Mat 0130 - Equações Diferenciais I

↳ Prof. Antônio L. Pereira

Aluna: Dilma Lidia P. Pedro Ríos

Nº USP: 2246547

Lista II de EDO, entrega até 04/06/2020

① Use o método dos coeficientes a determinar para encontrar a solução geral das equações:

a) $y'' - y' - 2y = \underbrace{4x^2}_{g(x)}$ } Temos uma EDO, linear, de coeficientes constantes e não homogênea

A solução geral da EDO será a soma da solução particular, às soluções da homogênea.

- Homogênea associada: $y'' - y' - 2y = 0$

↳ equação característica: $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ \text{ou} \\ \alpha_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Logo, as soluções L.I. da homogênea são $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{-x}$ e a solução geral da homogênea é $\boxed{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$.

- Solução particular da EDO (caso 2), onde $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

$$y'' - y' - 2y \Rightarrow \underbrace{2b_2}_{y''} + \underbrace{(-b_1 - 2b_2 x)}_{-y'} + \underbrace{(-2b_0 - 2b_1 x - 2b_2 x^2)}_{-2y} =$$

$$= \underbrace{(2b_2 - b_1 - 2b_0)}_{=0} + \underbrace{(-2b_2 - 2b_1)}_{=0} x + \underbrace{(-2b_2)}_{=4} x^2 = 4x^2$$

Ⓘ Ⓘ Ⓘ (I) (II) ↳ $-2b_2 = 4$

$\boxed{b_2 = -2}$

continua →

(II) $-2k_2 - 2k_1 = 0$

$-2(k_2 + k_1) = 0 \Leftrightarrow k_2 + k_1 = 0 \Leftrightarrow -2 + k_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{k_1 = 2}$

(I) $2k_2 - k_1 - 2k_0 = 0 \Leftrightarrow 2.(-2) - (2) - 2k_0 = 0 \Leftrightarrow -6 - 2k_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{k_0 = -3}$

Logo, uma solução particular da EDO é $y = k_0 + k_1 x + k_2 x^2$, ou seja, $\boxed{y_p = -3 + 2x - 2x^2}$

Então, temos que a solução geral da EDO é:

$\boxed{y = -3 + 2x - 2x^2 + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$ onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias

b) $\underbrace{y'' - y'}_{p=-1} \underbrace{- 2y}_{q=-2} = \underbrace{e^{3x}}_{g(x)}$ { Temos uma EDO, linear, de coeficientes constantes e não homogênea ($g(x) = e^{3x}$, caso 1)

A solução geral da EDO será a soma da solução particular às da homogênea (que neste caso, são as mesmas do item a).

Solução geral da homogênea: $\boxed{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$

Vamos procurar uma solução particular da forma $y = A.e^{ax}$ $A.e^{3x}$

$L[y] = e^{3x} \Leftrightarrow A = \dfrac{1}{\underbrace{3^2}_{\alpha^2} + \underbrace{(-1).3}_{+p\alpha} + \underbrace{(-2)}_{+q}} = \dfrac{1}{9-3-2} = \dfrac{1}{4} \therefore \boxed{A = \frac{1}{4}}$

Então, uma solução particular da EDO é $\boxed{y_p = \frac{1}{4} . e^{3x}}$

Temos, então, que a solução geral é

$\boxed{y = \frac{1}{4} e^{3x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$ onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias

c) $y'' - y' - 2y = \operatorname{sen} 2x$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Temos uma EDO, linear, de coeficientes} \\ \text{constantes e não homogênea } (g(x) = \operatorname{sen} 2x, \cos 3) \end{array} \right.$

A solução geral da EDO será a soma da solução particular às da homogênea (que neste caso, são as mesmas dos itens a e b)

Solução geral da homogênea: $\boxed{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$

Vamos procurar uma solução particular sob a forma de:

