MAE 0219 Introdução à Probabilidade e Estatística I

1a. Prova de Exercícios - 21 de maio de 2020

Nome ______________________________

Assinat. ______________________________

No.USP ______________________________

Prof. Vanderlei C. Bueno

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

==

Curso: Bacharelado em Economia - FEA

==

1. Sejam X e Y varáveis aleatórias independentes com distribuições exponenciais de parâmetros 4 e 7, respectivamente.

   A) Qual a função de distribuição e a função densidade de probabilidade de $Z = \min\{X, Y\}$?

   B) Qual a função densidade de probabilidade de $Z = |Y - X|$?

   Resposta:

   A) $X \sim \exp(4)$

   $Y \sim \exp(7)$.

   $Z = \min\{X, Y\}$, $F_Z(z) =?$, $f_Z(z) =?$

   Observe que, como X e Y assumem valores em $(0, \infty)$, Z asssume valores em $(0, \infty)$. A função de didtribuição de Z é

$$P(Z \leq z) = P(\min\{X, Y\} \leq z) = 1 - P(\min\{X, Y\} > z) = 1 - P(X > z, Y > z) =$$

$$1 - P(X > z).P(Y > z) = 1 - e^{-4z}e^{-7z} = 1 - e^{-11z}, \quad 0 \leq z < \infty.$$

   A função densidade de probabilidade de Z é

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = 11.e^{-11z}, \quad 0 \leq z < \infty.$$

   Concluimos que Z tem distribuição exponencial de parâmetro 11.

   B) $Z = |Y - X|$

   Observe que, como X e Y assumem valores em $(0, \infty)$, Z asssume valores em $(0, \infty)$. A função de distribuição de Z é

$$P(Z \leq z) = P(|Y - X| \leq z) = P(-z \leq Y - X \leq z) = P(X - z \leq Y \leq X + z) =$$

$$4.7.\int_0^z\int_0^{x+z} e^{-4x}e^{-7y}dydx + 4.7.\int_z^{\infty}\int_{x-z}^{x+z} e^{-4x}e^{-7y}dydx =$$
$$4.\int_0^z e^{-4x}(\int_0^{x+z} 7e^{-7y}dy)dx + 4.\int_z^{\infty} e^{-4x}(\int_{x-z}^{x+z} 7e^{-7y}dy)dx =$$
$$4.\int_0^z e^{-4x}(1-e^{-7(x+z)})dx + 4.\int_z^{\infty} e^{-4x}(e^{-7(x-z)} - e^{-7(x+z)})dx =$$
$$\int_0^z 4e^{-4x}dx - 4.\int_0^z e^{-7z}e^{-11x}dx + 4.\int_z^{\infty} e^{7z}e^{-11x}dx - \int_z^{\infty} 4.e^{-7z}e^{-11x}dx =$$
$$(1-e^{-4z}) - \frac{4}{11}e^{-7z}(1-e^{-11z}) + \frac{4}{11}e^{7z}e^{-11z} - \frac{4}{11}e^{7z}e^{-11z} =$$
$$1 - e^{-4z} - \frac{4}{11}e^{-7z} + \frac{4}{11}e^{-18z} + \frac{4}{11}e^{-4z} - \frac{4}{11}e^{-18z} =$$
$$1 - [\frac{7}{11}e^{-4z} + \frac{4}{11}e^{-7z}], \quad 0 \le z < \infty.$$

Portanto

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{28}{11}(e^{-4z} + e^{-7z}), \quad 0 \le z < \infty.$$

2. Seja X uma variável aleatória caracterizada por com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ \frac{1}{3} & : \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{15} & : \quad 1 \le x < 6 \\ \frac{1}{9} & : \quad 6 \le x < 9 \\ 0 & : \quad x \ge 9 \end{cases}.$$

A) Verifique que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

B) Calcule $P(5 < X \le 7)$.

C) calcule $P(X > 7 | X > 5)$.

