MAT 1513 - LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA - 1O SEMESTRE 2020

QUARTA LISTA DE EXERCÍCIOS

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PARA ENTREGAR

(4) Explique por que:

(a) $\cos(\text{arcsen}x) \geq 0$, para todo $x \in [-1, 1]$.

Solução: A função arco-seno possui como domínio o intervalo $[-1, 1]$ e como imagem o intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Isto é: $\text{arcsen}x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, para todo $x \in [-1, 1]$.

A função cosseno, quando restrita ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ é sempre positiva, já que para calcular o cosseno, fazemos projeções no eixo Ox. Ou seja, $\cos(y) \geq 0$, para todo $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Consequentemente: $\cos(\text{arcsen}x) \geq 0$, para todo $x \in [-1, 1]$.

(b) $\text{sen}(\text{arccos}x) \geq 0$, para todo $x \in [-1, 1]$.

Solução: A função arco-cosseno possui como domínio o intervalo $[-1, 1]$ e como imagem o intervalo $[0, \pi]$.

Isto é: $\text{arccos}x \in [0, \pi]$, para todo $x \in [-1, 1]$.

A função seno, quando restrita ao intervalo $[0, \pi]$ é sempre positiva, já que para calcular o seno, fazemos projeções no eixo Oy. Ou seja, $\text{sen}(y) \geq 0$, para todo $y \in [0, \pi]$.

Consequentemente: $\text{sen}(\text{arccos}x) \geq 0$, para todo $x \in [-1, 1]$.

(5) Prove que

(a) $\cos(\text{arcsen}x) = \sqrt{1-x^2}$, para todo $x \in [-1,1]$.

Solução: Sabemos da relação fundamental que $\cos^2(y) + \text{sen}^2(y) = 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

Em particular, para $y = \text{arcsen}x$, temos que $\cos^2(\text{arcsen}x) + \text{sen}^2(\text{arcsen}x) = 1$.

Logo $\cos^2(\text{arcsen}x) = 1 - \text{sen}^2(\text{arcsen}x)$.

Aplicando raiz quadrada: $\cos(\text{arcsen}x) = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{arcsen}x)}$.

Usando que $\text{sen}(\text{arcsen}x) = x$, temos que $\cos(\text{arcsen}x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.

E finalmente, como foi provado no 4)a) que os valores $\cos(\text{arcsen}x)$ são sempre positivos, podemos descartar a raiz negativa, concluindo finalmente que:

$$\cos(\text{arcsen}x) = \sqrt{1-x^2}.$$

(b) $\text{sen}(\text{arccos}x) = \sqrt{1-x^2}$, para todo $x \in [-1,1]$.

Solução: Sabemos da relação fundamental que $\cos^2(y) + \text{sen}^2(y) = 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

Em particular, para $y = \text{arccos}x$, temos que $\cos^2(\text{arccos}x) + \text{sen}^2(\text{arccos}x) = 1$.

Logo $\text{sen}^2(\text{arccos}x) = 1 - \cos^2(\text{arccos}x)$.

Aplicando raiz quadrada: $\text{sen}(\text{arccos}x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\text{arccos}x)}$.

Usando que $\cos(\text{arccos}x) = x$, temos que $\text{sen}(\text{arccos}x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.

E finalmente, como foi provado no 4)b) que os valores $\text{sen}(\text{arccos}x)$ são sempre positivos, podemos descartar a raiz negativa, concluindo finalmente que:

$$\text{sen}(\text{arccos}x) = \sqrt{1-x^2}.$$

(c) $\text{arcsen}x + \text{arccos}x = \frac{\pi}{2}$, para todo $x \in [-1, 1]$.

Solução: Sejam $\alpha = \text{arcsen}x$ e $\beta = \text{arccos}x$. Então $\text{sen}(\alpha) = x$ e $\cos(\beta) = x$.

Por outro lado, sabemos que $\text{sen}(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$, para qualquer θ.