$g(x) = A \operatorname{sen}(2x) + B \cos(2x)$, conforme pág 149 do livro Texto, Boyce, DiPrima

se, $y = A \operatorname{sen}(2x) + B \cos(2x)$

temos $\left\{ \begin{array}{l} y' = A.2\cos(2x) - 2B \operatorname{sen}(2x) \\ y'' = (y')' = -4A \operatorname{sen}(2x) - 4B\cos(2x) \end{array} \right.$

Então:

$y'' - y' - 2y = (-4A \operatorname{sen}(2x) - 4B\cos(2x)) - (2A\cos(2x) - 2B\operatorname{sen}(2x)) - 2(A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x))$

$= (-4A + 2B - 2A).\operatorname{sen}(2x) + (-4B - 2A - 2B)\cos(2x) = \operatorname{sen}(2x)$

$\left\{ \begin{array}{lll} (-6A + 2B).\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(2x) & \Rightarrow -6A + 2B = 1 & \Rightarrow -6A + 2B = 1 \\ (-6B - 2A)\cos(2x) = 0 & \Rightarrow -2A - 6B = 0 & \xrightarrow{\times(-3)} 6A + 18B = 0 \end{array} \right.$ +

$0A + 20B = 1$

$\boxed{B = \frac{1}{20}}$, então $-6A + 2.\left(\frac{1}{20}\right) = 1 \Rightarrow -\overset{2}{\cancel{6}}A = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{10} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{3}{20}}$

Logo, uma solução particular desta EDO é $\boxed{y_p = -\frac{3}{20}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{20}\cos(2x)}$

Temos, então, que a solução geral é

$\boxed{y = -\frac{3}{20}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{20}\cos(2x) + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$ onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias

FORONI

d) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \underbrace{2xe^{-x}}_{g(x)}$ $\Big\{$ EDO, linear, de coeficientes constantes e não homogênea, $g(x) = 2x.e^{-x}$

Se $y = (Ax+B).e^{-x} = Axe^{-x} + Be^{-x}$

Temos
$$\begin{cases} y' = A.1.e^{-x} - Axe^{-x} - Be^{-x} = -Axe^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x} \\ y'' = -(Ae^{-x} - Axe^{-x}) - Ae^{-x} + B.e^{-x} = Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + Be^{-x} \\ y''' = Ae^{-x} - Axe^{-x} + 2Ae^{-x} - Be^{-x} = -Axe^{-x} + 3Ae^{-x} - Be^{-x} \end{cases}$$

Então

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = (-Axe^{-x} + 3Ae^{-x} - Be^{-x}) - 6(Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + Be^{-x}) + 11(-Axe^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x}) - 6(Axe^{-x} + Be^{-x}) = 2xe^{-x}$$

Rearranjando os termos

$$(-1-6-11-6)Axe^{-x} + (3+12+11)Ae^{-x} + (-1-6-11-6)Be^{-x} = 2xe^{-x}$$

$$-24Axe^{-x} + 26Ae^{-x} - 24Be^{-x} = 2xe^{-x}$$

$$-24Axe^{-x} + (26A - 24B)e^{-x} = 2xe^{-x} + 0.e^{-x}$$

Então, temos que:

$$-24A = 2 \Rightarrow A = -1/12$$

$$26A - 24B = 0 \Rightarrow 26.\left(\frac{-1}{12}\right) - 24B = 0 \Rightarrow -B = \frac{13}{6.24} \Rightarrow B = -\frac{13}{144}$$

Logo, uma solução particular da EDO é $\boxed{y_p = \left(-\frac{1}{12}x - \frac{13}{144}\right)e^{-x}}$

Tomemos a equação característica $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ para encontrarmos as 3 soluções L.I da homogênea associada, $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Temos que $x = 1$ é raiz pois $1^3 - 6.1^2 + 11.1 - 6 = 0$, então, ao dividirmos o polinômio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ por $(x-1)$, obtemos $(x^2 - 5x + 6)$, cujas raízes são 2 e 3. Portanto temos as soluções LI da homogênea como $y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = e^{2x}$ e $y_3(x) = e^{3x}$, cuja solução geral da homogênea é $\boxed{y_h = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}}$.

