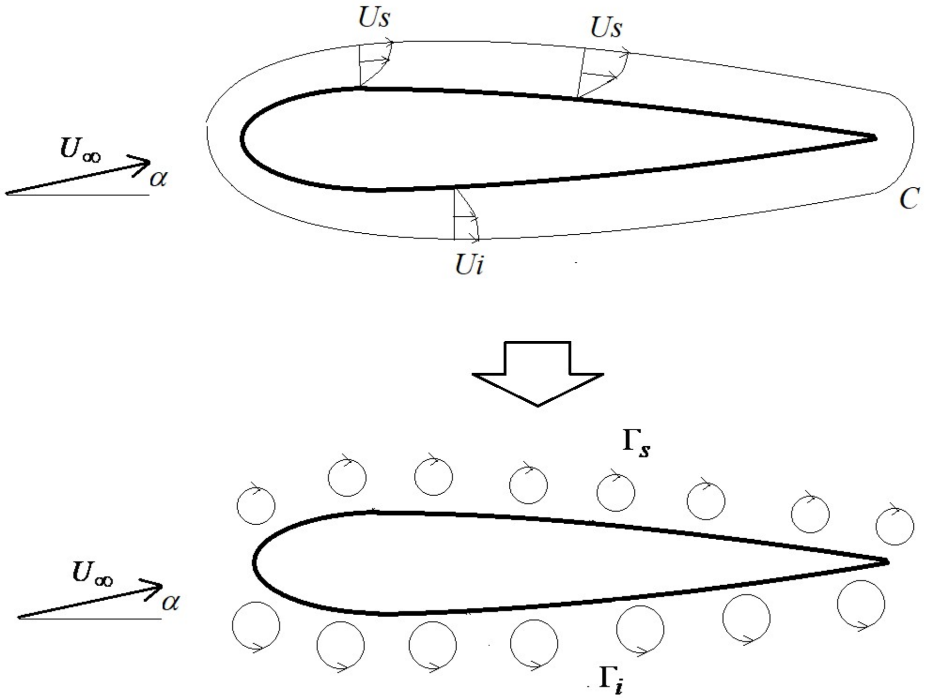
Em duas dimensões, $\vec{\omega} = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{e}_z$. Como $\upsilon = 0$:

$$\Gamma = \int_S \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{e}_z . \vec{e}_z\, dS = -\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial y} \Delta s\, dy = -\left[u(\delta) - u(0) \right] \Delta s$$

Logo:

