Lista 12
Álgebra 1 para licenciatura
MAT0120

Entrega: 30/06/2020

Os exercícios devem ser entregues até a data limite (30/06/2020).

Exercício 1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ com $\partial f = 2$ ou $\partial f = 3$. Mostre que f é redutível se e somente se f tem uma raiz.*

Exercício 2. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo finito com k elementos:*

(a) Quantos polinômios mônicos existem de grau 2?

(b) Quantos polinômios irredutíveis de grau 2 existem?

Exercício 3. *Sejam f(x) e g(x) em $\mathbb{K}[x]$, $\mathbb{K}$ corpo não nulo. Mostre que mdc $(f(x),\ g(x))$ é o polinômio mônico de maior grau que divide f(x) e g(x).*

Definição 1. *Seja A um anel comutativo qualquer. (**Exemplo:** $\mathbb{K}[x]$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Um subconjunto $I \subset A$, chama-se ideal de I se e somente se vale:*

1. $0 \in I$
2. $\forall f, g\ (f, g \in I) \Rightarrow f + g \in I$;
3. $\forall f, g\ (f \in I,\ g \in A) \Rightarrow fg \in I$.

Exercício 4.

i. *Seja $f \in A$, mostre que $\langle f \rangle = \{a.f : a \in A\}$ é um ideal principal gerado por f;*

ii. *Sejam $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset A$, mostre que $I = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle = \{a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n\}$ é um ideal de A. Diz-se que I é um ideal gerado por $\{f_1, \cdots, f_n\}$;*

iii. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, mostre que todo ideal de $\mathbb{K}[x]$ é principal;*

iv. *Mostre que um anel comutativo A é um corpo se e somente se os únicos ideais de A são $\{0\}$ e A (chamados ideais triviais).*

Exercício 5. *Seja I um ideal em um anel A. Defina em A a seguinte relação, $\alpha \sim \beta$ se e somente se $\alpha - \beta \in I$.*

1. *Mostre que $\sim$ é relação de equivalência;*
2. *Seja $x \in A$, mostre que a classe de equivalência de x é $x + I = \{x + i : i \in I\}$. Denotamos a classe de equivalência de x por $\overline{x}$.*
3. *Seja $I \subsetneq A$ e A/I o conjunto das classes de equivalência, defina:*
   - *i.* $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$
   - *ii.* $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$

Mostre que A/I é um anel onde $0 = \overline{0} = I$ e $1 = 1 + I = I$.

Exercício 6. *Seja $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, onde $\mathbb{K}[x]$ é um corpo, um polinômio não constante e irredutível e $\langle p(x) \rangle = I$.*

(a) Mostre que $\mathbb{K}[x]/I$ é um corpo;

(b) Mostre que $\mathbb{K}[x]/I$ é um espaço vetorial;

(c) Mostre que, dado um corpo finito com k elementos, sempre existe um corpo com k^2 elementos.

(Sugestão: Use os exercícios 2 e 5 e as partes a e b)

Exercício 7. *Seja p um primo positivo, prove que $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$*

Exercício 8. *Um corpo K chama-se algebricamente fechado se todo polinômio de grau maior ou igual 1, tem uma raiz. Prove que K é algebricamente fechado se e somente se todo polinômio irredutível, não constante, tem grau 1.*