IME-USP
MAT0105 – Geometria Analítica – 1/2020
Turmas: T21 (IF) e T42 (IME)
Profa. Ana Paula Jahn

EXERCÍCIOS PARA ESTUDOS – AULA DE 09/06/2020

1) *ABCD* é paralelogramo com *A*=(1, 2), *B*=(6, 4), *C*=(8, 7). Determinar as coordenadas do vértice *D*.

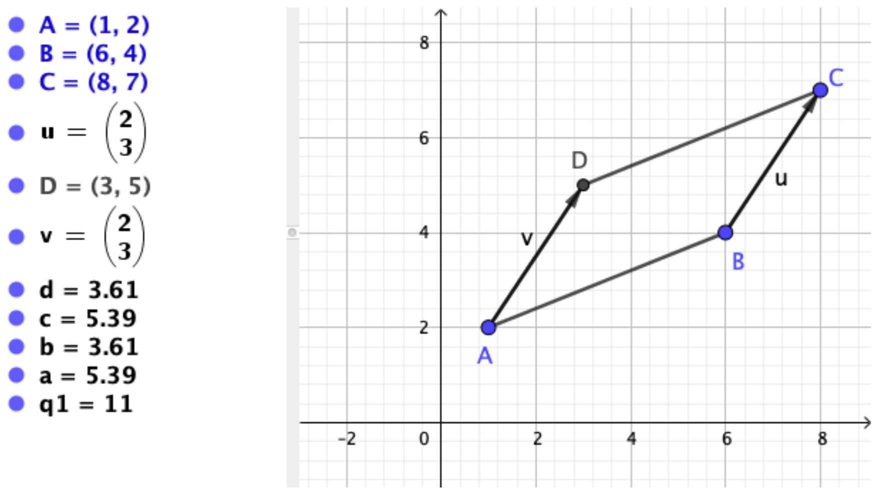
Se *ABCD* é paralelogramo, então $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (ou $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).
Logo, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\\
&\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\\
&D - A = C - B\\
&D = A + (C - B)\\
&D = (1,2) + (2,3)\\
&D = (3,5)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\\
&\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\\
&D - A = C - B\\
&(x-1, y-2) = (2,3)\\
&x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3\\
&y - 2 = 3 \Leftrightarrow y = 5\\
&\therefore D = (3,5)
\end{aligned}$$

(Note: *D* é "soma de *A* com $\overrightarrow{BC}$", ou ainda, é a translação de *A* segundo o vetor $\overrightarrow{BC}$.)



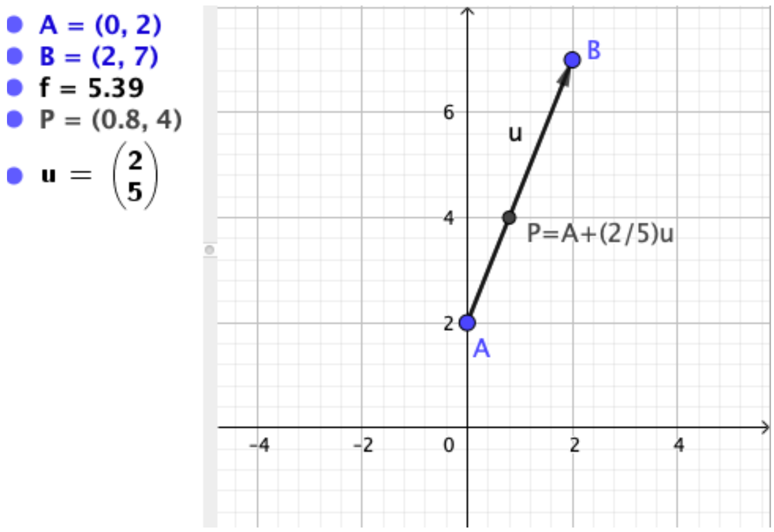
2) Sejam os pontos $A = (0, 2)$ e $B = (2, 7)$. Encontrar P no segmento de reta $\overline{AB}$, tal que: $AP/PB = 2/3$.

$P \in \overline{AB}$ e $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$

(Note que se trata da divisão de um segmento na razão 2/3, isto é, 2 partes para $\overline{AP}$ e 3 partes para $\overline{PB}$ por isso divide-se $\overline{AB}$ em 5 partes iguais.)

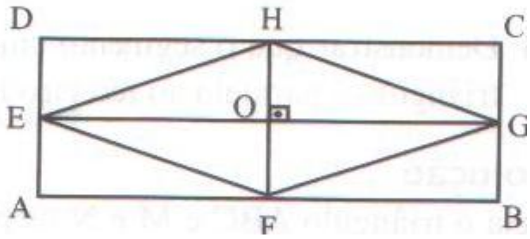
Com vetores:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$P - A = \frac{2}{5}\,(B - A)$$
$$P = A + \frac{2}{5}\,(B - A)$$
$$P = (0, 2) + \frac{2}{5}\,(2, 5)$$
$$P = \left(\frac{4}{5}, 4\right)$$



3) Com base na figura abaixo, determinar os vetores expressando-os com origem no ponto *A*.