Logo a solução geral da EDO é:

$$\boxed{y = \left(-\frac{1}{12}x - \frac{13}{144}\right)e^{-x} + c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}}$$ onde c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias

2) Use o método da variação dos parâmetros para encontrar a solução geral das equações:

a) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

Como já calculado no exercício 1a desta lista, temos que a solução da homogênea associada a esta EDO é $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

Vamos usar o método da variação dos parâmetros para determinar a solução particular e, posteriormente, a geral:

Tomemos $y_p = v_1(x)\, e^{2x} + v_2(x) \cdot e^{-x}$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{3x} & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{0 - (e^{3x} \cdot e^{-x})}{\underbrace{(-e^{-x} \cdot e^{2x})}_{-e^{x}} - \underbrace{(2e^{2x} \cdot e^{-x})}_{-2e^{x}}} = \frac{\cancel{-}e^{2x}}{\cancel{-}3e^{x}} = \frac{1}{3} e^{x} \Rightarrow v_1(x) = \frac{1}{3} e^{x} + k_1$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{5x}}{-3e^{x}} = -\frac{1}{3} e^{4x} \Rightarrow v_2(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} e^{4x} + k_2$$

$$v_2(x) = -\frac{1}{12} e^{4x} + k$$

Então, $y_p = \frac{1}{3} e^{x} \cdot e^{2x} - \frac{1}{12} e^{4x} \cdot e^{-x} = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{12} e^{3x} = \frac{1}{4} e^{3x}$

$$\boxed{y_p = \frac{1}{4} e^{3x}}$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$\boxed{y = \frac{1}{4} e^{3x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$$ onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias

b) $\ddot{x} + 4x = \operatorname{sen}^2 2t$

$x'' + 4x = \operatorname{sen}^2(2t)$

Temos que a equação homogênea associada é $x''+4x=0$, logo, sua equação característica seria $x^2+4=0$, cujas raízes são $(x = \pm\sqrt{4} = \pm\sqrt{4i^2} = \pm 2i)$ $x_1 = +2i$ e $x_2 = -2i$.

Uma vez que não há menções a soluções reais, admitimos as complexas, onde, então:

$$\begin{cases} Z_1 = e^{\alpha_1 t} = \cos(2t) + i\operatorname{sen}(2t) \\ Z_2 = e^{\alpha_2 t} = \cos(2t) - i\operatorname{sen}(2t) \end{cases}$$

Temos, pelo Teorema do Princípio da Superposição, que, se y_1 e y_2 são ambas soluções de $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$, em um intervalo I, então qualquer combinação linear $(y = c_1y_1 + c_2y_2)$ também é solução da EDO. Então, vamos obter soluções reais e L.I, a partir destas combinações.

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}\Big(Z_1(t) + Z_2(t)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\cos(2t) + \cancel{i\operatorname{sen}(2t)} + \cos(2t)}_{2\cos 2t} - \cancel{i\operatorname{sen}(2t)}\Big) \\ y_1 = \cos(2t) \\ y_2 = \frac{1}{2i}\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big) = \frac{1}{2i}\big(\cancel{\cos(2t)} + \underbrace{i\operatorname{sen}(2t) - \cancel{\cos(2t)} + i\operatorname{sen}(2t)}_{2i\operatorname{sen}2t}\big) \\ y_2 = \operatorname{sen}(2t) \end{cases}$$

Então a solução geral da equação homogênea associada é

$$\boxed{y_h = c_1\cos(2t) + c_2\operatorname{sen}(2t)}.$$

Tomemos, então, $y_p = v_1(t)\cos 2t + v_2(t)\operatorname{sen}2t$ para encontrarmos a solução geral pelo método da variação dos parâmetros.