A)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^6 \frac{1}{9}dx +$$
$$\int_6^9 \frac{1}{15}dx + \int_9^{\infty} 0dx = 0 + \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{15}(6-1) + \frac{1}{9}(7-6) =$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

B)

$$P(5 < X \le 7) = \int_5^6 f(x)dx + \int_6^7 f(x)dx =$$
$$\int_5^6 \frac{1}{15}dx + \int_6^7 \frac{1}{9}dx = \frac{1}{15} + \frac{1}{9} = \frac{8}{45}.$$

C)

$$P(X > 7|X > 5) = \frac{P(X > 7; X > 5)}{P(X > 5)} = \frac{P(X > 7)}{P(X > 5)} = \frac{\int_7^{\infty} f(x)dx}{\int_5^{\infty} f(x)dx} =$$
$$\frac{\int_7^{\infty} \frac{1}{9}dx}{\int_5^6 \frac{1}{15}dx + \int_6^7 \frac{1}{9}dx} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{15} + \frac{3}{9}} = \frac{5}{9}$$

3. O número de pedidos para compra de certo produto que uma Companhia recebe por semana distribui-se de acordo com uma distribuição binomial com parâmetros $n = 200$ e $p = 0,65$.

   A) Se em uma semana o estoque disponível é de 140 unidades, qual a probabilidade de que todos os pedidos sejam atendidos?

   B) Qual deve ser o estoque semanal para que se tenha 98% de probabilidade de que todos os pedidos sejam atendidos?

   Resposta

   A) N= Número de pedidos

   $N \sim B(200, 0, 65); E[N] = 200.0, 65 = 130; Var(N) = 200.0, 65.0, 35 = 45, 5; DP(X) = 6, 7.$

   $N \approx Y \sim N(130, 6, 7^2).$

$$P(N \leq 140) = P(Y \leq 140,5) = P(Z \leq \frac{140,5 - 130}{6,7}) =$$
$$P(Z \leq 1,57) = 0,5 + P(0 \leq Z \leq 1,57) = 0,5 + 0,44179 = 0,94.$$

   B)

   Qual o valor de n tal que $P(N \leq n) = 0,98$?

$$P(N \leq n) = 0,98 \leftrightarrow P(Y \leq n + 0,5) = 0,98 \leftrightarrow$$
$$P(Z \leq \frac{n + 0,5 - 130}{6,7}) = 0,98 \leftrightarrow P(0 < Z \leq \frac{n - 129,5}{6,7}) = 0,48 \leftrightarrow$$
$$\frac{n - 129,5}{6,7} = 2,06 \leftrightarrow n = 129,5 + 2,06.0,67 = 143,302.$$

4. O gasto diário por cliente num determinado fast-food é normalmente distribuido com média $R\$35,00$ e desvio padrão $R\$8,00$.

   A) Se em determinado dia o restaurante recebe 310 clientes, qual a probabilidade do faturamento ser superior a $R\$11.000,00$?

   B) Obtenha um intervalo simétrico em torno da média que contenha 95% dos gastos.

   Resposta:

   A)

   X = Gasto diário por cliente; $X \sim N(35; 64)$.

   $Y = \sum_{i=1}^{310} X_i \sim N(10.850; 140,8^2)$.

$$P(Y > 11000) = P(Z > \frac{11000 - 10850}{140,8}) = P(Z > 1,06) =$$
$$0,5 - P(0 < Z \leq 1,06) = 0,5 - 0,35543 = 0,1445.$$

   B)

$$P(35 - x < X < 35 + x) = P(\frac{-x}{8} < Z < \frac{x}{8}) = 0,95 \leftrightarrow$$
$$2.P(0 < Z \leq \frac{x}{8}) = 0,95 \leftrightarrow P(0 < Z \leq \frac{x}{8}) = 0,475 \leftrightarrow$$
$$\frac{x}{8} = 1,96 \leftrightarrow x = 15,68$$

Portanto o intervalo é $(53 - 15,68; 35 + 15,68) = (19,32; 50,68)$.

5. A distribuição conjunta do vetor aleatório (X, Y) é dada por:

X/Y	0	1	2
0	0, 2	0, 1	0, 2
1	0, 1	0	0, 1
2	0, 05	0, 15	0, 1

A) Calcule $COV(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$. As variáveis X e Y são independentes?

B) Qual a função de probabilidade da variável aleatória $X + Y$? Qual sua variância?

