Grafos: caminhos mínimos
Parte 3

SCC0216 Modelagem Computacional em Grafos

Thiago A. S. Pardo
Maria Cristina F. Oliveira

Caminhos Mais Curtos de **Todos os Pares**

- Suponha que um grafo orientado ponderado representa as possíveis vôos de uma companhia aérea conectando pares de cidades

- Suponha que queremos construir uma tabela com as melhores rotas, ou os menores caminhos, entre todas as cidades

- Esse é um exemplo de problema que exige encontrar os **caminhos mais curtos para todos os pares de vértices**

Caminhos Mais Curtos de **Todos os Pares**

- Uma possível solução seria utilizar o algoritmo de Dijkstra considerando cada vértice como origem, alternadamente

- Uma solução mais direta é utilizar o **algoritmo de Floyd-Warshall**
  - Admite arestas com peso negativo, mas não admite ciclos de peso negativo (mesma situação de Bellman-Ford)

- Se |**V**| = *n*, o algoritmo utiliza uma matriz $A_{n \times n}$ para calcular e armazenar os tamanhos (ou custos) dos caminhos mais curtos

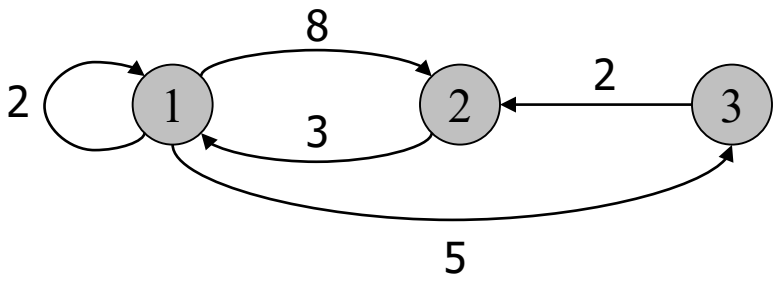
Caminho mínimo

- Grafo dirigido G(**V**,**A**) com função peso *w*: **A**$\rightarrow\Re$ que associa pesos às arestas

- Seja **p** algum caminho do vértice *u* ao vértice *v*
- Seja w(**p**) o peso (custo) do caminho **p**
- Caminho de menor peso entre *u* e *v*:

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\Rightarrow} v\} \; se \exists \; rota \; de \; u \;\; p/v \\ \infty \; cc \end{cases}$$

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares:
Algoritmo de Floyd-Warshall

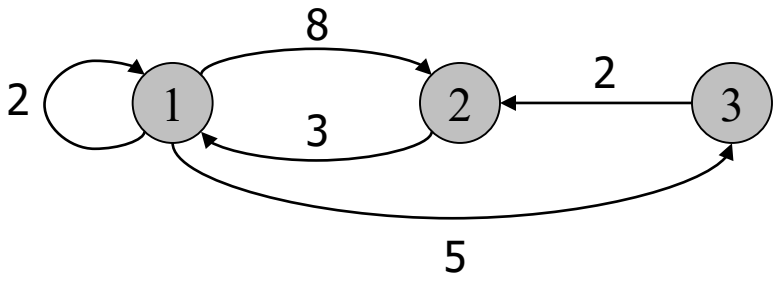


Grafo G(V,A)

	1	2	3
1			
2			
3			

Matriz A

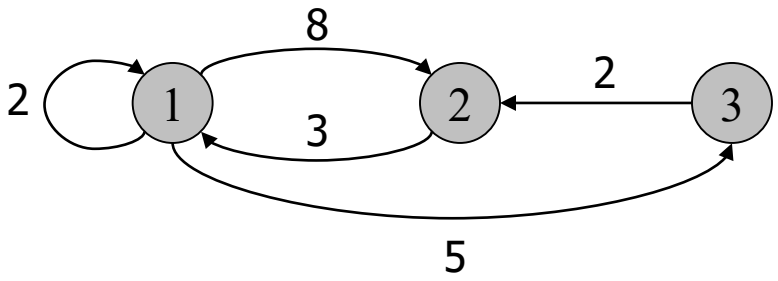
Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: **Algoritmo de Floyd-Warshall**



	1	2	3
1			
2			
3			

- Inicialmente, os custos entre pares vértices adjacentes são inseridos na matriz A
- Diagonal é zerada: pesos de *self-loops* são ignorados

