Nome: Kevin Araújo da Cunha Wai n°USP:9794308

1 a) $y'' - y' - 2y = 4x^2$

$g(x) = 4x^2 \Rightarrow y = Ax^2 + Bx + C$

$y'' = 2A \,,\; y' = 2Ax + B$

$2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$

$-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + (+2A - B - 2C) = 4x^2$

$$\begin{cases} -2A = 4 \Rightarrow A = -2 \\ -2A - 2B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow B = 2 \\ +2A - B - 2C = 0 \Rightarrow -4 - 2 - 2C = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow C = -3$

$\boxed{y = -2x^2 + 2x - 3}$ é uma solução particular

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y = e^{2x}, \; y = e^{-x}$

Portanto, a solução geral é

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3}$$

C_1, C_2 constantes.

---

b) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = -1$

$\therefore \; y = e^{2x}, \; y = e^{-x}$ são solucoēs da homogenea associada

Como 3 não é raiz da equação podemos achar soluções da forma

$y = A \cdot e^{3x} \Rightarrow$

$$(A \cdot e^{3x})'' - (A \cdot e^{3x})' - 2(A \cdot e^{3x}) = e^{3x}$$

$$9 \cdot A \cdot e^{3x} - 3A \cdot e^{3x} - 2A \cdot e^{3x} = e^{3x}$$

$$4A \cdot e^{3x} = e^{3x} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\therefore y = C_1 . e^{-x} + C_2 . e^{2x} + \frac{e^{3x}}{4}}$$ C_1, C_2 constantes

é solução geral

ⓒ $y'' - y' - 2y = \operatorname{sen} 2x$

Vamos buscar uma solução particular do tipo $y = A\cos 2t + B \operatorname{sen} 2t$

$$\Rightarrow y' = -2A \operatorname{sen} 2t + 2B \cos 2t$$

$$y'' = -4A \cos 2t - 4B \operatorname{sen} 2t$$

$$y'' - y' - 2y = (-4A\cos 2t - 4B \operatorname{sen} 2t) -$$
$$- (-2A \operatorname{sen} 2t + 2B \cos 2t) +$$
$$- 2(A\cos 2t + B \operatorname{sen} 2t) =$$

$$= (-2B - 6A)\cos 2t + (2A - 6B)\operatorname{sen} 2t$$

$*$

$= \operatorname{sen} 2t$

$$\begin{cases} -2B - 6A = 0 \Rightarrow B = -3A \\ 2A - 6B = 1 \Rightarrow 2A - 6(-3A) = 1 \end{cases}$$

$$B = \frac{-3}{20}$$

$$20A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{20}}$$

$$\boxed{\therefore\ y = C_1 . e^{-x} + C_2 . e^{2x} + \frac{\cos 2t}{20} - \frac{3 . \operatorname{sen} 2t}{20}}$$

C_1, C_2 constantes

É solução geral da equação.

d) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2x . e^{-x}$

Buscaremos uma solução particular

da forma $y = (Ax + B) . e^{-x}$

$*$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3$$

$$y = (Ax + B)e^{-x} \Rightarrow y' = -Ax.e^{-x} + A.e^{-x} - B.e^{-x}$$

$$y' = -Ax.e^{-x} + (A-B)e^{-x}$$

$$y'' = A.x.e^{-x} - A.e^{-x} - (A-B).e^{-x}$$

$$y'' = Ax.e^{-x} + (B-2A).e^{-x}$$

$$y''' = -A.x.e^{-x} + A.e^{-x} + (2A-B).e^{-x}$$

$$y''' = -Ax.e^{-x} + (3A-B).e^{-x}$$

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y =$$

$$= \left(-Ax.e^{-x} + (3A-B).e^{-x}\right) - 6\left(Ax + (B-2A).e^{-x}\right) +$$

