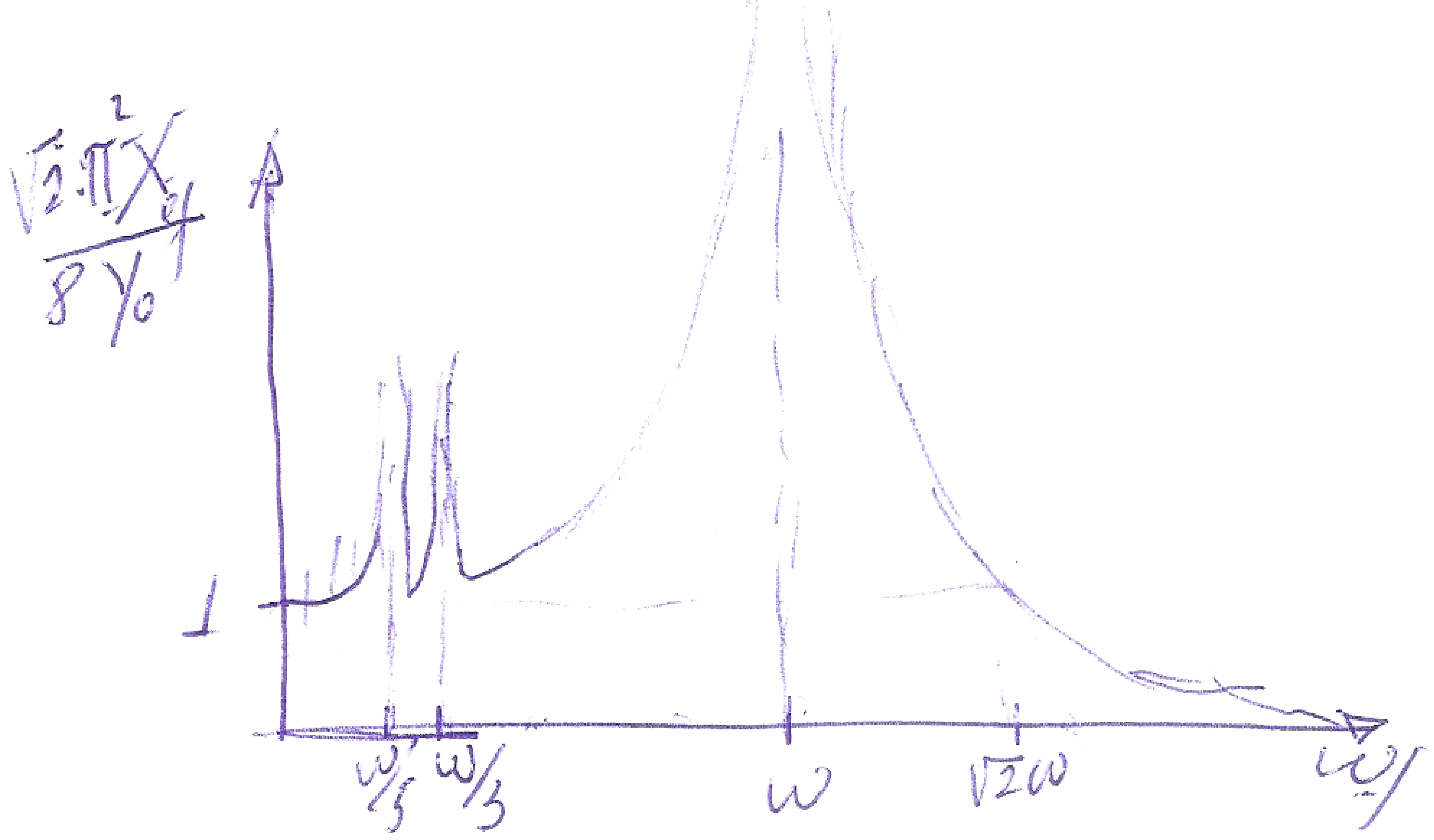