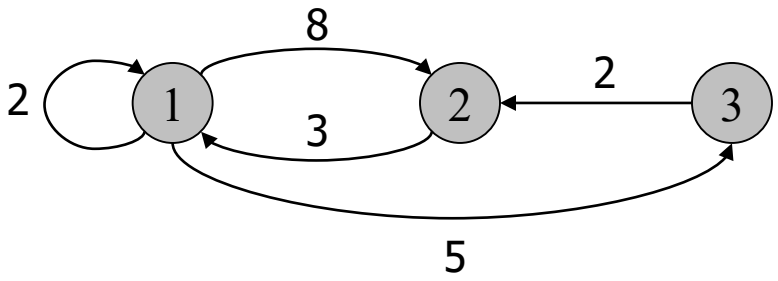
Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

- Inicialmente, os custos entre pares vértices adjacentes são inseridos na matriz A
- Diagonal é zerada: pesos de *self-loops* são ignorados

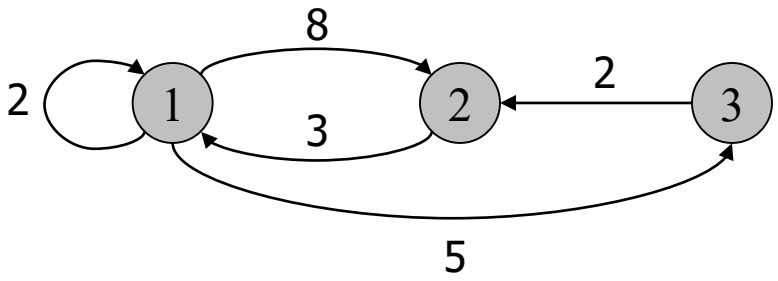
Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

- Matriz *A* é percorrida *n* = |**V**| vezes
- A cada iteração (*k*, com (1≤ *k* ≤ n), verifica se um caminho entre um par de vértices *(v,w)*, que passa pelo vértice *k*, é mais curto do que o caminho mais curto já conhecido
- Mais curto = menor custo

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



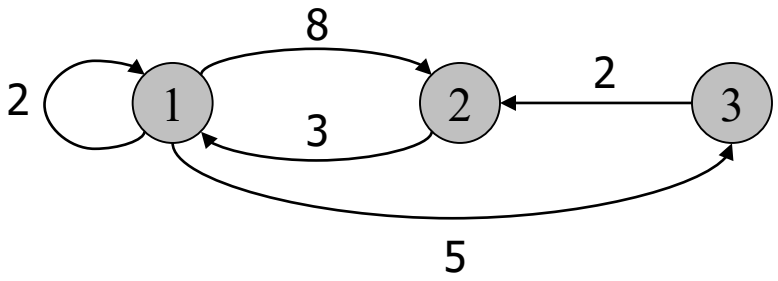
Ou seja:

A[v,w] = *min*(A[v,w],
A[v,k] + A[k,w])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

k = 1, 2, 3

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



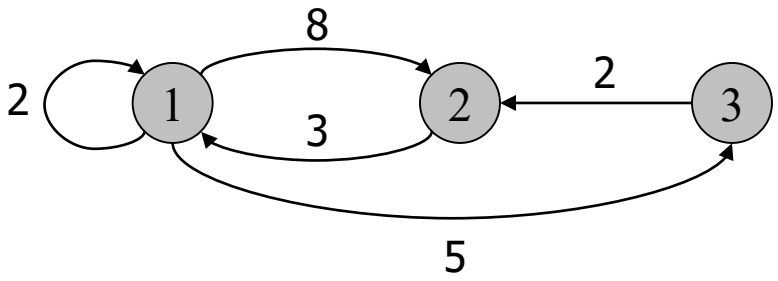
Ou seja:

A[1,1] = *min*(A[1,1],
A[1,1] + A[1,1])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

u = 1, v = 1, k = 1

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



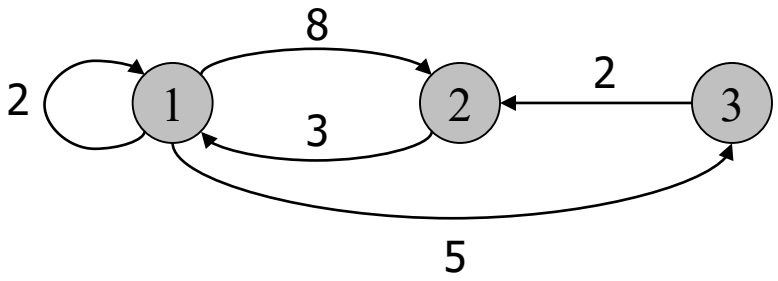
Ou seja:

