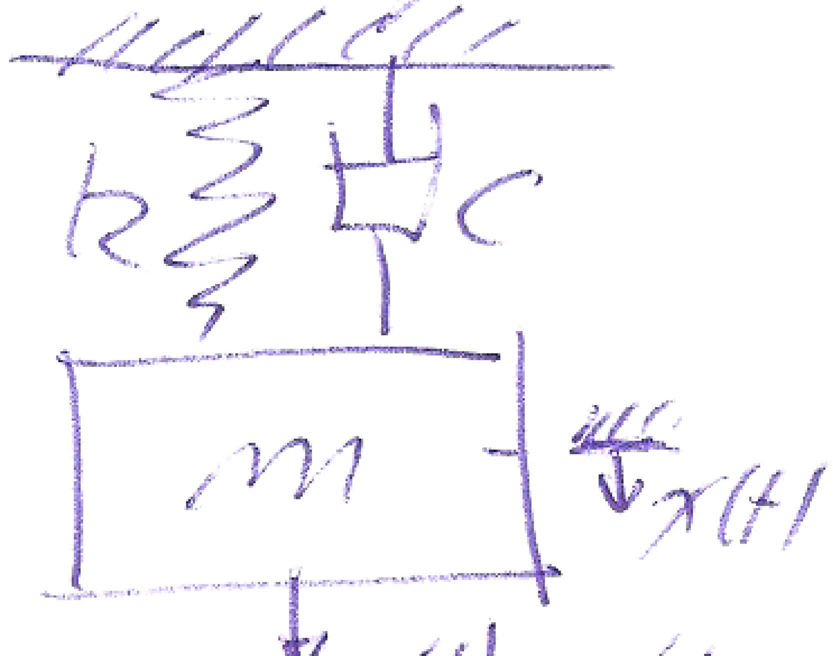
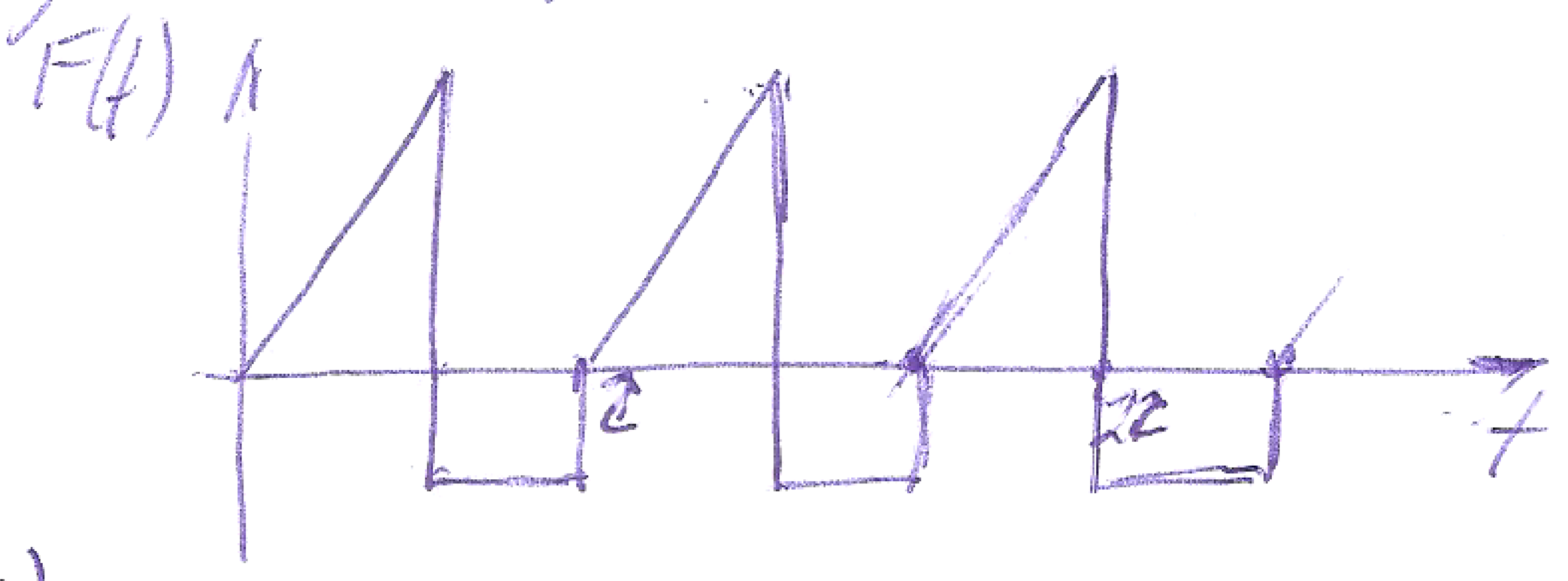
Excitação Geral e Resposta do Sistema

Até agora só discutimos excitações harmônicas simples. Vamos começar aqui com excitações periódicas, mas não necessariamente harmônicas simples.
Digamos que temos o nosso sistema massa-mola-amortecedor excitado por uma força $F(t)$ periódica.





