Função quadrática ou Função do segundo grau

Função quadrática

Definição

Sejam a, b e c números reais e $a \neq 0$. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é chamada uma função quadrática ou função do segundo grau.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2 - 7x + 2$. Temos que f é uma função quadrática com $a = 1$, $b = -7$ e $c = 2$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *com* $f(x) = -3x^2 + 5x + 1$. *Temos* f *é uma função quadrática com* $a = -3$, $b = 5$ *e* $c = 1$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *com* $f(x) = 6x^2$. *Temos* f *é uma função quadrática com* $a = 6$, $b = 0$ *e* $c = 0$.

Gráfico e concavidade

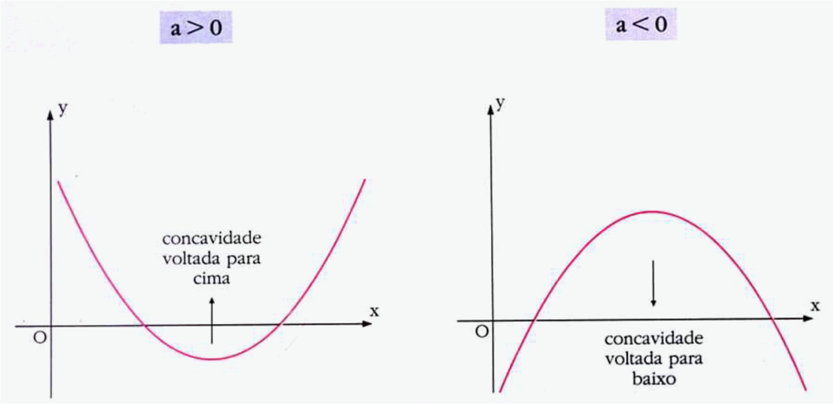
Teorema

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ *uma função quadrática.*

O gráfico da função quadrática f *é um parábola.*

A parábola que representa a função quadrática f *tem concavidade para cima ou para baixo:*

- *se* $a > 0$, *a concavidade da parábola está voltada para cima.*
- *se* $a < 0$, *a concavidade da parábola está voltada para baixo.*


a > 0
y
concavidade
voltada para
cima
x
O
a < 0
y
x
O
concavidade
voltada para
baixo

Exemplo

Determine a concavidade de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 7x + 2$.

solução: Como $a = 1 > 0$ temos que a concavidade de f é voltada para cima.

Exemplo

Determine a concavidade de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 + 5x + 1$.

solução: Como $a = -3 < 0$ temos que a concavidade de f é voltada para baixo.

Forma canônica e raízes

Suponha $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Temos

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x \pm \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \end{aligned}$$

Chamando de $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante) temos

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Definição

As raízes ou zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ *são os valores* $x \in \mathbb{R}$ *tais que* $f(x) = 0$*, ou seja,* $ax^2 + bx + c = 0$*.*

Pela forma canônica, temos

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

agora se $\Delta \geq 0$ temos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Portanto:

Teorema

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática.

- *Se $\Delta > 0$, a equação quadrática tem duas raízes distintas, que são:*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- *Se $\Delta = 0$, a equação quadrática tem duas raízes iguais, que são*

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

- *Se $\Delta < 0$, a equação quadrática não tem raízes reais.*

Exemplo

Determine as raízes da função $f(x) = -x^2 + 3x - 2.$

solução: $a = -1 < 0$, $b = 3$, $c = -2$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 1 > 0$.
Portanto as raízes de f são

$$x_1 = \frac{-3+1}{-2} = 1, \quad x_2 = \frac{-3-1}{-2} = 2$$

Exemplo

Determine as raízes da função $f(x) = x^2 - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}$.

solução: $a = 1$, $b = -\sqrt{2}$, $c = \frac{1}{2}$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Portanto as raízes de f são

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemplo

Mostre que a função $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$ *não admite raízes reais.*

solução: $a = -2$, $b = 4$, $c = 3$ e $\Delta = b^2 - 4ac = -8 < 0$.
Portanto f não admite raízes reais.

Exemplo

Determine os valores de m para que o gráfico da função quadrática $f(x) = 9x^2 - 6x + 2m$:

1) intercepte o eixo dos x em dois pontos distintos, isto é, f tenha duas raízes distintas,

2) tangencie o eixo dos x, isto é, f tenha uma única raiz,

3) não intercepte o eixo dos x, isto é, f não tenha raizes reais.

solução:

$a = 9$, $b = -6$, $c = 2m$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 72m$.

1) f terá duas raízes distintas se $\Delta = 36 - 72m > 0$ o que implica $m < \frac{1}{2}$.

2) f terá uma única raiz se $\Delta = 36 - 72m = 0$ o que implica $m = \frac{1}{2}$.

3) f não terá raízes se $\Delta = 36 - 72m < 0$ o que implica $m > \frac{1}{2}$.