A[1,2] = *min*(A[1,2],
A[1,1] + A[1,2])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

u = 1, v = 2, k = 1

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



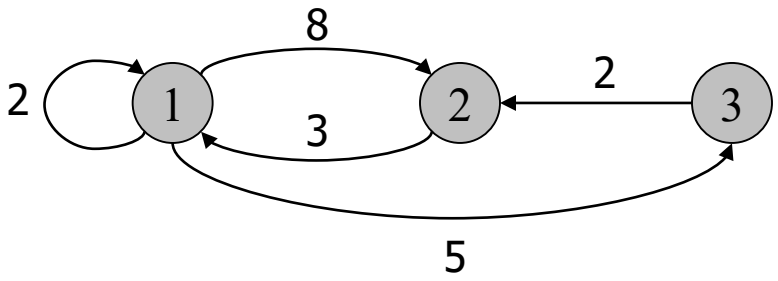
Ou seja:

A[1,3] = *min*(A[1,3],
A[1,1] + A[1,3])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

u = 1, v = 3, k = 1

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



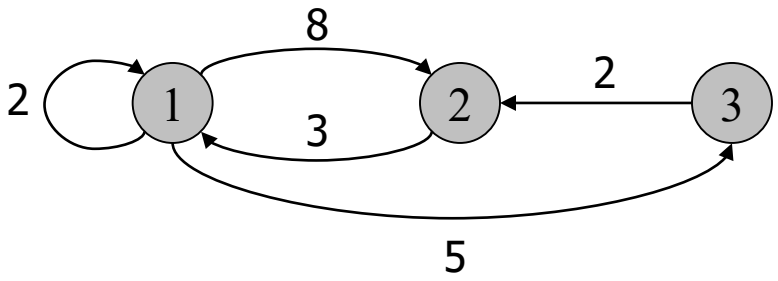
Ou seja:

A[2,1] = *min(A[2,1]*,
A[2,1] + A[1,1])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

u = 2, v = 1, k = 1

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



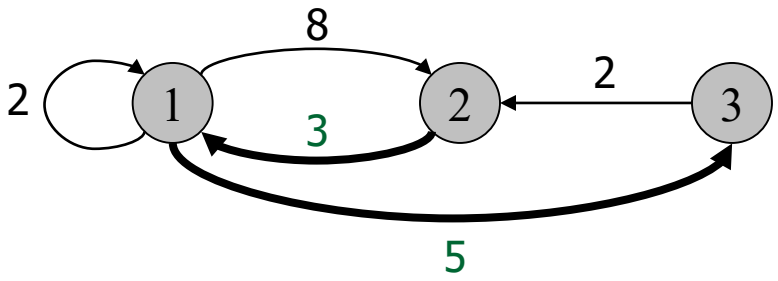
Ou seja:

A[2,2] = *min*(A[2,2], A[2,1] + A[1,2])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

u = 2, v = 2, k = 1

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



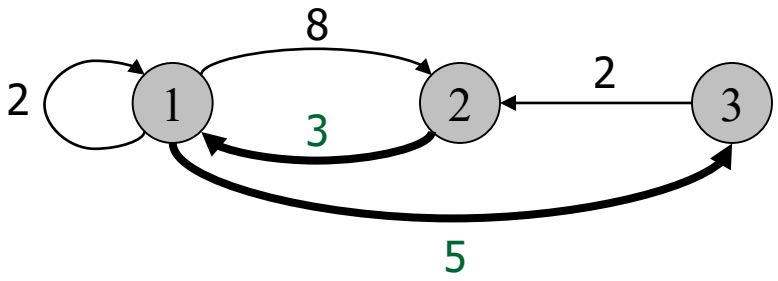
Ou seja:

A[2,3] = *min*(A[2,3],
A[2,1] + A[1,3])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

u = 2, v = 3, k = 1

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



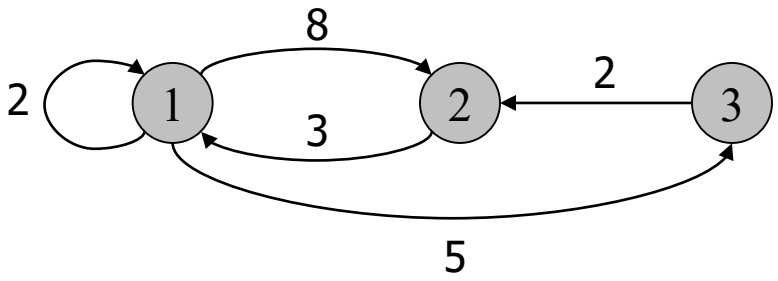
Ou seja:

A[2,3] = *min*(A[2,3],
A[2,1] + A[1,3])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

u = 2, v = 3, k = 1

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



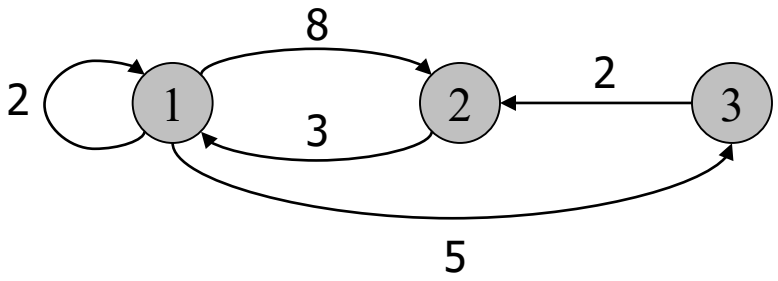
Ou seja:

A[3,1] = *min*(A[3,1],
A[3,1] + A[1,1])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

u = 3, v = 1, k = 1

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



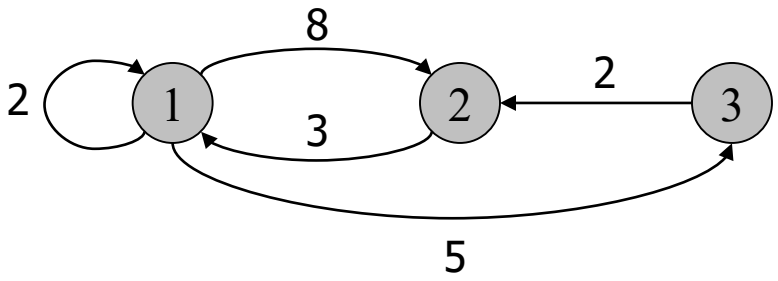
Ou seja:

A[3,2] = *min*(A[3,2],
A[3,1] + A[1,2])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

u = 3, v = 2, k = 1

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



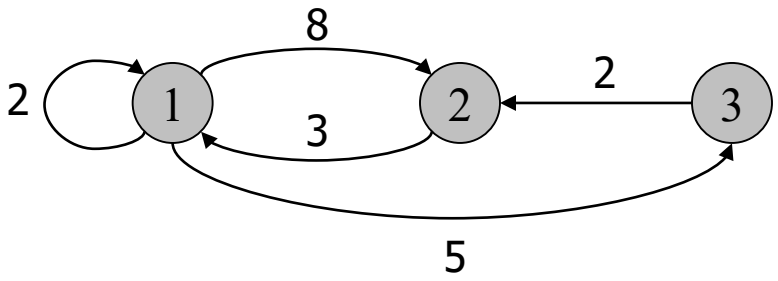
Ou seja:

A[3,3] = *min*(A[3,3],
A[3,1] + A[1,3])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

u = 3, v = 3, k = 1

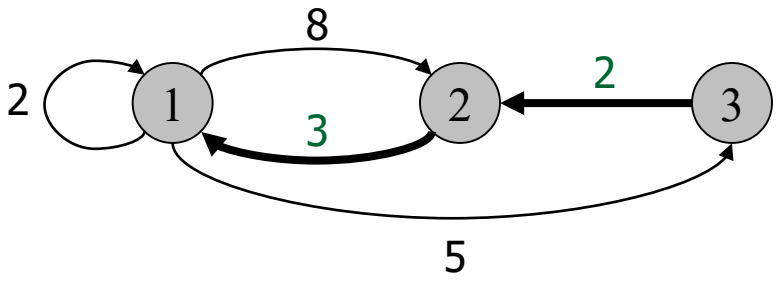
Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

- Ao final da iteração *k=1*, tem-se todos os caminhos mais curtos entre *v* e *w* que podem passar pelo vértice 1
- O processo se repete para *k = 2* e *k = 3*

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



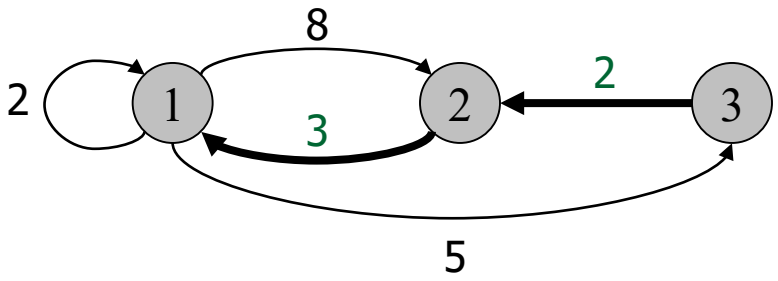
...