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}^2(2t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ -2\operatorname{sen}(2t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix}} = \frac{-\operatorname{sen}^3(2t)}{\underbrace{2\cos^2(2t) + 2\operatorname{sen}^2(2t)}_{=2(\underbrace{\cos^2(2t)+\operatorname{sen}^2(2t)}_{=1}) = 2}} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^3(2t)$$

$$v_1' = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^3(2t) \Rightarrow v_1(t) = \int -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^3(2t)\,dt = -\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^3(2t)\,dt$$

$$\ldots\ v_1(t) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{6}\cos^3(2t)\right) + C = \frac{1}{4}\left(\cos(2t) - \frac{1}{3}\cos^3(2t)\right) + k_1$$

$$v_2' \frac{\begin{vmatrix} \cos(2t) & 0 \\ -2\operatorname{sen}(2t) & \operatorname{sen}^2(2t) \end{vmatrix}}{2} = \frac{\cos(2t)\operatorname{sen}^2(2t)}{2} = \frac{\cos 2t\,(1-\cos^2 2t)}{2}$$

$$v_2' = \frac{\cos 2t}{2} - \frac{\cos^3 2t}{2} \Rightarrow v_2(t) = \int \frac{\cos(2t)}{2} - \frac{\cos^3(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t) - \cos^3(2t)\,dt$$

$$\ldots\ v_2(t) = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)} - \cancel{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)} + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(2t) + k_2\right) = \frac{1}{12}\operatorname{sen}^3(2t) + k_2$$

Então, uma solução particular é:

$$y_p = \frac{1}{4}\left(\cos(2t) - \frac{1}{3}\cos^3(2t)\right).\cos 2t + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^3(2t).\operatorname{sen}(2t)$$

Simplificando: $\boxed{y_p = \frac{1}{4}\cos^2(2t) - \frac{1}{3}\cos^4(2t) + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^4(2t)}$

Logo, a solução geral é:

$$\boxed{y = \frac{1}{4}\cos^2(2t) - \frac{1}{3}\cos^4(2t) + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^4(2t) + c_1\cos(2t) + c_2\operatorname{sen}(2t)}$$

c) $y^{(4)} = 5x$

Tomemos a equação homogênea associada $y'''' = 0$, note que $y_1 = 1$ (ou outra constante qualquer) é solução assim como x^n onde $n \leq 4-1$, ou seja, $n \leq 3$ (bem como as soluções da forma ax^n, $n \leq 3$ e a constante.

Selecionamos então as soluções $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ e $y_4 = x^3$, logo, a solução geral da homogênea é dada por:

$$\boxed{y_h = c_1.1 + c_2 x + c_3.x^2 + c_4.x^4}$$

continua →

Vamos para o método da variação dos parâmetros usando

$y_p = v_1(x).1 + v_2(x).x + v_3(x).x^2 + v_4(x).x^3$

Temos que (conforme pág 203 do livro Texto)

$$\begin{cases} 1.v_1'(x) + x\,v_2'(x) + x^2.v_3'(x) + x^3.v_4'(x) = 0 \\ 1'.v_1'(x) + x'v_2'(x) + (x^2)'.v_3'(x) + (x^3)'v_4'(x) = 0 \\ 1''.v_1'(x) + x''v_2'(x) + (x^2)''.v_3'(x) + (x^3)''v_4'(x) = \\ 1'''.v_1'(x) + x'''.v_2'(x) + (x^2)'''.v_3'(x) + (x^3)'''.v_4'(x) = 5x \end{cases}$$

Calculando as derivadas para simplificar, Temos:

$$\begin{cases} 1.v_1'(x) + x.v_2'(x) + x^2.v_3'(x) + x^3.v_4'(x) = 0 \\ 0 + 1\,v_2'(x) + 2x.v_3'(x) + 3x^2\,v_4'(x) = 0 \\ 0 + 2v_3'(x) + 6x\,v_4'(x) = 0 \\ 0 + 6v_4'(x) = 5x \Rightarrow v_4'(x) = \dfrac{5x}{6} \end{cases}$$

Efetuando as substituições para achar v_3', v_2' e v_1', bem como, calculando todas as integrais, obtemos:

- $v_4'(x) = \dfrac{5x}{6} \Rightarrow v_4(x) = \dfrac{5x^2}{12}$

- $2v_3'(x) + 6x.\dfrac{5x}{\cancel{6}} = 0 \Rightarrow v_3'(x) = -\dfrac{5x^2}{2} \Rightarrow v_3(x) = -\dfrac{5x^3}{6}$

- $v_2'(x) + \underbrace{\cancel{2}x.\left(-\dfrac{5x^2}{\cancel{2}}\right)}_{-5x^3} + \underbrace{3x^2.\dfrac{5x}{\cancel{6}}}_{\frac{5x^3}{2}} = 0 \Rightarrow v_2'(x) = \dfrac{5x^3}{2} \Rightarrow v_2(x) = \dfrac{5x^4}{8}$

- $v_1'(x) + \underbrace{x.\dfrac{5x^3}{2}}_{=\frac{5x^4}{\cancel{2}}} + \underbrace{x^2\left(-\dfrac{5x^2}{2}\right)}_{-\frac{5x^4}{2}} + \underbrace{x^3.\left(\dfrac{5x}{6}\right)}_{\frac{5x^4}{6}} = 0 \Rightarrow v_1'(x) = -\dfrac{5x^4}{6} \Rightarrow v_1(x) = -\dfrac{x^5}{6}$

Então

$$y_p = -\frac{x^5}{6} + \frac{5x^5}{8} + -\frac{5x^5}{6} + \frac{5x^5}{12} = \frac{(-16+60-80+40)x^5}{96} = \frac{4x^5}{96} = \frac{x^5}{24}.$$

Logo, a solução geral é $\boxed{y = \dfrac{x^5}{24} + c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3}$ onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes arbitrárias.

3) Determine a equação característica e os autovalores das seguintes matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Segundo a prop. 3, um escalar λ é autovalor de A, se e somente se $\det(A - \lambda \overset{\text{identidade}}{I}) = 0$

Pelo método, subtraímos λ da diagonal principal.

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - (-1).3 = -4 - \cancel{2\lambda} + \cancel{2\lambda} + \lambda^2 + 3$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = 0$, o que vale se $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

Logo os autovalores de A são -1 e 1, e a equação característica é $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja, $\lambda^2 - 1 = 0$

$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (3).(-4) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 12$
$= \lambda^2 - 2\lambda + 13$

$\det(B - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.13}}{2}$

$\lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{48 i^2}}{2} = \dfrac{4 \pm 4\sqrt{3} i}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3} i$ $\begin{cases} \lambda_1 = 2 + 2\sqrt{3} i \\ \text{ou} \\ \lambda_2 = 2 - 2\sqrt{3} i \end{cases}$

$\det(B - \lambda I) = 0$ se $\lambda_1 = 2 + 2\sqrt{3} i$ ou $\lambda_2 = 2 - 2\sqrt{3} i$.

Logo, os autovalores de B são $2 + 2\sqrt{3} i$ e $2 - 2\sqrt{3} i$, bem como a equação característica é $\det(B - \lambda I) = 0$, ou seja, $\lambda^2 - 2\lambda + 13 = 0$.

$C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Como a matriz não é quadrada $(n \times n)$, não temos como calcular seu determinante, logo, não é possível determinar seus autovalores

FORONI

Dilma Lidia P. Pedro Ríos – Nº USP: 2246547

4. Considere os vetores:

$$x(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad y(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$$

a) Calcule o Wronskiano de x e y.

b) Em que intervalos x e y são linearmente independentes?

c) Que conclusão se pode tirar sobre os coeficientes no sistema homogêneo de equações diferenciais satisfeito por x e y?

d) Encontre esse sistema de equações diferenciais e verifique as conclusões do item (c).

a) $$W[x(t), y(t)] = \underbrace{\begin{vmatrix} \overbrace{t}^{x(t)} & \overbrace{t^2}^{y(t)} \\ 1 & 2t \end{vmatrix}}_{\text{formato pego na pág 333 do Boyce}} = 2t^2 - t^2 = \boxed{t^2}$$

b) Temos que $W[x(t), y(t)] = t^2$.

base no conceito da pág 322, cap 7 Boyce

Os vetores são ditos LD num intervalo $\alpha < t < \beta$ se existir um conjunto de constantes, não todos nulos, tais que:

$$c_1 x(t) + c_2 y(t) = 0 \text{ para } \underline{\text{todo}}\ t \text{ no intervalo.}$$

Caso contrário são ditos L.I., mesmo sejam LD em algum ponto.