$$F(t) = F(t - n\tau)$$
$n = 1, 2, \ldots$

Séries de Fourier e análise harmônica

Fourier (1822) provou matematicamente que qualquer função periódica limitada contínua ou descontínua com um número finito de pontos em um intervalo de $0 \leq z \leq 2\pi$ pode ser representada por uma série de senos e cossenos da seguinte maneira:

$$F(z) = a_0 + a_1\cos(z) + a_2\cos(2z) + \ldots a_n\cos(nz) + \ldots$$
$$+ b_1\,\mathrm{sen}\,z + b_2\,\mathrm{sen}(2z) + \ldots b_n\,\mathrm{sen}(nz) + \ldots \quad (1)$$

Quando $n \to \infty$ a expressão representa qualquer função com os requisitos acima (contínua, limitada)

Integrando (1) dos dois lados da equação em z, de 0 a 2π

$$\int_0^{2\pi} F(z)\,dz = \int_0^{2\pi} a_0\,dz + \int_0^{2\pi} a_1\cos z\,dz + \ldots + b_1\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,z\,dz + \ldots$$

$$\therefore \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z)\,dz}$$

Multiplicando a equação (1) por $\cos z$ em ambos os membros e integrando, obtemos a_1, pois somente o termo em $\cos^2 z$ dá diferente de zero. As funções são ortogonais entre si no intervalo 0 a 2π.

$\boxed{a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(z)\cos(z)\,dz}$ pois $\int_0^{2\pi}\cos^2(z)\,dz = \pi$

Analogamente: $\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nz)\,dz}$

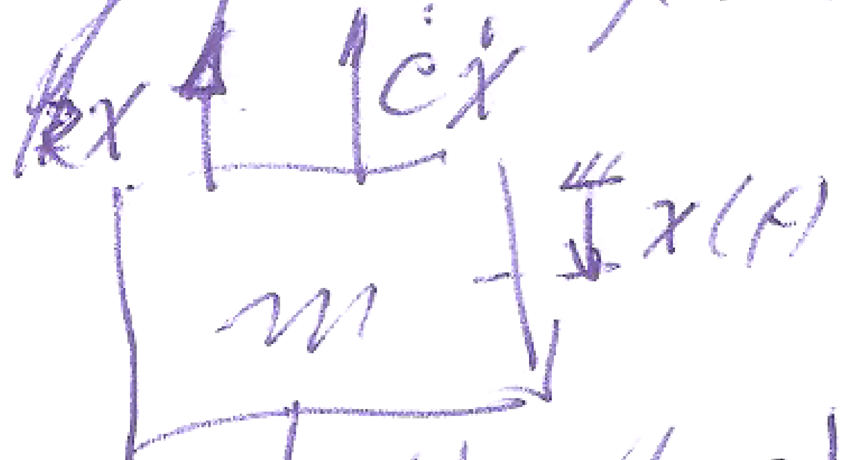
Da mesma maneira para o termo em seno, pois as funções $sen(iz)$ são ortogonais entre si e com as funções $\cos(iz)$

$$\int_0^{2\pi} F(z)\,sen(nz)\,dz = b_n\underbrace{\int_0^{2\pi} sen^2(nz)\,dz}_{\pi} + a_0\underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} sen(nz)\,dz}}_{0} + a_i\underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}\cos(iz)\,sen(nz)\,dz}}_{0} = \ldots$$

$$\therefore \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(z)\,sen(nz)\,dz}$$

Observamos que, sendo as funções seno e cosseno equilibradas em torno do zero (mesma área acima ou abaixo do zero), o termo "a_0" é o que equilibra a $F(z)$ em torno do zero. $\int_0^{2\pi}[F(z)-a_0]\,dz$ tem que dar zero.

Portanto, como fica a equação diferencial do nosso sistema básico, massa-mola-amortecedor.
Sendo $x=0$ na posição de equilíbrio e colocando o sistema em uma configuração genérica $x(t)$ e isolando a massa, obtemos:



$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} - F(t)$

$F(t) = F(t-n\tau) = \cancel{a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\cos(i\omega_f t)}$

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx = F(t)$ — frequência fundamental

Definindo $\omega_f = \frac{2\pi}{\tau}$, para que $(\omega_f t) = 2\pi\frac{t}{\tau}$ e portanto as funções seno e cosseno retornem ao mesmo ponto a cada $t = n\tau$: $F(t) = a_0 + a_1\cos(\omega_f t) + \ldots a_n\cos(n\omega_f t) + \ldots b_n sen(n\omega_f t)$

ou $F(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\cos(i\omega_f t) + \sum_{i=1}^{n} b_i\,sen(i\omega_f t)$

A equação diferencial fica

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n}[a_i\cos(i\omega_f t) + b_i \operatorname{sen}(i\omega_f t)]$$

Temos a solução da homogênea

$x_h(t) = e^{-\zeta\omega t}[A\operatorname{sen}(\omega_d t) + B\cos(\omega_d t)]$ p/ $\zeta < 1$, soma das soluções particulares de cada um dos termos do 2º membro.