Portanto: $\cos(\beta) = \text{sen}(\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Para concluir que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (isto é, *cancelar* os cossenos na igualdade acima, precisamos observar o seguinte:

$\beta \in [0, \pi]$, pois $\beta = \text{arccos}x$ e $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, pois $\alpha = \text{arcsen}x$. Disso segue que $\frac{\pi}{2} - \alpha \in [0, \pi]$. Como ambos os arcos β e $\frac{\pi}{2} - \alpha$ pertencem ao intervalo $[0, \pi]$, e o cosseno, nesse intervalo, é uma função injetora, podemos concluir que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, ou seja

$$\text{arcsen}x + \text{arccos}x = \frac{\pi}{2}.$$

(d) $\text{arccos}x + \text{arccos}(-x) = \pi$, para todo $x \in [-1, 1]$.

Solução: Vamos calcular $\text{sen}(\text{arccos}x + \text{arccos}(-x))$. Para isso usamos a fórmula do seno da soma: $\text{sen}(\text{arccos}x + \text{arccos}(-x)) = \text{sen}(\text{arccos}x) \cdot \cos(\text{arccos}(-x))) + \cos(\text{arccos}x) \cdot \text{sen}(\text{arccos}(-x))$. Usando que $\text{sen}(\text{arcsen}x) = x$, que $\cos(\text{arccos}x) = x$, os exercícios 5)a) e 5)b), e obtemos que

$$\text{sen}(\text{arccos}x + \text{arccos}(-x)) = \sqrt{1 - x^2} \cdot (-x) + (x) \cdot \sqrt{1 - (-x)^2} = -x \cdot \sqrt{1 - x^2} + x \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0.$$

Para concluir que $\text{arccos}x + \text{arccos}(-x) = \pi$, temos que observar o seguinte: sejam $\alpha = \text{arccos}x$ e $\beta = \text{arccos}(-x)$. Então $\cos(\alpha) = x$ e $\cos(\beta) = -x$. Como x e $-x$ possuem sinais trocados, se $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, então $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ (ou vice-versa). Logo podemos concluir que $\alpha + \beta \in [0, \pi]$. Se $\text{sen}(\alpha + \beta) = 0$, pode acontecer que $\alpha + \beta = 0$ ou $\alpha + \beta = \pi$, mas note que $\alpha + \beta = 0$ não pode acontecer. Logo temos que $\alpha + \beta = \text{arccos}x + \text{arccos}(-x) = \pi$.

(e) $\text{tg}(\text{arcsen}x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, para todo $x \in]-1,1[$.

Solução: Temos que $\text{tg}(y) = \dfrac{\text{sen}y}{\cos y}$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

Em particular, para $y = \text{arcsen}x$, temos que $\text{tg}(\text{arcsen}x) = \dfrac{\text{sen}(\text{arcsen}x)}{\cos(\text{arcsen}x)}$. Como $\text{sen}(\text{arcsen}x) = x$ e $\cos(\text{arcsen}x) = \sqrt{1-x^2}$ (por 5)a)), temos que

$$\text{tg}(\text{arcsen}x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(6) Determine o domínio das funções:

(a) $f(x) = \arccos(\sqrt{x} - 1)$

Solução: Temos duas condições: $x \geq 0$ (por causa da raiz) e $\sqrt{x} - 1 \in [-1,1]$ (por causa do arco-cosseno).

Daí temos que $x \geq 0$ e $-1 \leq \sqrt{x} - 1 \leq 1$. Somando $+1$ em ambos os lados da desigualdade, obtemos que $0 \leq \sqrt{x} \leq 2$, o que nos leva a $0 \leq x \leq 4$. Portanto o domínio da função f é o intervalo $[0,4]$, ou ainda $\text{dom}f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$.

(b) $g(x) = \sqrt{\pi - \text{arcsen}x}$

Solução: Temos duas condições: $\pi - \text{arcsen}x \geq 0$ (por causa da raiz) e $x \in [-1,1]$ (por causa do arco-seno).

Daí temos que $\text{arcsen}x \leq \pi$. Mas note que $\text{arcsen}x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, para todo $x \in [-1,1]$, e que todos os valores desse intervalo já são menores do que π.

Sendo assim o domínio da função g é igual ao domínio da função arco-seno, que é o intervalo $[-1,1]$, ou ainda $\text{dom}g = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$.