Os vetores $x(t)$ e $y(t)$ possuem $W = 0$ $\underline{\text{apenas}}$ quando $t = 0$, logo são LI para todo intervalo, tanto em $\mathbb{R}$ quanto em $\mathbb{C}$.

c) Pelo Teorema 4, temos que os coeficientes $a_{ij}(t)$ não precisam ser contínuos para valer o lema 10, que diz que se $x(t)$ e $y(t)$ são soluções LI no intervalo $I \Rightarrow W[x(t), y(t)] \neq 0$, para todo $t \in I$. Dessa forma, não podemos encontrar pontos de descontinuidade nos a_{ij} encontrados.

d) Para $x(t)$, temos

$$\begin{cases} t' = a_{11}(t) \cdot t + a_{12}(t) \cdot 1 \\ 1' = a_{21}(t) \cdot t + a_{22}(t) \cdot 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a_{11}(t).t + a_{12}(t).1 & \text{I} \\ 0 = a_{21}(t).t + a_{22}(t).1 & \text{II} \end{cases}$$

Para $y(t)$, temos: $\begin{cases} (t^2)' = a_{11}(t).t^2 + a_{12}(t).2t \\ (2t)' = a_{21}(t).t^2 + a_{22}(t).2t \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t = a_{11}(t).t^2 + a_{12}(t).2t & \text{III} \\ 2 = a_{21}(t).t^2 + a_{22}(t).2t & \text{IV} \end{cases}$$

Note que os termos $a_{11}(t)$ e $a_{12}(t)$ aparecem em I e III:

$$\begin{cases} a_{11}(t).t + a_{12}(t).1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{12}(t) = 1 - a_{11}(t).t \\ a_{11}(t).t^2 + a_{12}(t).2t = 2t \end{cases}$$

$$a_{11}(t).t^2 + (1 - a_{11}(t).t).2t = 2t$$

$$a_{11}(t).t^2 + 2t - 2a_{11}(t)t^2 = 2t$$

$$-a_{11}(t).t^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_{11}(t) = 0} \text{ ou } t = 0$$

$$a_{12}(t) = 1 - a_{11}(t).t = 1 - 0 = 1, \text{ ou seja, } \boxed{a_{12}(t) = 1}$$

Vamos agora aos termos $a_{21}(t)$ e $a_{22}(t)$, em II e IV:

$$\begin{cases} a_{21}(t).t + a_{22}(t).1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{22}(t) = -a_{21}(t).t \\ a_{21}(t).t^2 + a_{22}(t).2t = 2 \end{cases}$$

$$a_{21}(t).t^2 + (-a_{21}(t).t).2t = 2$$

$$a_{21}(t).t^2 - 2a_{21}(t).t^2 = 2$$

$$-a_{21}(t).t^2 = 2 \Rightarrow \boxed{a_{21}(t) = \frac{-2}{t^2}} \text{ , } t \neq 0$$

$$a_{22}(t) = -a_{21}(t).t = -\left(\frac{-2}{t^2}\right).t = +\frac{2}{t}, \text{ ou seja, } \boxed{a_{22}(t) = +\frac{2}{t}}_{t \neq 0}$$

Note que obtivemos 2 coeficientes constantes e 2 em função de t, para os quais $t \neq 0$. Segundo o item c, não deveríamos encontrar pontos de descontinuidade o que nos leva a dedução que $x(t)$ e $y(t)$ não são soluções da EDO.

FORONI