Equ. linear: soma das soluções particulares individuais é solução.

Portanto: $x_0(t) = \frac{a_0}{k}$; $x_{c_1}(t) = X_{c_1}\cos(\omega_f t - \psi_1)$; $x_{s_1}(t) = X_{s_1}\operatorname{sen}(\omega_f t - \psi_1)$...

$x_{c,n}(t) = X_{cn}\cos(n\omega_f t - \psi_n)$; $x_{sn}(t) = X_{sn}\operatorname{sen}(n\omega_f t - \psi_n)$ onde

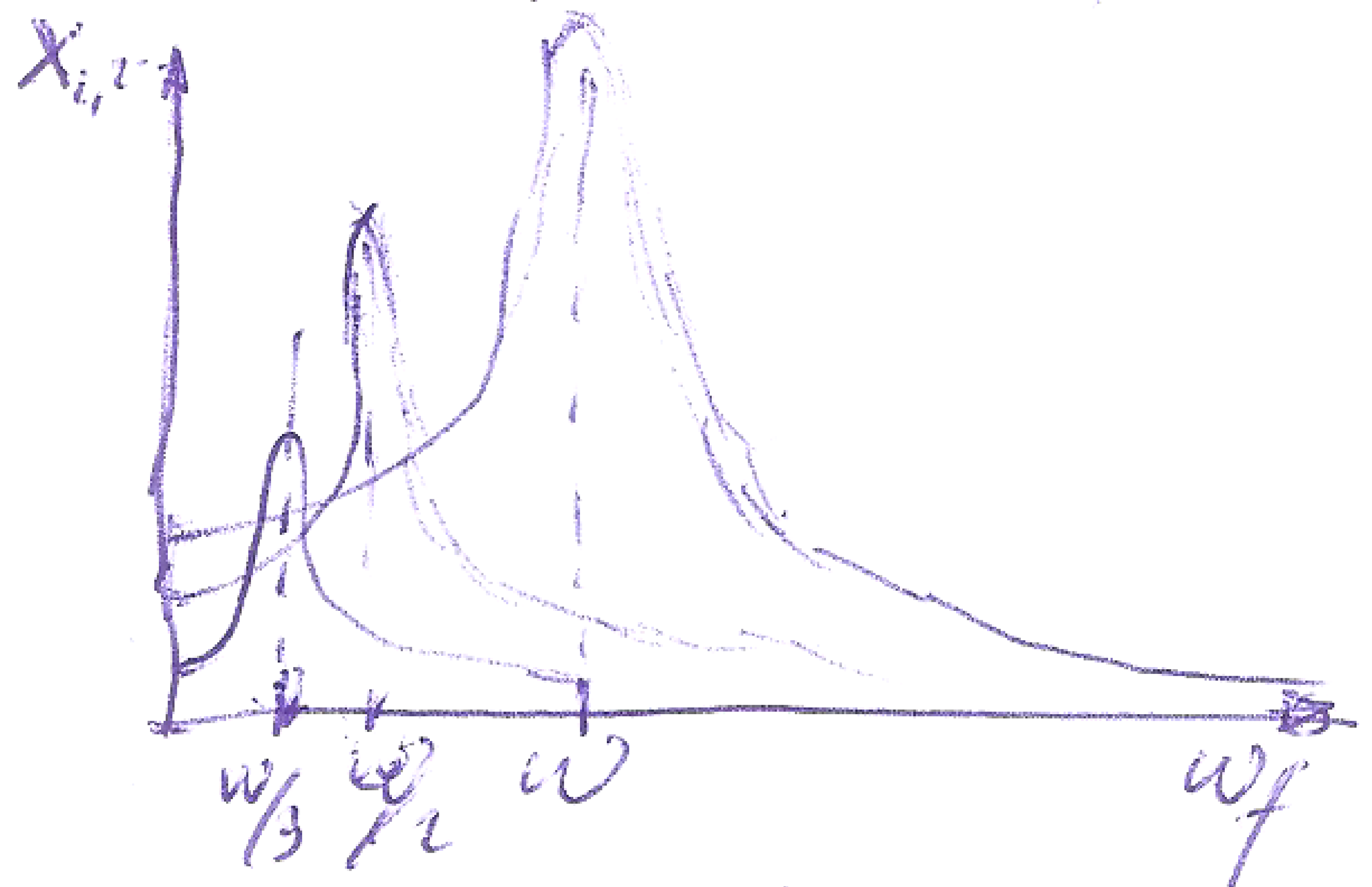
$$X_{c,n} = \frac{a_n/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{n\omega_f}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{n\omega_f}{\omega}\right)^2}} \quad e \quad X_{s,n} = \frac{b_n/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{n\omega_f}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{n\omega_f}{\omega}\right)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\psi_n = \frac{2\zeta\frac{n\omega_f}{\omega}}{1-\left(\frac{n\omega_f}{\omega}\right)^2}$$

vale p/ seno e coseno

por semelhança com nossa equação básica $X_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$