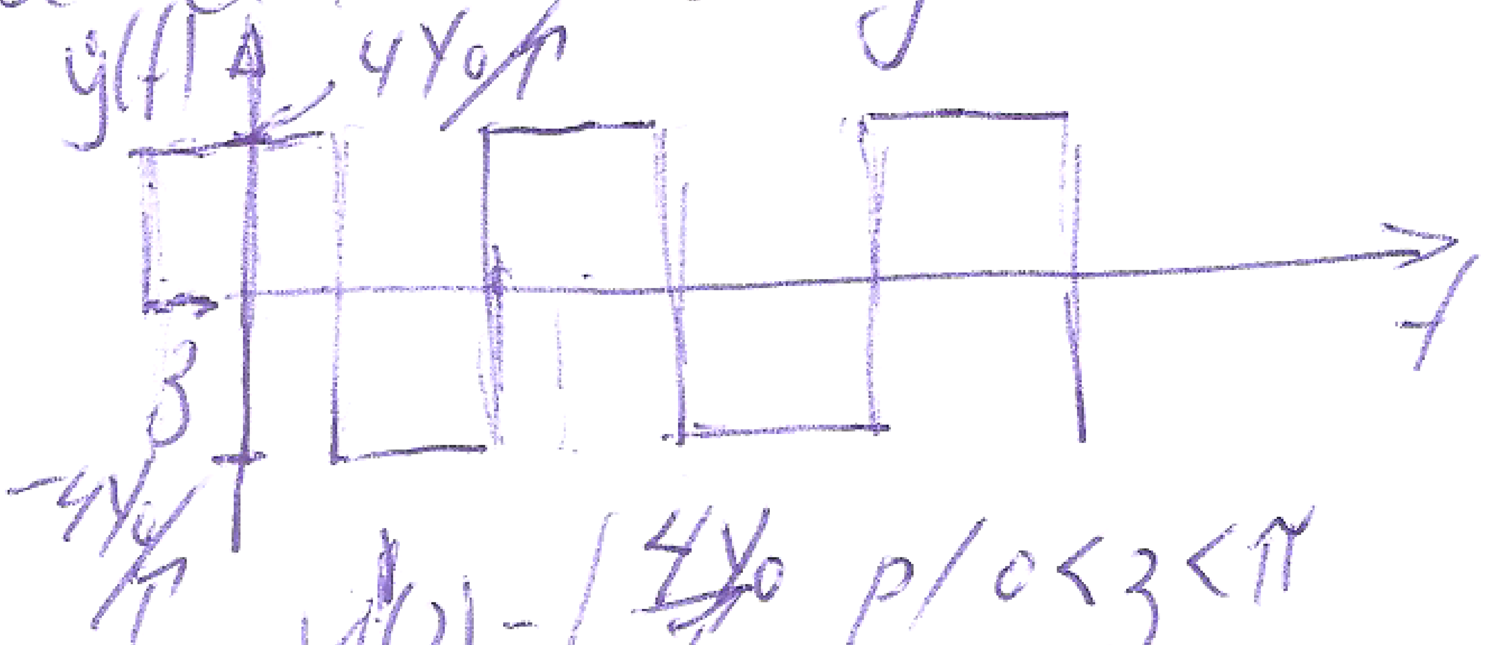


