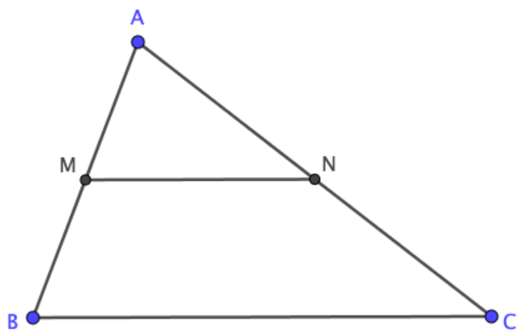
IME-USP
MAT0105 – Geometria Analítica – 1/2020
Turmas: T21 (IF) e T42 (IME)
Profa. Ana Paula Jahn

EXERCÍCIOS PARA ESTUDOS – AULA DE 12/06/2020

Prove que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida deste lado.



Hipóteses:
Triângulo ABC qualquer
M ponto médio do lado $\overline{AB}$
N ponto médio do lado $\overline{AC}$

Conclusão:
$\overline{MN}$ // $\overline{BC}$ e $MN = \frac{1}{2}BC$

Vetorialmente, tem-se:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} \text{ (Hip.)}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$$

Pela definição de multiplicação por escalar, tem-se: $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$ e $MN = \frac{1}{2}BC$.

Obs: Podemos também escrever:

$$2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}$$

$$2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$$

Somando-se membro a membro:

$$2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

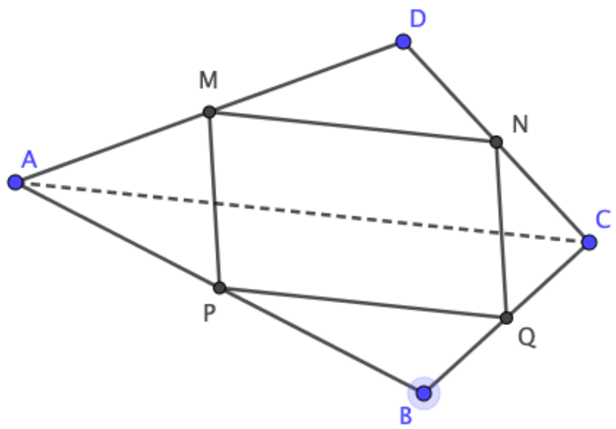
$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$$

Mais algumas propriedades geométricas que podem ser provadas usando vetores:

1) Prove que se os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um segundo quadrilátero, este é um paralelogramo.

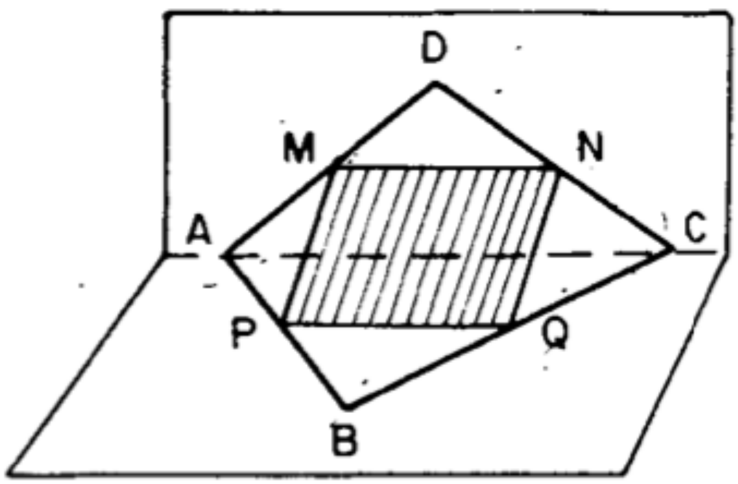
   (*Dica*: use o teorema provado no item anterior.)

   Resolução na **p. 21 do Livro 2** (Boulos & Camargo)



$ABCD$ quadrilátero qualquer
M, N, Q, P pontos médios dos lados de $ABCD$; $\overline{AC}$ diagonal de $ABCD$

Basta provar que: $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}} = \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$



Obs: o "quadrilátero" pode ser reverso.

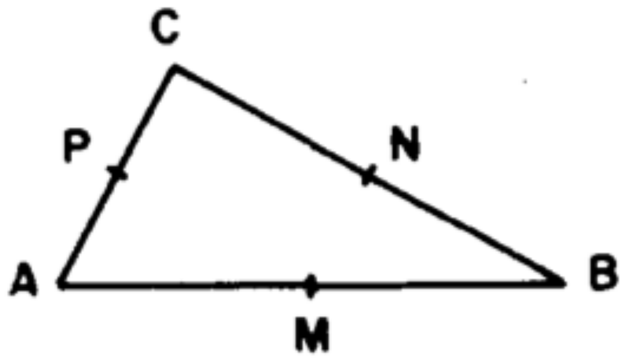
2) Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

   (Dica: Seja *M* o ponto médio de $\overline{AC}$, prove que *M* é também ponto médio de $\overline{BD}$.)