Observa-se que, toda vez que $n\omega_f = \omega$, temos uma ressonância.



$$X_n = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{n\omega_f}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{n\omega_f}{\omega}\right)^2}}$$

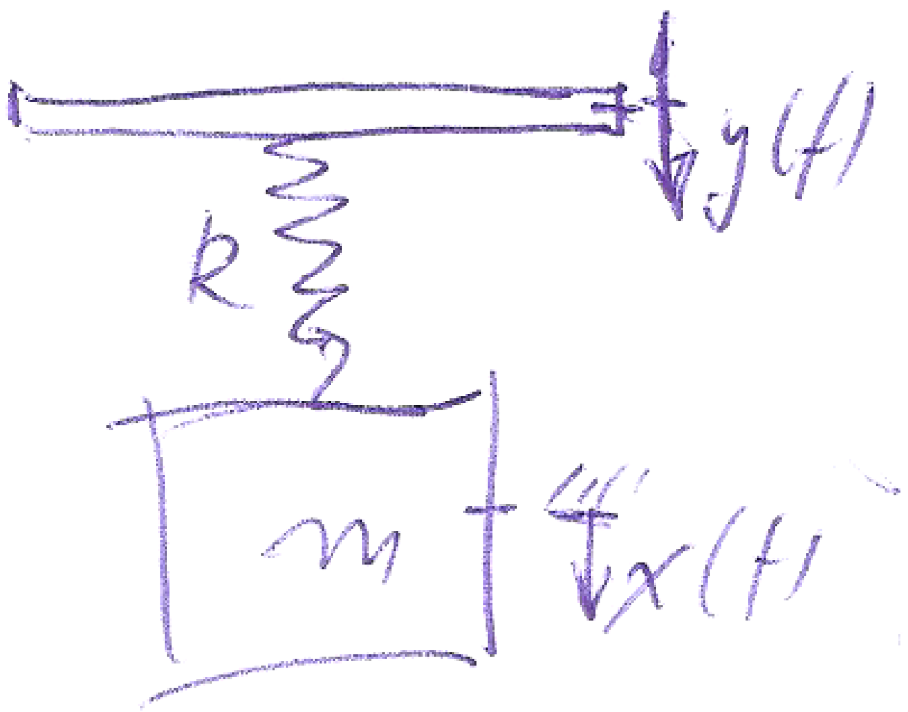
$$x_{p,n}(t) = X_n \operatorname{sen}(n\omega_f t + \alpha - \psi)$$

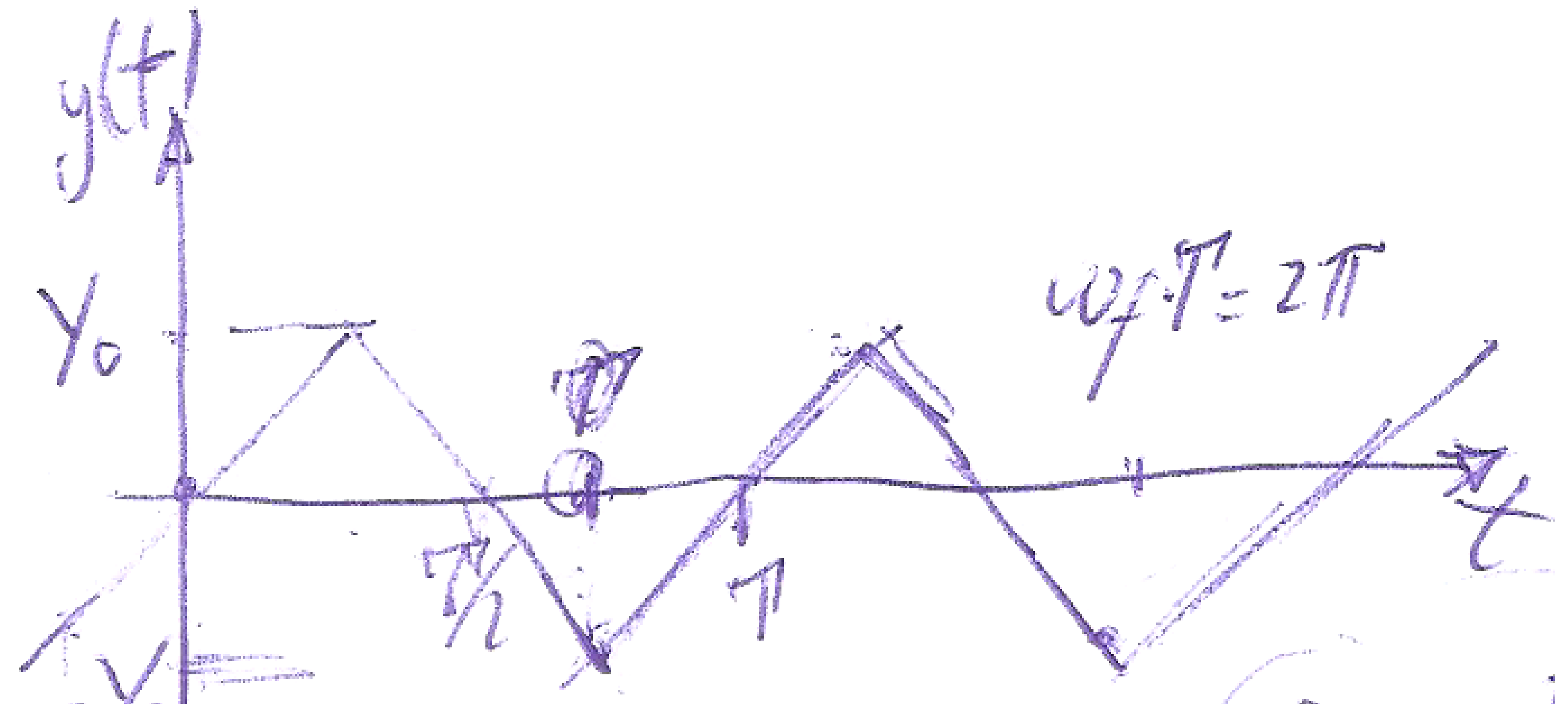
$$\operatorname{Tg}\alpha = \frac{a_n}{b_n}$$