Observamos que a derivada de y(t)

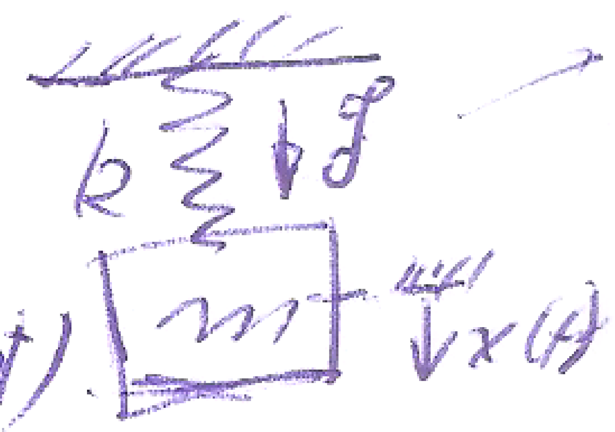


$$y'(\xi) = \begin{cases} \frac{4Y_0}{\pi} & p/\ 0<\xi<\pi \\ -\frac{4Y_0}{\pi} & p/\ \pi<\xi<2\pi \end{cases}$$

tornaria muito mais simples as integrações. Após achar a série de senos e cossenos integramos a solução

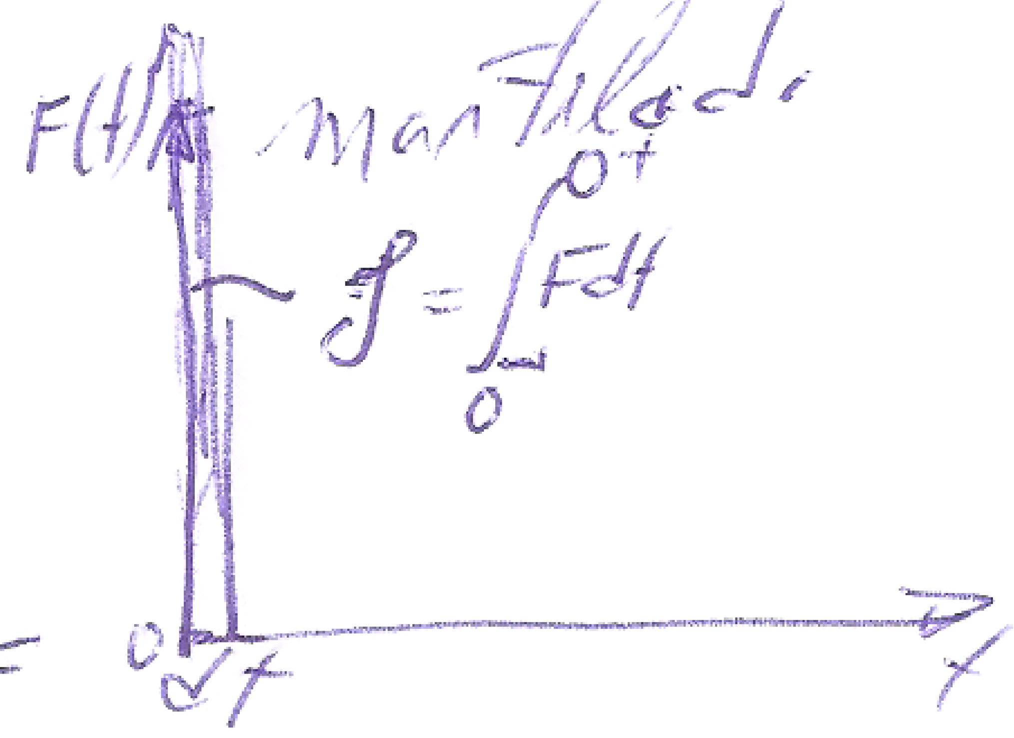
Excitação qualquer (resposta)