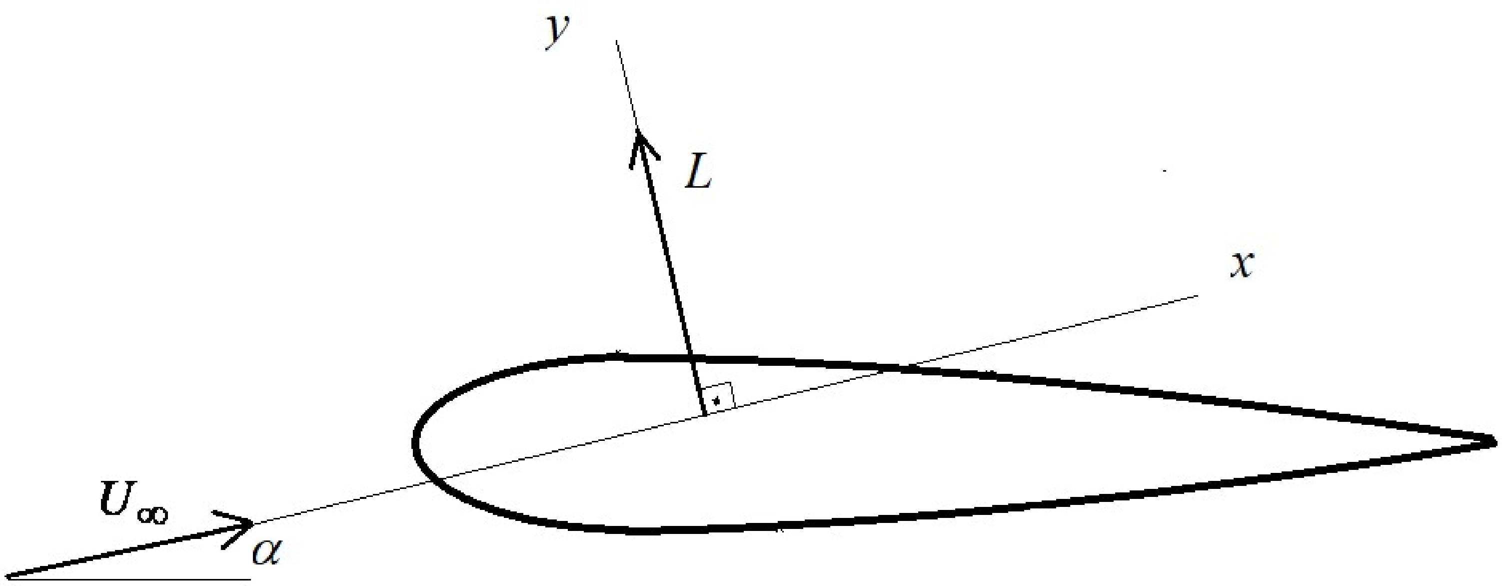
$$\boxed{\Gamma = -U\,\Delta s}$$

4)Sustentação



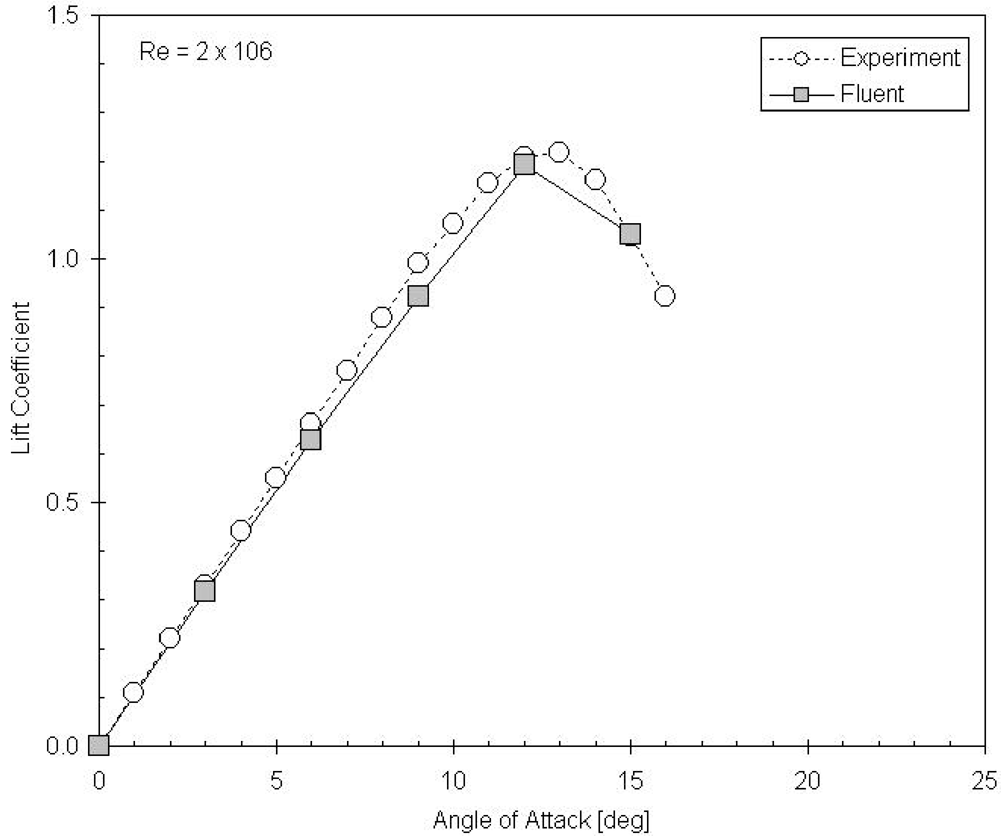
A circulação da vorticidade da camada limite na face superior do aerofólio será, em módulo, maior que a circulação da vorticidade da camada limite na parte inferior do aerofólio: $-\Gamma_s > \Gamma_i$.

Resultará uma circulação negativa. Pelo teorema de Kutta-Joukowski:



$$\boxed{\frac{L}{b} = -\rho U_\infty \Gamma}$$

onde L é a força de sustentação ("Lift")



Curva $C_L \times \alpha$ de um aerofólio simétrico NACA 0012. Extraído de https://www.cfd-online.com/Wiki/NACA0012_airfoil.

$C_L = \dfrac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A_p}$ onde A_p é a área planiforme do aerofólio.

No caso do aerofólio NACA 0012, $A_p = b \times c$ (envergadura multiplicada pela corda).

Na curva, antes do estol ("stall"):

$C_L \cong 2\pi\alpha$, com α em radianos, ou $C_L \cong 2\pi \operatorname{sen}\alpha$ com α em graus.

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Munson, Young, Okiishi, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.