Quando se tem uma vibração com vários componentes em frequência, e sendo múltiplas da frequência fundamental define-se uma amplitude efetiva, ou uma velocidade efetiva da vibração

$$X_{ef} = \sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{2}}$$

Se estivéssemos medindo a velocidade de vibração com um ~~medido~~ sensor que dá uma tensão proporcional à velocidade a velocidade média efetiva, corresponde à tensão média efetiva

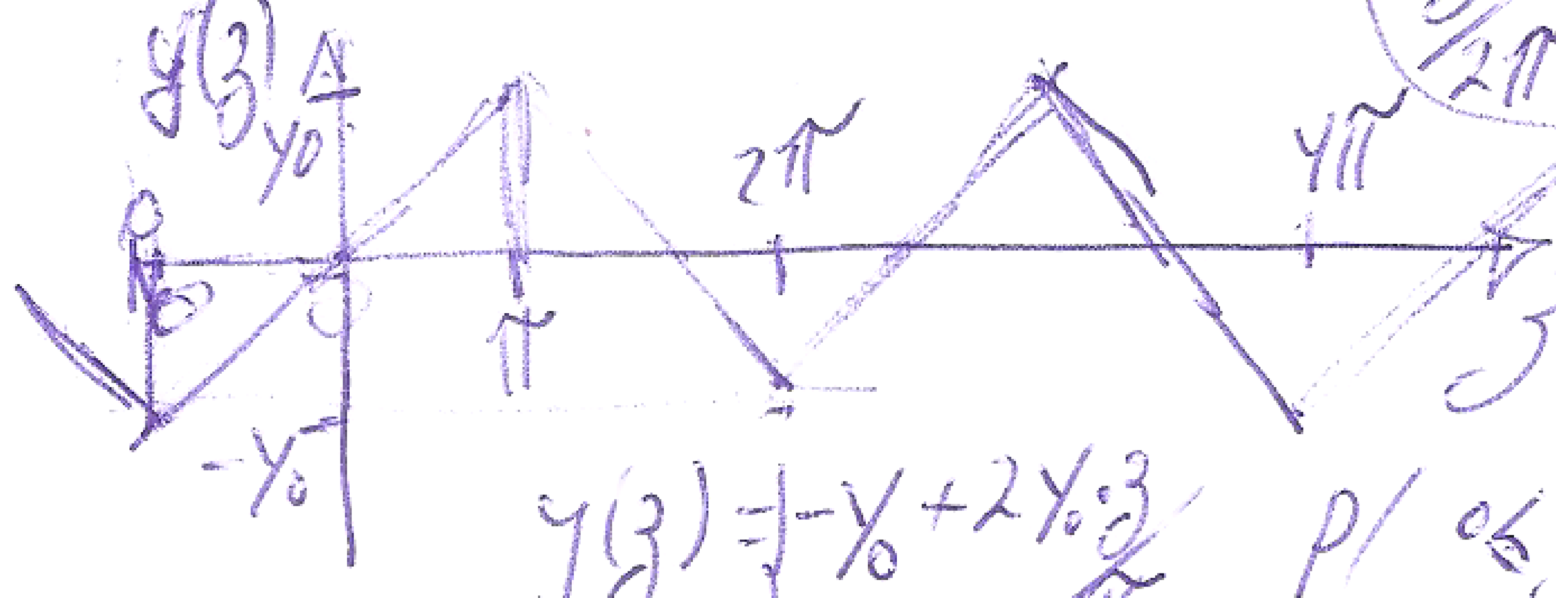




$\frac{z}{2\pi} = \frac{t}{T}$

$z = \omega_f(t + \frac{T}{4})$

$$m\ddot{x} + kx = ky(t)$$



$$y(z) = \begin{cases} -Y_0 + \frac{2Y_0 z}{\pi} & p/\ 0<z<\pi \\ 3Y_0 - \frac{2Y_0 z}{\pi} & p/\ \pi<z<2\pi \end{cases}$$