Impulso



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$



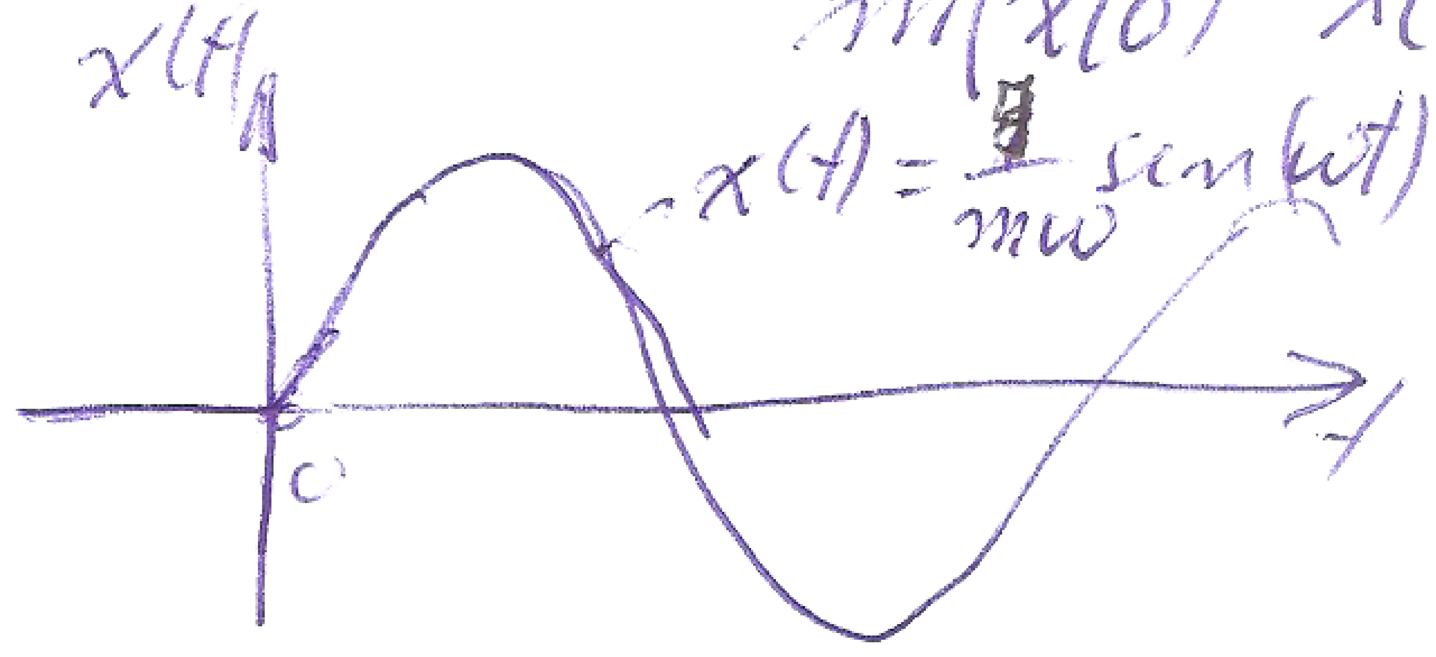
$$x(0^-) = 0$$

$$\dot{x}(0^-) = 0$$

TMB $\left\{ \frac{d}{dt}(mv) = F \right.$

$$\int d(mv) = \int F\,dt$$

$$m(\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-)) = \mathcal{J} \therefore \dot{x}(0^+) = \frac{\mathcal{J}}{m} \text{ e } x(0^+) = 0$$



$x(t) = \frac{\mathcal{J}}{m\omega}\sin(\omega t)$ para $\mathcal{J}$ no $t=0$

$$\dot{x}(0^+) = \frac{\mathcal{J}}{m} = A\omega \therefore \boxed{A = \frac{\mathcal{J}}{m\omega}}$$