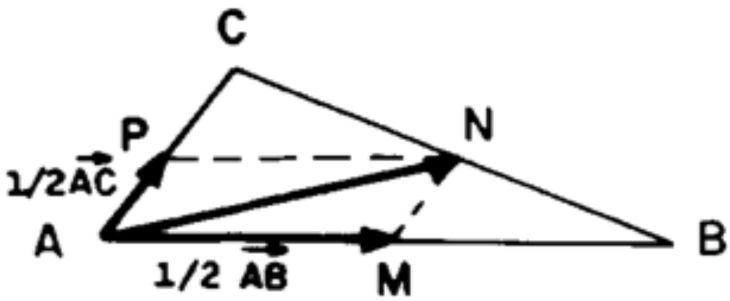
   Resolução na **p. 20 do Livro 2** (Boulos & Camargo)

3) A) Num triângulo *ABC*, sejam *M*, *N*, *P*, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Exprima $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

   A) Resolução na **p. 18-19 do Livro 2** (Boulos & Camargo)



$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$



Não vá concluir que a medida de $\overrightarrow{AN}$ é a semi-soma das medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Sendo A, B, C vértices de um triângulo, vale: $\|\overrightarrow{AN}\| < \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|$.

Por quê?

B) Mostre que: $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{O}$

$$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\vec{O}$$

Um resultado importante...

Sejam $\vec{u}=(x,y)$ e $\vec{v}=(x',y')$ dois vetores não nulos.

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$$

Produto Escalar

Sejam $\vec{u}=(x,y)$ e $\vec{v}=(x',y')$ dois vetores quaisquer.

O número real $xx'+yy'$ é chamado **produto escalar** de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Notação: $\langle\vec{u},\ \vec{v}\rangle$ ou $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Exercícios

1) Dados $A = (1, 3)$ e $B = (9, 4)$, determinar o ponto *P* do eixo *OX* tal que $A\hat{P}B \ = 90^o$.

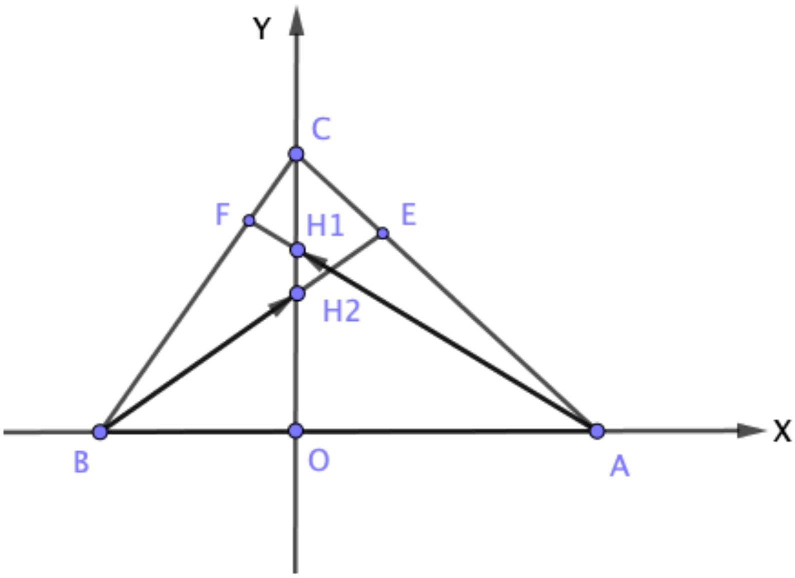
$$P \in OX, \ \ P = (x, 0)$$
$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = A - P = (1, 3) - (x, 0)$$
$$= (1 - x, 3)$$
$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = B - P = (9, 4) - (x, 0)$$
$$= (9 - x, 4)$$

Se $A\hat{P}B \ = 90^o$ então $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{PA}, \ \overrightarrow{PB} \rangle = 0$

$$(1 - x)(9 - x) + 3.4 = 0$$
$$9 - x - 9x + x^2 + 12 = 0$$
$$x^2 - 10x + 21 = 0$$
$$x = 3 \text{ ou } x = 7$$

Resposta: $P = (3, 0)$ ou $P' = (7, 0)$

2) Prove que as três alturas de um triângulo se interceptam em um único ponto.



$$A = (a, 0)$$
$$B = (b, 0)$$
$$C = (0, c)$$
$$H_1 = (0,\ h_1)$$
$$H_2 = (0,\ h_2)$$

Vetorialmente, tem-se:

$\overrightarrow{AH_1} = (-a,\ h_1)$ e
$\overrightarrow{BC} = (-b, c)$
$\overrightarrow{AH_1} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$
$\langle \overrightarrow{AH_1}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0$
$ab + h_1 c = 0$
$h_1 = -\dfrac{ab}{c}$

$\overrightarrow{BH_2} = (-b,\ h_2)$ e
$\overrightarrow{AC} = (-a, c)$
$\overrightarrow{BH_2} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$
$\langle \overrightarrow{BH_2}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$
$ab + h_2 c = 0$
$h_2 = -\dfrac{ab}{c}$

Portanto, $H_1 = H_2 = \left(0, -\frac{ab}{c}\right)$

Logo, as três alturas se interceptam num mesmo ponto.