$a_0 = 0$

$$a_i = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\left(-Y_0 + \frac{2Y_0 z}{\pi}\right)\cdot\cos(iz)\,dz + \int_{\pi}^{2\pi}\left(3Y_0 - \frac{2Y_0 z}{\pi}\right)\cdot\cos(iz)\,dz\right] =$$

$$= \frac{Y_0}{\pi}\left[(-)\int_0^{\pi}\cos(iz)\,dz + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} z\cos(iz)\,dz + 3\cdot\int_{\pi}^{2\pi}\cos(iz)\,dz - \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} z\cos(iz)\,dz\right]$$

mas $\int \underbrace{z}_{u}\underbrace{\cos(iz)dz}_{dv} = z\frac{\operatorname{sen}(iz)}{i} - \int\frac{\operatorname{sen}(iz)}{i}dz = z\frac{\operatorname{sen}(iz)}{i} + \frac{\cos(iz)}{i^2}$

$$a_i = \frac{Y_0}{\pi}\left[-\frac{\operatorname{sen}(iz)}{i}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\left[z\frac{\operatorname{sen}(iz)}{i} + \frac{\cos(iz)}{i^2}\right]_0^{\pi} + 3\frac{\operatorname{sen}(iz)}{i}\Big|_{\pi}^{2\pi} + \right.$$

$$\left. -\frac{2}{\pi}\left(z\frac{\operatorname{sen}(iz)}{i} + \frac{\cos(iz)}{i^2}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = \left[\underbrace{\frac{-2\cdot 2}{\pi i^2}}_{i\ \text{impar}} - \underbrace{\frac{2}{\pi i^2}2}_{i\ \text{impar}}\right]\cdot\frac{Y_0}{\pi}$$

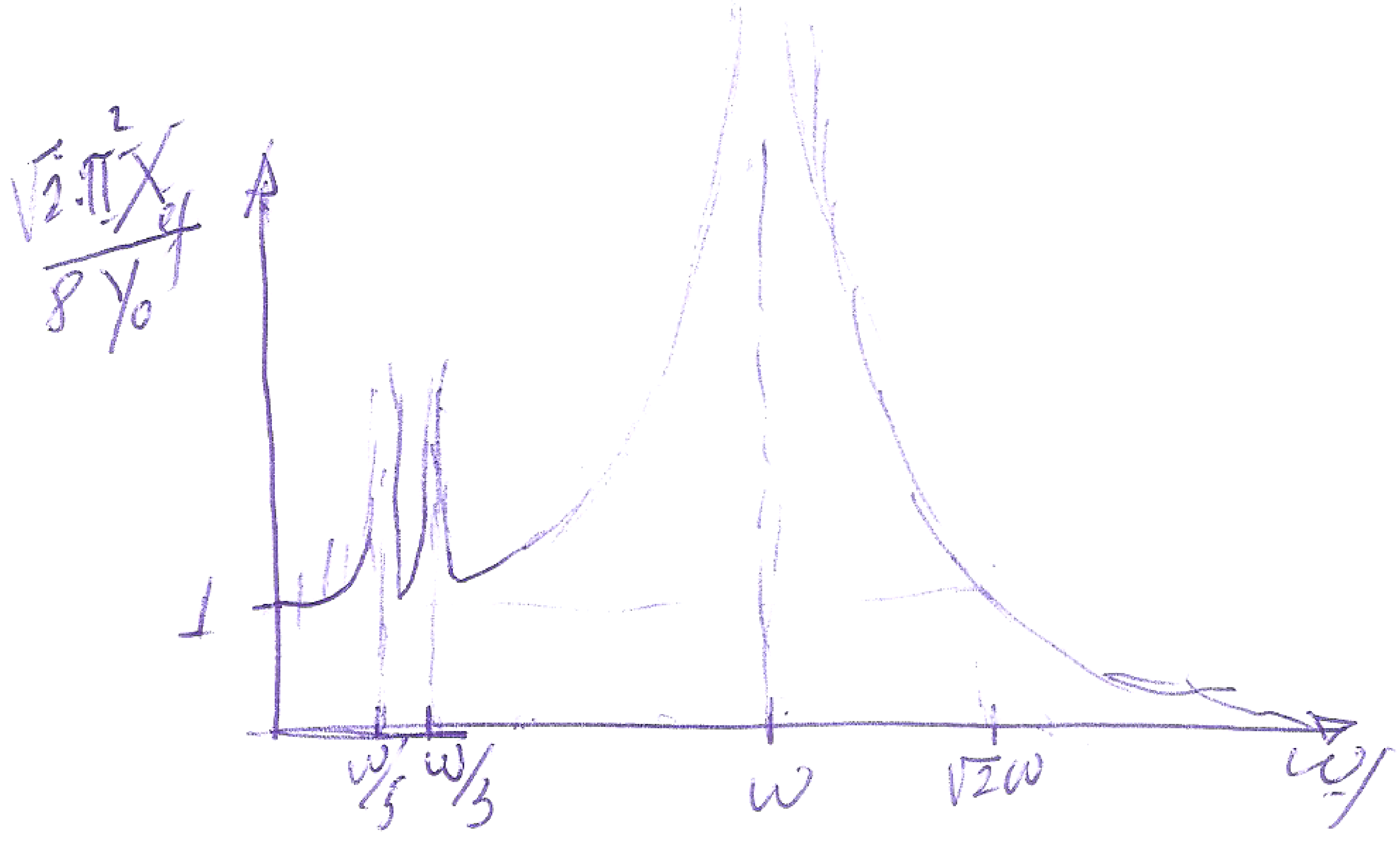
$$\boxed{a_i = \frac{-8Y_0}{\pi^2 i^2}}$$ par $i = 1, 3, 5 \ldots$

