Monitoria: ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}_p$)

Ex 6: (Teo. 6 - pág 292 - Gacy)

Se A é um anel de integridade, então os únicos elementos inversíveis de $A[x]$ são os elementos inversíveis de A.

—//—

Ex 3: (Não está na lista!!)

(a) Dem:

Como $g \mid f \Rightarrow \exists\, h \in \mathbb{K}[x]$ tal que $f = g h$.

Assim, $gr(f) = gr(g) + gr(h)$. Como f e g são não nulos, $gr(f), gr(g) \geq 0$. Além disso h é não nulo e $gr(h) \geq 0$. Assim,

$gr(g) \leq gr(f)$, c.c se $gr(g) > gr(f) \Rightarrow$

$gr(h) + gr(g) > gr(f)$. $\blacksquare$

(b) Dem:

Como $g | f \Rightarrow \exists\, h \in \mathbb{K}[x]$ tal que $f = gh$

Analogamente, como $f | g \Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{K}[x]$ tal que $g = q \cdot f$. Assim,

$$f = gh = (q \cdot h) \cdot f \Rightarrow \cancel{gr(f)} = gr(q) + gr(h) + \cancel{gr(f)} \Rightarrow gr(q) + gr(h) = 0 \Rightarrow$$

$gr(q) = gr(h) = 0$. Logo, q e h são constantes não nulas e, portanto, f e g são associados!

$\blacksquare$

Ex 14:

(A - anel)

Definição: Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x]$. Um polinômio $d \in \mathbb{K}[x]$ diz-se um máximo divisor comum de f e g se

(i) $d \mid f$ e $d \mid g$

(ii) Se $d' \mid f$ e $d' \mid g \Rightarrow d' \mid d$.

Exercício 15:

Observe que pelo Alg. de Divisão, existem $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tais que

$$f = g\,q + r, \quad 0 \leq gr(r) < gr(g)$$

Vamos mostrar que o conj. de máximos divisores comuns de f, g é igual ao conj. de máximos divisores comuns de g e r.

$(\text{mdc}(f,g) = \text{mdc}(g,r) \to$ igualdade de conjuntos$)$

Seja d um max. div. comum de f e g
então pelo ex 13, $d | g$ e $d | r$. Assim,
para provar que d é um max. div. comum
de g e r precisamos apenas verificar
(ii). Para tanto, seja d' um divisor
de g e r (ie, $d' | g$ e $d' | r$). Assim,
$d' | g \cdot q + r = f \Rightarrow d' | g$ e $d' | f$. Como d é
max div comum de f e g, $d' | d$. Logo d é um

max. div. comum de g e r ($mdc(f,g) \subseteq$
$mdc(g,r)$)

Analogamente, provamos que

"$mdc(g,r) \subseteq mdc(f,g)$"

(Exercício para vocês)

(a) $f = x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 3$ $\quad \mathbb{K}[x] \downarrow \mathbb{Q}$

$g = x^3 + x^2 - 4x + 2$

<u>obs</u>: Se α é uma raiz (zero) de $f \in F[x]$, $\operatorname{car} F = 0$ então $x - \alpha \mid f$.

Dem: Pelo alg. da div.

$$f = \underbrace{(x-\alpha)}\, q(x) + r(x), \quad 0 \leq gr(r) < 1$$

Então, $gr(r) = 0$. Assim, $r(\alpha) = 0 \Rightarrow r = 0$.

$$g = x^3 + x^2 - 4x + 2 = (x-1)(x^2+2x-2)$$

obs: Def: Um pol. não constante em $\mathbb{K}[x]$ é irredutível se não tem divisores próprios

(*) Vejam que f é irredutível se não pode ser escrito como $g \cdot h$ tal que

$0 < gr(g), gr(h) < gr(f)$

(ex 22 (a))

Vamos continuar a discussão do ex 17 na próxima monitoria

"Tarefa": leiam as páginas especificadas no moodle do livro "A first course in Abstract Algebra" - John Fraleigh.