$$+ 11\left(-Axe^{-x} + (A-B).e^{-x}\right) - 6\left((Ax+B)e^{-x}\right) =$$

$$= e^{-x}\left[-Ax + (3A-B) - 6Ax - 6(B-2A) - 11Ax +\right.$$

$$\left. + 11(A-B) - 6(Ax+B)\right] =$$

$$= e^{-x}\left[-24Ax + 26A - 24B\right] = 2x \cdot e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -24A = 2 \Rightarrow A = \dfrac{-1}{12} \\ 26A - 24B = 0 \Rightarrow 24B = 26A \Rightarrow \end{cases}$$

$$B = \frac{-26}{24.12} = -\frac{13}{144}$$

$$\therefore \boxed{y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{3x} - \frac{x \cdot e^{-x}}{12} - \frac{13}{144} \cdot e^{-x}}$$

C_1, C_2, C_3 constantes

é solução geral

2 (*) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

Homogênea: $y'' - y' - 2y = 0$

Eq. característica: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$

$\lambda = 2$ ou $\lambda = -1$

*

$y_1 = e^{-x}$ e $y_2 = e^{2x}$ é solução e é fácil ver que são

L.I. Logo $\{y_1, y_2\}$ é base

$$W\{y_1, y_2\} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2.e^{2x} \end{vmatrix} = 2.e^{x} + e^{x}$$

$$W = 3.e^{x}$$

$$y_p = u_1 . y_1 + u_2 . y_2 \Rightarrow \begin{cases} u_1' . y_1 + u_2' . y_2 = 0 \\ u_1' . y_1' + u_2' . y_2' = e^{3x} \end{cases}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^{3x} & 2.e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{5x} \Rightarrow u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-e^{5x}}{3.e^{x}}$$

$$u_1' = -\frac{e^{4x}}{3} \Rightarrow u_1 = -\frac{e^{4x}}{12}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{3x} \end{vmatrix} = e^{2x} \Rightarrow u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{e^{2x}}{3e^{x}} = \frac{e^{x}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{e^{x}}{3} \Rightarrow y_p = -\frac{e^{4x}}{12} . e^{-x} + \frac{e^{x}}{3} . e^{2x} = -\frac{e^{3x}}{12} + \frac{e^{3x}}{3}$$

*

$$y_p = \frac{-e^{3x} + 4e^{3x}}{12} = \frac{3e^{3x}}{12} = \frac{e^{3x}}{4}$$

Solução geral de ⊛:

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{2x} + \frac{e^{3x}}{4}}$$

C_1, C_2 constantes

b) ⊛ $x'' + 4x = \text{sen}^2 2t$

Homogenea: $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2i$ ou $\lambda = -2i$

$\Rightarrow$ $x_1 = \cos 2t$ e $x_2 = \text{sen}\, 2t$

São soluções dessa homogênea

$\cos 2t$ e $\text{sen}\, 2t$ são L. I.

$$W\{\cos 2t, \text{sen}\, 2t\} = \begin{vmatrix} \cos 2t & \text{sen}\, 2t \\ -2\,\text{sen}\, 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cos^2 2t + 2\,\text{sen}^2 2t = 2$$

⊛

$$x_p = U_1 \cdot x_1 + U_2 \cdot x_2 \Rightarrow \begin{cases} U_1' \cdot x_1 + U_2' \cdot x_2 = 0 \\ U_1' \cdot x_1' + U_2' \cdot x_2' = \operatorname{sen}^2 2t \end{cases}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen}^2 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^3 2t \Rightarrow$$

$$U_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{\operatorname{sen}^3 2t}{2} \Rightarrow U_1 = -\int \frac{\operatorname{sen}^3 2t}{2} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_1 = -\int \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - \frac{\cos^2 2t}{2} \operatorname{sen} 2t \, dt =$$

$$= +\frac{\cos 2t}{4} - \frac{\cos^3 2t}{12}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos 2t & 0 \\ -2\operatorname{sen} 2t & \operatorname{sen}^2 2t \end{vmatrix} = \cos 2t \cdot \operatorname{sen}^2 2t$$

$$\Rightarrow U_2' = \frac{\cos 2t \cdot \operatorname{sen}^2 2t}{2} \Rightarrow U_2 = \frac{\operatorname{sen}^3 2t}{12}$$

$$x_p = U_1 \cdot x_1 + U_2 \cdot x_2 = \left(+\frac{\cos 2t}{4} - \frac{\cos^3 2t}{12}\right) \cos 2t +$$