$$y(z) = \frac{-8Y_0}{\pi^2}\left(\cos z + \frac{\cos(3z)}{9} + \frac{\cos(5z)}{25} + \ldots\right)$$

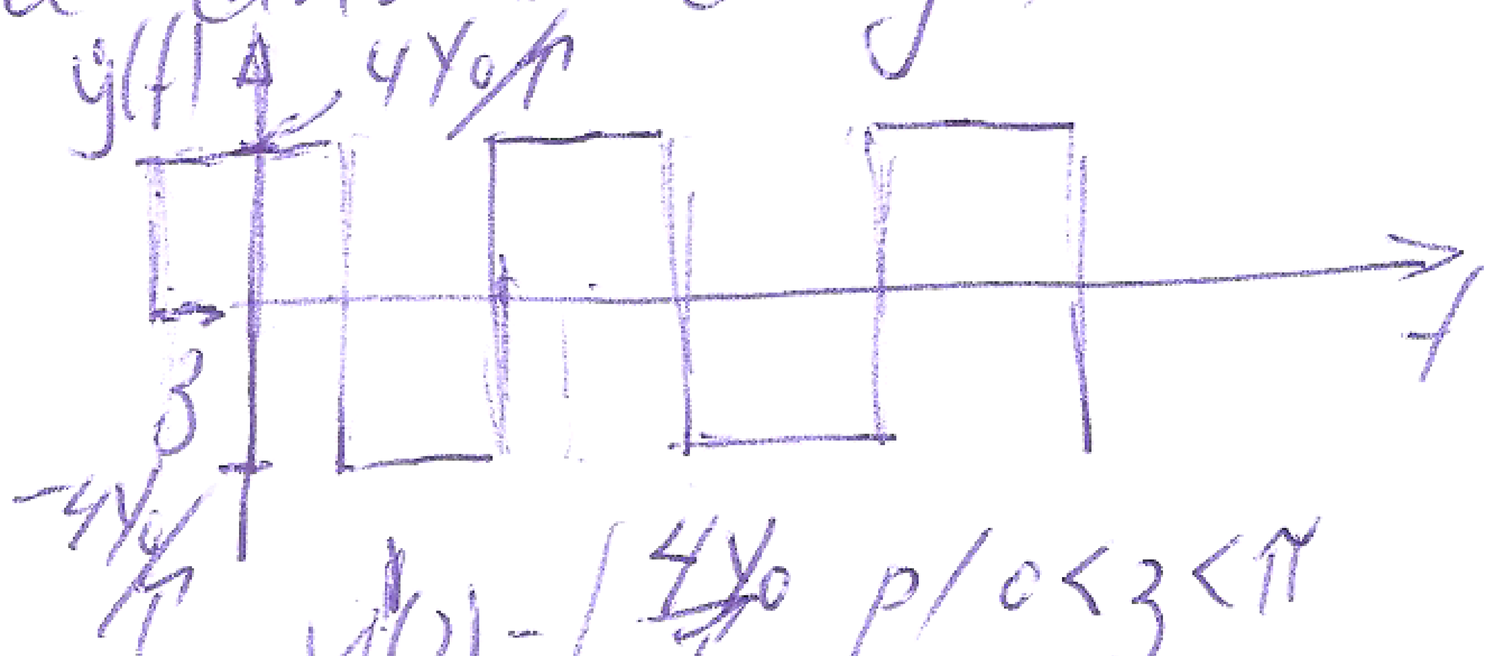
$$y(t) = -\frac{8Y_0}{\pi^2}\left\{\cos(\omega_f(t+\tfrac{T}{4})) + \frac{\cos(3\omega_f(t+\tfrac{T}{4}))}{9} + \frac{\cos(5\omega_f(t+\tfrac{T}{4}))}{25} + \ldots\right\}$$

$$X_{p_1} = \frac{\frac{-8Y_0}{\pi^2}}{1-\left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2};\quad X_{p_3} = \frac{-8Y_0}{9\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{3\omega_f}{\omega}\right)^2};\quad X_{p_5} = \frac{-8Y_0}{25\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{5\omega_f}{\omega}\right)^2}$$

$$X_t = \frac{8Y_0}{\pi^2}\sqrt{\left(\frac{1}{1-\left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2}\right)^2 + \frac{1}{81}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{3\omega_f}{\omega}\right)^2}\right)^2 + \frac{1}{25^2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{5\omega_f}{\omega}\right)^2}\right)^2}$$