A[3,1] = *min*(A[3,1],
A[3,2] + A[2,1])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	∞	2	0

k = 2

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



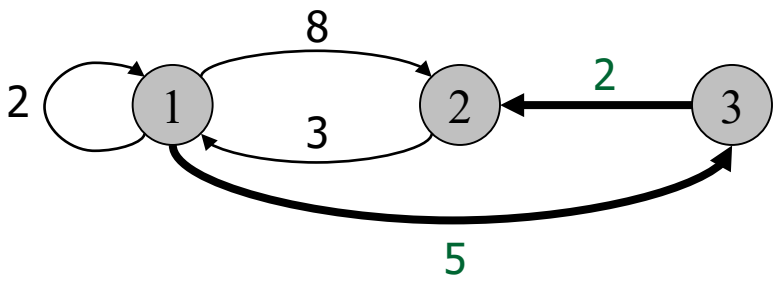
...

A[3,1] = *min*(A[3,1],
A[3,2] + A[2,1])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	5	2	0

k = 2

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



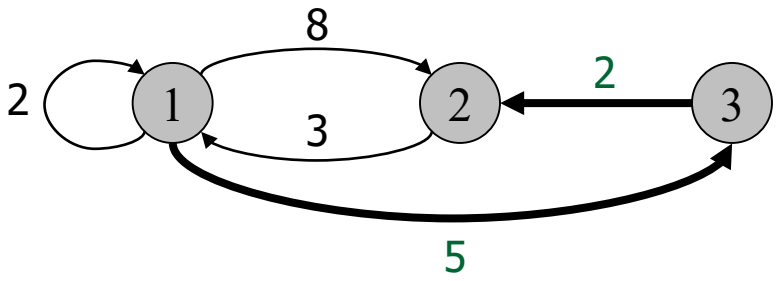
...

A[1,2] = *min*(A[1,2],
A[1,3] + A[3,2])

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	5	2	0

k = 3

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall



...

A[1,2] = *min*(A[1,2],
A[1,3] + A[3,2])

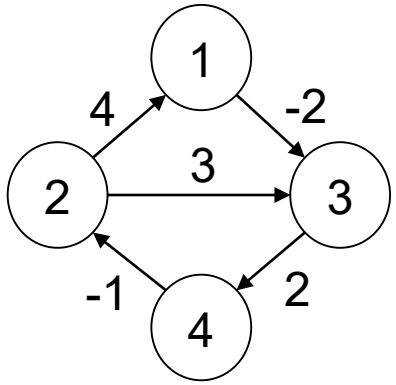
	1	2	3
1	0	7	5
2	3	0	8
3	5	2	0

k = 3

Exercício

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall

- Aplique o algoritmo de Floyd-Warshall no grafo abaixo



Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall

```
procedimento Floyd-Warshall (Grafo G, matriz A)
variáveis
   u,v,k: vertices;

início
   para u=1 até NumVertices faça
        para v=1 até NumVertices faça
               se u = v então
                      A[u,v]= 0;
               senão A[u,v]= w(u,v); // peso aresta (u,v)

   para k=1 até NumVertices faça
        para u=1 até NumVertices faça
               para v=1 até NumVertices faça
                      se A[u,k]+A[k,v] < A[u,v] então
                             A[u,v]= A[u,k] + A[k,v];

fim;
```

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall

- Implementar método de Floyd-Warshall

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall

- Complexidade: ?

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall

- Complexidade: $O(|V|^3)$
  - Por que?

Caminhos Mais Curtos de Todos os Pares: Algoritmo de Floyd-Warshall

- Esse algoritmo adota qual paradigma de projeto de algoritmos?

Atenção

- Comparação entre algoritmos estudados

Método	Vértices	Pesos	Ciclos	Complexidade
Dijkstra	Origem única	Positivos	Sim	O(|A| log|V|)
Bellman-Ford	Origem única	Positivos e negativos	Sim, incluindo negativos	O(|A||V|)
Ordenação topológica	Origem única	Positivos e negativos	Não	O(|A|+|V|)
Floyd-Warshall	Todos os pares	Positivos e negativos	Sim, incluindo negativos	$O(\|V\|^3)$

Outros algoritmos

- Há outras alternativas para caminhos mais curtos
  - Vimos algumas das principais

- Para os curiosos, estudar...
  - Algoritmo de Warshall (anterior a Floyd-Warshall) para existência de caminhos
  - Algoritmo de Johnson (todos os pares, para grafos esparsos)