$\star$

$$+\frac{\operatorname{sen}^3 2t}{12}\cdot\operatorname{sen}2t = +\frac{\cos^2 2t}{4}+\frac{\operatorname{sen}^4 2t-\cos^4 2t}{12}$$

$$=\frac{\cos^2 2t}{4}+\frac{(\operatorname{sen}^2 2t+\cos^2 2t)(\operatorname{sen}^2 2t-\cos^2 2t)}{12}=$$

$$=\frac{\cos^2 2t}{4}+\frac{\operatorname{sen}^2 2t-\cos^2 2t}{12}=$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{3\cos^2 2t-2\cos^2 2t}{12}=\frac{1}{12}+\frac{\cos^2 2t}{12}$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1+\cos 4t}{24}=\frac{3}{24}+\frac{\cos 4t}{24}\Rightarrow$$

solução geral de $\star$:

$$\boxed{x=\frac{1}{8}+\frac{\cos 4t}{24}+C_1\cdot\operatorname{sen}2t+C_2\cdot\cos 2t}$$

C_1, C_2 constantes

*

c) $y^{(4)} = 5x \Rightarrow y^{(4)} = 0$

$\lambda^4 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$

$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ y_4 = x^3$ são soluções da homogênea

$$W\{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

$$\begin{cases} U_1' \cdot 1 + U_2' \cdot x + U_3' \cdot x^2 + U_4' \cdot x^3 = 0 \\ 0 + U_2' + U_3' \cdot 2x + U_4' \cdot 3x^2 = 0 \\ 0 + 0 + 2U_3' + U_4' \cdot 6x = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 6U_4' = 5x \Rightarrow \end{cases}$$

*

$$\Rightarrow U_4' = \frac{5}{6}x \Rightarrow \boxed{U_4 = \frac{5x^2}{12}}$$

$$2U_3' + U_4' \cdot 6x = 0 \Rightarrow$$

$$2U_3' + 5x^2 = 0 \Rightarrow U_3' = -\frac{5x^2}{2}$$

$$\boxed{U_3 = -\frac{5x^3}{6}}$$

$$U_2' + U_3' \cdot 2x + U_4' \cdot 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_2' - \frac{5x^2}{2} \cdot 2x + \frac{5x}{6} \cdot 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow U_2' - \frac{10x^3}{2} + \frac{5x^3}{2} = 0 \Rightarrow U_2' = \frac{5}{2}x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U_2 = \frac{5x^4}{8}}$$

$$U_1' + U_2' \cdot x + U_3' \cdot x^2 + U_4' \cdot x^3 = 0$$

$$U_1' + \frac{5}{2} \cdot x^3 \cdot x + \left(-\frac{5}{2}x^2\right)x^2 + \frac{5x}{6}x^3 = 0$$

$*$

$$+x^4\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}+\frac{5}{6}\right)=0 \Rightarrow$$

$$u_1' = -\frac{5}{6}\cdot x^4 \Rightarrow u_1 = -\frac{x^5}{6}$$

$$y_P = -\frac{x^5}{6}\cdot 1 + \frac{5x^4}{8}\cdot x - \frac{5}{6}x^3\cdot x^2 + \frac{5}{12}x^2\cdot x^3 =$$

$$= x^5\left(-\frac{1}{6}+\frac{5}{8}-\frac{5}{6}+\frac{5}{12}\right) = x^5\left(\frac{-4+15-20+10}{24}\right)$$

$$= \frac{x^5}{24} \Rightarrow$$

$\therefore$ Solução geral de $*$:

$$\boxed{y = C_1\cdot 1 + C_2\cdot x + C_3\cdot x^2 + C_4\cdot x^3 + \frac{x^5}{24}}$$

C_1, C_2, C_3 e C_4 constantes.

③ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$*$

$$= (2-\lambda)(-2-\lambda)+3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 - 1 = 0} \text{ Eq.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1} \text{ autovalores}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B - \lambda I) = 0$$

$$\Downarrow$$

Eq.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{(1-\lambda)^2 + 12 = 0}$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda = \pm 2\sqrt{3}\, i \Rightarrow \boxed{\lambda = 1 \pm 2\sqrt{3}\, i}$$

autovalores

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ não possui

Eq. característica e autovalor

4 a $w[x,y] = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2$

b Pela proposição 9

x, y são L.D. $\Rightarrow w[x,y] \equiv 0$ em I

*

Então

$W[x,y]=0$, para algum $t \in I \Rightarrow x, y$ são L.I.

Assim, como $W[x,y]=0 \Leftrightarrow t=0$

temos que x, y é L.I. em

qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

c) Como x e y teriam que

ter $w \neq 0$, para qualquer $t \in I$

para serem soluções L.I.

de um sistema homogeneo

de equações deferenciais a

coeficientes contínuos

temos que em $t=0$ um

dos coef. precisam ser descontínuos

a) Queremos $A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

*

$$x' = A \cdot x \quad e \quad y' = Ay$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} 1 = a_{11} \cdot t + a_{12} \cdot 1 & \text{I} \\ 0 = a_{21} \cdot t + a_{22} \cdot 1 & \text{III} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2t = a_{11} \cdot t^2 + a_{12} \cdot 2t & \text{II} \\ 2 = a_{21} \cdot t^2 + a_{12} \cdot 2t & \text{IV} \end{cases}$$

$$\text{I} \cdot t \Rightarrow \boxed{t = a_{11} \cdot t^2 + a_{12} \cdot t}$$

mas $2t = a_{11} \cdot t^2 + a_{12} \cdot 2t$

$$2t = a_{11} \cdot t^2 + a_{12} \cdot t + a_{12} \cdot t$$

$$2t = t + a_{12} \cdot t \Rightarrow t = a_{12} \cdot t, \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{a_{12}(t) = 1}$$

$$t = a_{11} \cdot t^2 + t \Rightarrow 0 = a_{11} \cdot t^2, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$a_{11} = 0$$

$$\text{III} \cdot t \Rightarrow 0 \cdot t = (a_{21} \cdot t + a_{22}) \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = a_{21} t^2 + a_{22} \cdot t$$

$$\text{IV} \Rightarrow 2 = a_{21} \cdot t^2 + a_{22} \cdot 2t \Rightarrow$$

$$2 = a_{21} \cdot t^2 + a_{22} \cdot t + a_{22} \cdot t \Rightarrow$$

$$2 = a_{22} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}$$

mas se $t = 0$ temos $2 = a_{22} \cdot 0$

$$2 = 0$$

*

logo a_{22} não pode ser contínua em $t=0$

$$t \neq 0 \Rightarrow a_{22} \cdot t = 2 \Rightarrow \boxed{a_{22} = \frac{2}{t}}$$

IV $$2 = a_{21} \cdot t^2 + a_{22} \cdot 2t \xrightarrow{t \neq 0}$$

$$2 = a_{21} \cdot t^2 + \frac{2}{t} \cdot 2t \Rightarrow$$

$$a_{21} \cdot t^2 = -2 \Rightarrow a_{21} = -\frac{2}{t^2}$$

portanto x e y são soluções do sistema

$$\begin{cases} p_1' = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 \\ p_2' = -\frac{2}{t^2} \cdot p_1 + \frac{2}{t} \cdot p_2 \end{cases}$$

onde $p(t) = p = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$