Observamos que a derivada de $y(t)$



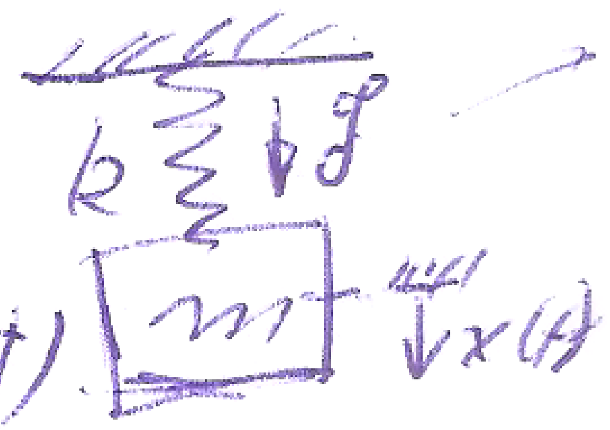
$$y'(z) = \begin{cases} \frac{4Y_0}{\pi} & p/\ 0<z<\pi \\ -\frac{4Y_0}{\pi} & p/\ \pi<z<2\pi \end{cases}$$

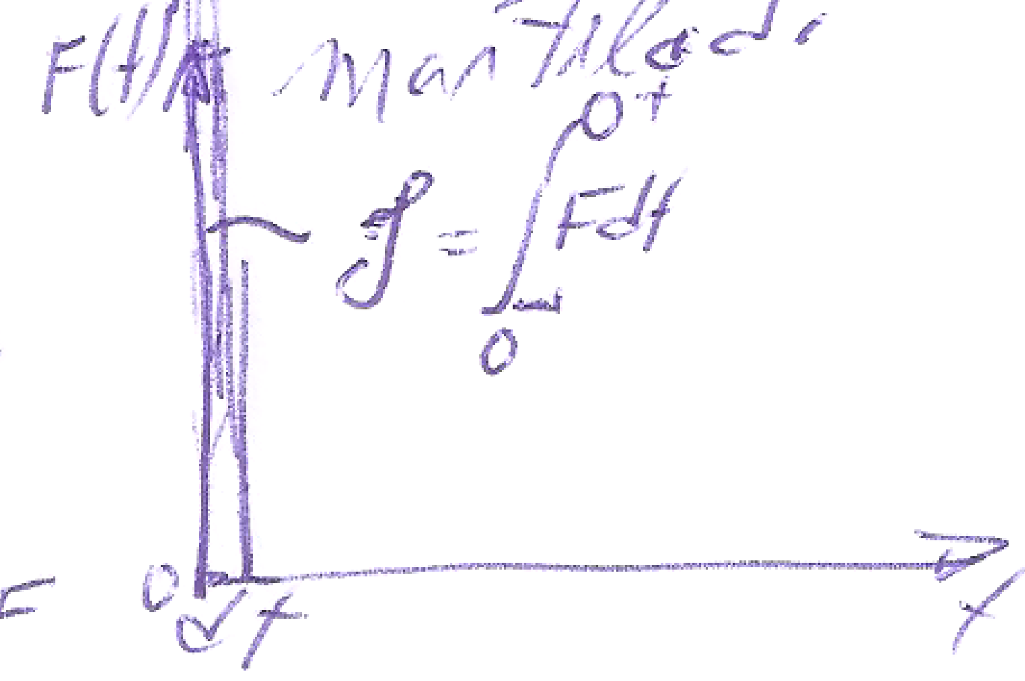
tornaria muito mais simples as integrações

Após achar a série de senos e cossenos integramos a solução

Excitação qualquer (resposta)

Impulso





$$m\ddot{x}+kx=0$$

$$x(t)=A\,\text{sen}(\omega t)+B\cos(\omega t)$$

$$x(0^-)=0$$

$$\dot{x}(0^-)=0$$

TMB $\frac{d}{dt}(mv)=F$

$$\int d(m\cdot v)=\int F\,dt$$

$$m(\dot{x}(0^+)-\dot{x}(0^-))=\mathcal{J} \therefore \dot{x}(0^+)=\frac{\mathcal{J}}{m} \text{ e } x(0^+)=0$$

$x(t)=\frac{1}{m\omega}\,\text{sen}(\omega t)$ para $\mathcal{J}$ no $t=0$