Resposta:

A) $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X].E[Y]$.

$E[X] = 0,2 + 0,6 = 0,8$, $E[Y] = 0,25 + 0,8 = 1,05$ e $E[XY] = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 = 1 >$
Portanto $Cov(X, Y) = 1 - 0,8.1,05 = 0,16$.

B) $Z = X + Y$ assume os valores $0, 1, 2, , 3, 4$ com probabilidades

$$P(Z = 0) = 0,2; P(Z = 1) = 0,2; P(Z = 2) = 0,25; P(Z = 3) = 0,25; P(Z = 4) = 0,1.$$

$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2.Cov(X, Y)$

$E[X^2]0,2 + 1,2 = 1,4$ e $Var(X) = 1,4 - 0,8^2 = 0,76$.

$E[Y^2] = 0,25 + 1,6 = 1,85$ e $Var(Y) = 1,85 - 1,05^2 = 0,75$.

Portanto $Var(X + Y) = 0,76 + 0,75 + 2.0,16 = 1,83$.

6. O vetor aleatório (X, Y) Tem função densidade de probabilidade

$$f(x, y) = c(x^2 + y^2), \quad 0 < x < 2, 0 < y < 1.$$

A) Qual o valor de c?

B) Calcule $P(X \leq 0,5|Y = 0,5)$.

C) Calcule $P(Y > X^2)$

Resposta

A)

$$1 = c\int_0^2\int_0^1 (x^2 + y^2)dydx = c[\int_0^2\int_0^1 x^2dydx + \int_0^2\int_0^1 y^2dydx] =$$
$$c[\int_0^2 x^2(\int_0^1 dy)dx + \int_0^2(\int_0^1 y^2dy)dx] = c[\int_0^2 x^2.1dx + \int_0^2 \frac{1}{3}dx] =$$
$$c[\frac{8}{3} + \frac{2}{3}] = c.\frac{10}{3}.$$

Portanto $c = \frac{3}{10}$.

B)

$P(X \leq 0,5|Y = 0,5) =??$

$$P(X \leq x|Y = y) = \int_\infty^x f_{X|Y=y}(x)dx.$$

e $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
Calculemos $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{3}{10}\int_0^2 (x^2+y^2)dx = \frac{3}{10}[\int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 y^2 dx] = \frac{3}{10}[\frac{8}{3} + 2y^2] = \frac{8}{10} + \frac{6y^2}{10}.$$

No ponto 05, $f_Y(0,5) = \frac{8}{10} + \frac{1,5}{10} = \frac{9,5}{10}$. Portanto

f$_{X|Y=0,5}(x) = \frac{f(x,0,5)}{\frac{9,5}{10}} = \frac{\frac{3}{10}(x^2+0,25)}{\frac{9,5}{10}} = \frac{3(x^2+0,25)}{9,5}$
Portanto

$$P(X \leq 0,5|Y=0,5) = \int_0^{0,5} \frac{3}{9,5}(x^2+0,25)dx =$$

$$\frac{3}{9,5}[\int_0^{0,5} x^2 dx + \int_0^{0,5} 0,25 dx] = \frac{3}{9,5}[0,042+0,125] = 0,05.$$

C)$P(Y > X^2) =??$

$$P(Y > X^2) = \int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{3}{10}(x^2+y^2)dydx =$$

$$\frac{3}{10}[\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^2 dydx + \int_0^1 \int_{x^2}^1 y^2 dydx =$$

$$\frac{3}{10}[\int_0^1 x^2(\int_{x^2}^1 dy)dx + \int_0^1 (\int_{x^2}^1 y^2 dy)dx] =$$

$$\frac{3}{10}[\int_0^1 x^2(1-x^2)dx + \int_0^1 (\frac{1}{3} - \frac{y^6}{3})dx] =$$

$$\frac{3}{10}[\int_0^1 (x^2-x^4)dx + \int_0^1 (\frac{1}{3} - \frac{x^6}{3)dx] =}$$

$$\frac{3}{10}[\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx + \int_0^1 \frac{1}{3}dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3}dx] =$$

$$\frac{3}{10}[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}] = 0,04.$$

7.