Valores extremos, Vértice, Eixo de simetria, Imagem e Gráfico

Valores extremos: Máximo e Mínimo

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Temos a forma canônica

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Deste modo,

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Teorema

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ *uma função quadrática. Então* $f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se e somente se* $a > 0$. *Neste caso, dizemos que* $-\frac{b}{2a}$ *é o ponto de mínimo de* f *e que* $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ *é o valor mínimo de* f.

Demosntração:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a > 0.$$

Teorema

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Então $f(x) \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se e somente se $a < 0$.

Neste caso, dizemos que $-\frac{b}{2a}$ é o ponto de máximo de f e que $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo de f.

Demosntração:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

Exemplo

Seja $f(x) = x^2 - 7x + 2$. *Encontre o ponto de mínimo e o valor de mínimo de* f.

solução: $a = 1$, $b = -7$ e $c = 2$. Como $a = 1 > 0$ então f admite ponto de mínimo, e o ponto de mínimo é $-\frac{b}{2a} = \frac{7}{2}$ e o valor de mínimo é $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{41}{4}$.

Exemplo

Seja $f(x) = -3x^2 + 5x$. *Encontre o ponto de máximo e o valor de máximo de* f.

solução: $a = -3$, $b = 5$ e $c = 0$. Como $a = -3 < 0$ então f admite ponto de máximo, e o ponto de máximo é $-\frac{b}{2a} = \frac{5}{6}$ e o valor de máximo é $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{25}{12}$.

Imagem

Teorema

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática.

- *Se $a > 0$ então $Im(f) = \{y \in \mathbb{R};\ y \geq \frac{-\Delta}{4a}\} = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$.*
- *Se $a < 0$ então $Im(f) = \{y \in \mathbb{R};\ y \leq \frac{-\Delta}{4a}\} = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$.*

Exemplo

Seja $f(x) = x^2 - 7x + 2$. *Encontre a imagem de* f.

solução: $a = 1$, $b = -7$ e $c = 2$. Como $a = 1 > 0$ então a imagem de f é o intervalo

$$[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty) = [-\frac{41}{4}, +\infty)$$

Exemplo

Seja $f(x) = -3x^2 + 5x$. *Encontre a imagem de* f.

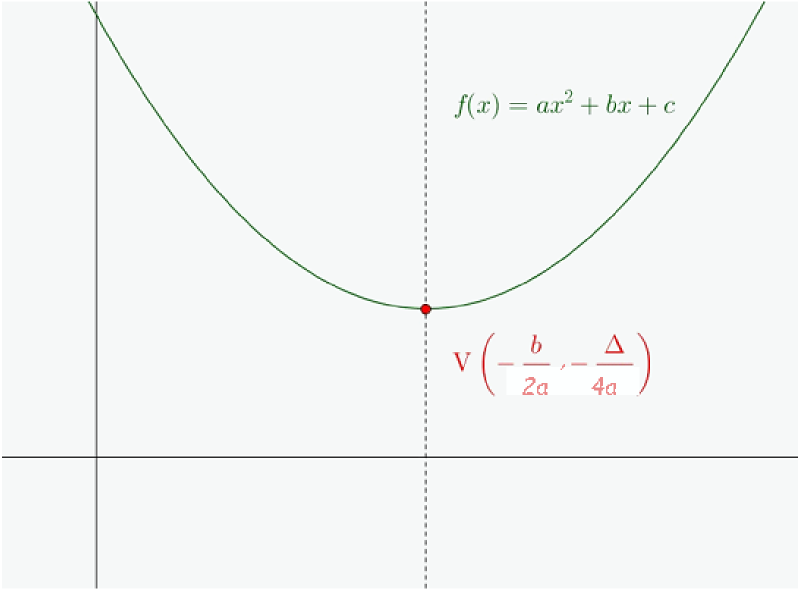
solução: $a = -3$, $b = 5$ e $c = 0$. Como $a = -3 < 0$ então a imagem de f é o intervalo

$$(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}] = (-\infty, \frac{25}{12}]$$

Vértice e Eixo de simetria

• O ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o ponto do gráfico da função quadrática f chamado o vértice da parábola.

• Os pontos da reta perpendicular ao eixo dos x que passa pelo vértice da parábola satisfaz a equação $x = -\frac{b}{2a}$ e é chamado o eixo de simetria da parábola.


$f(x) = ax^2 + bx + c$
$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Gráfico

Para fazermos o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ devemos nos lembrar que:

• O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = -\dfrac{b}{2a}$ perpendicular ao eixo dos x.

• Se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima. Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

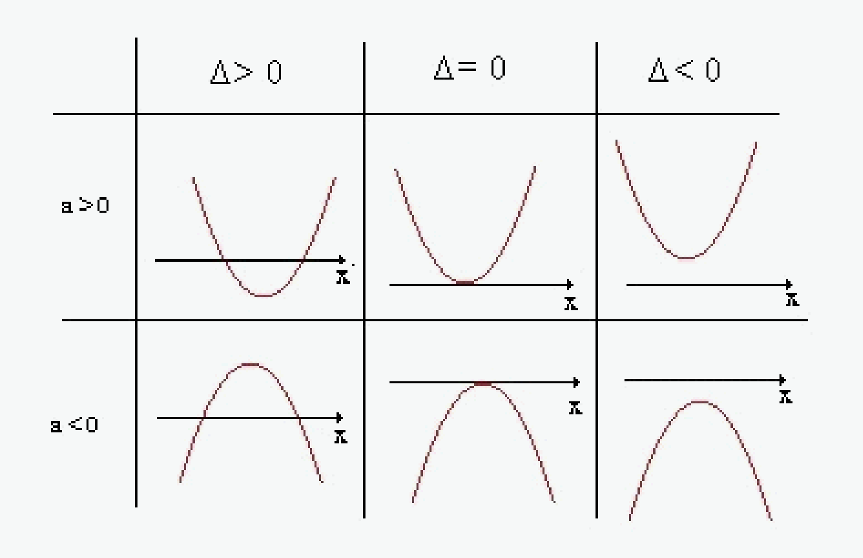
• Se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos:

$$(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0) \quad \text{e} \quad (\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$$

• Se $\Delta = 0$, a parábola tangência o eixo dos x no ponto $(-\frac{b}{2a}, 0)$.

• Se $\Delta < 0$, a parábola não intercepta o eixo dos x.

• Vértice da parábola é o ponto $(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a})$, que é um máximo se $a < 0$ ou um mínimo se $a > 0$.


Δ> 0
Δ= 0
Δ< 0
a >0
a <0
x
x
x
x
x
x