ABCD é retângulo,
EFGH é losango e *O* é a intersecção das diagonais desse losango.



a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH}$
b) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG}$
c) $2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF}$
d) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$
e) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{BG}$
f) $2\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OC}$
g) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EH}$
h) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$
i) $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{HO}$
j) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AO}$

a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AC}$

c) $2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}$

e) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AO}$

f) $2\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

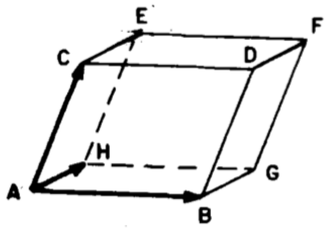
g) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AH}$

h) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AD}$

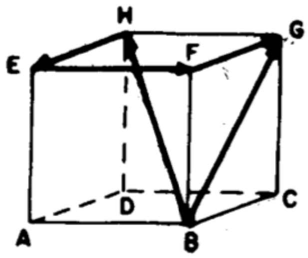
i) $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$

j) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO} = 2\,\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$

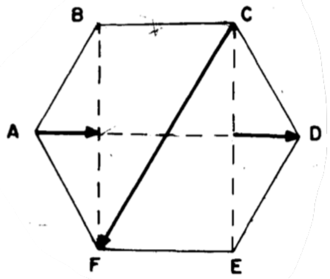
4) Determinar a soma dos vetores indicados (em negrito) na figura, nos casos:



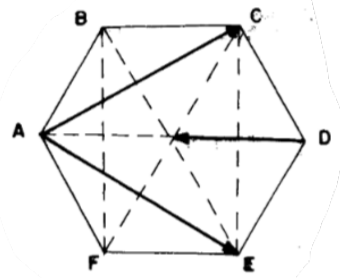
(paralelepípedo)



(cubo)



(hexágono regular)



(hexágono regular)

a) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\right)+\overrightarrow{AC} = = \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF}$

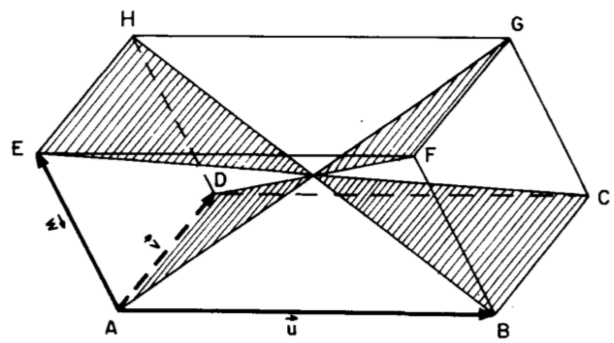
b) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BG}+\vec{O} =$

$= \overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BG} = 2\,\overrightarrow{BG}$

c) $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BF}$

d) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right) = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}$

5) Na figura abaixo está representado um paralelepípedo *ABCDEFGH*.
Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, exprima $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{DF}$ em função de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



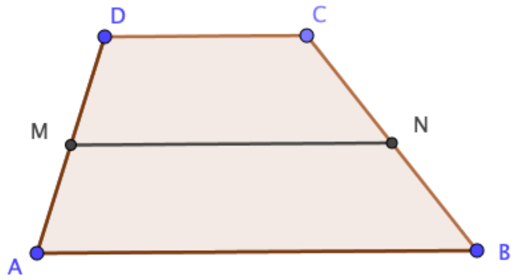
a) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
outra solução:
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b) $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}$
outra solução:
$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AE} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

c) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = -\vec{w} - \vec{v} + \vec{u}$
outra solução:
$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AE} + \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

c) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

6) Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases.



Sejam *ABCD* um trapézio (H1) e *M* e *N* os pontos médios dos lados não paralelos (H2). Vetorialmente, tem-se:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CB} \quad \text{(H2)}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\,\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$$

E como $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ (<u>H1</u>), temos:

i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ e, portanto,

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) \parallel \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ (def. multiplicação por escalar)

ii) $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{DC}\right\|$, logo

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right\| = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{DC}\right\|\right)$$

Com isso, tem-se: $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ e $MN = \frac{1}{2}(AB + DC)$.

Outra solução:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{CN}$

Então: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2(\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{CN})$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$

Portanto, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$ ou $\overrightarrow{MN} = \frac{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)}{2}$

(Concluir analogamente, com H1 e def. de multiplicação por escalar.)