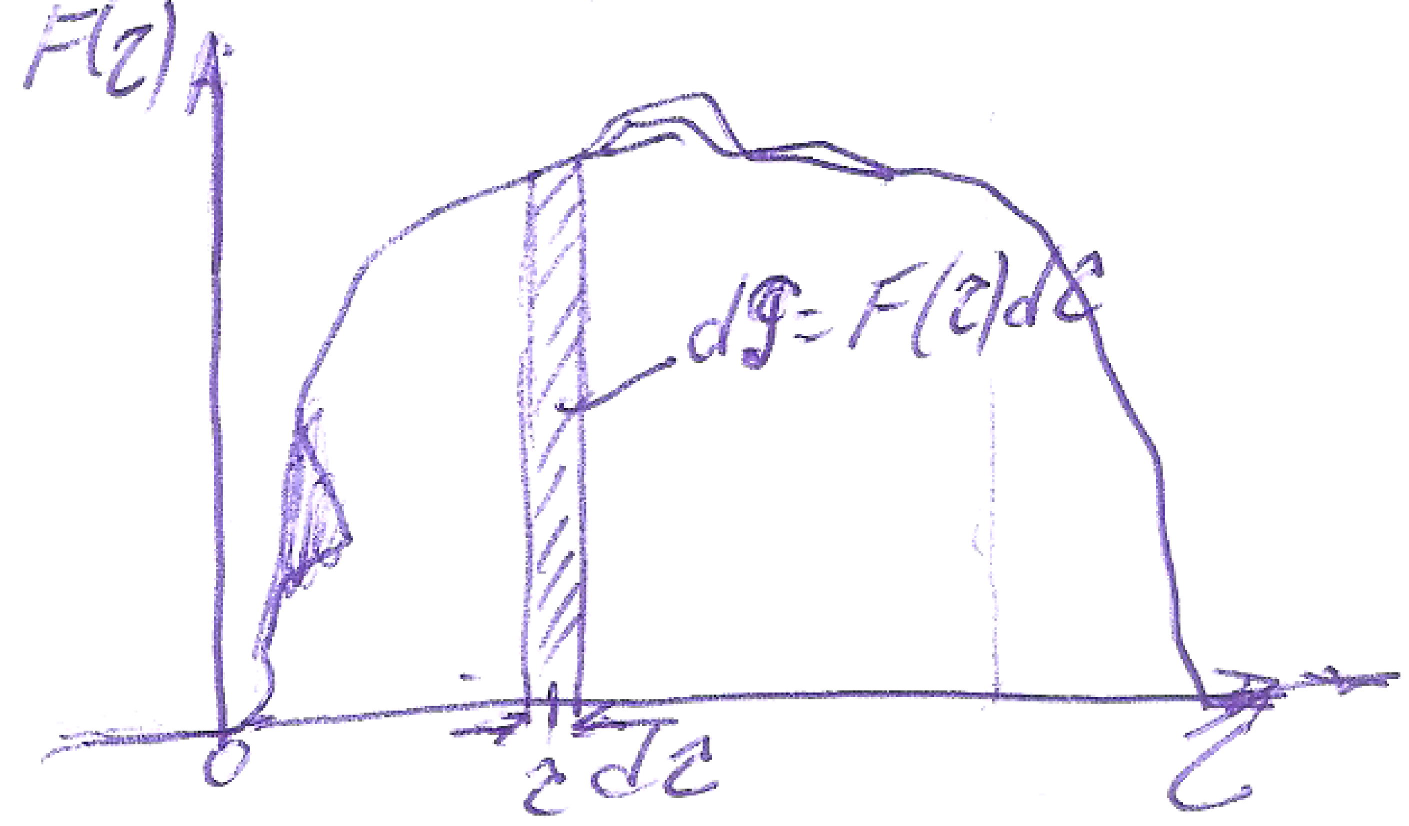
$$x(0^+) = \boxed{B = 0}$$

Se aplicássemos o impulso no instante τ genérico ($\neq 0$), como ficaria a resposta do sistema?

$$x(t) = \frac{I}{m\omega}\,\mathrm{sen}(\omega(t-\tau)) \quad p/\ t>\tau$$

τ é o instante da excitação e t o tempo da resposta do sistema.

Digamos agora que temos uma força de excitação genérica



Se considerarmos o valor da excitação no instante τ e observarmos o impulso elementar correspondente $dI = F(\tau)d\tau$, ele provocará uma resposta elementar $dx = \frac{dI}{m\omega}\,\mathrm{sen}(\omega(t-\tau))$, para qualquer $t>\tau$, pois o sistema é linear, e a resposta é proporcional à excitação. Além disso, pelo mesmo motivo (linearidade da Equ.dif.) os efeitos de excitações disjuntas

Portanto, a resposta do sistema até o instante t, se no instante 0 estava parado com $x(0)=0$ e $\dot{x}(0)=0$ será:

$$x(t) = \int_0^t \frac{dI}{m\omega}\,\mathrm{sen}(\omega(t-\tau)) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\,\mathrm{sen}(\omega(t-\tau))\,d\tau \quad (1)$$

Observar que só os efeitos dos impulsos elementares aplicados antes do instante (t) aparecem na integração, e que o integrando é em τ não em t.

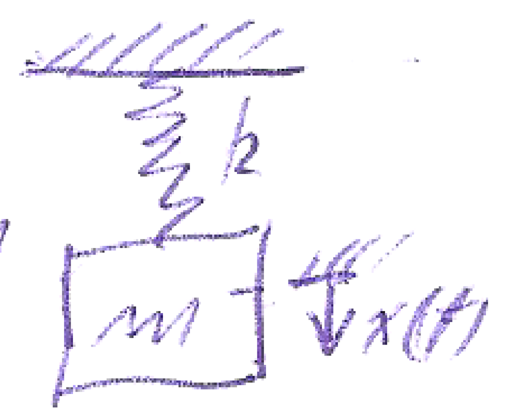
O nosso sistema é um sistema livre [$m\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$], que ao invés de estar forçado por uma "$F(t)$" está submetido à uma infinidade de "martelladas" elementares que desenhem "$F(\tau)$".

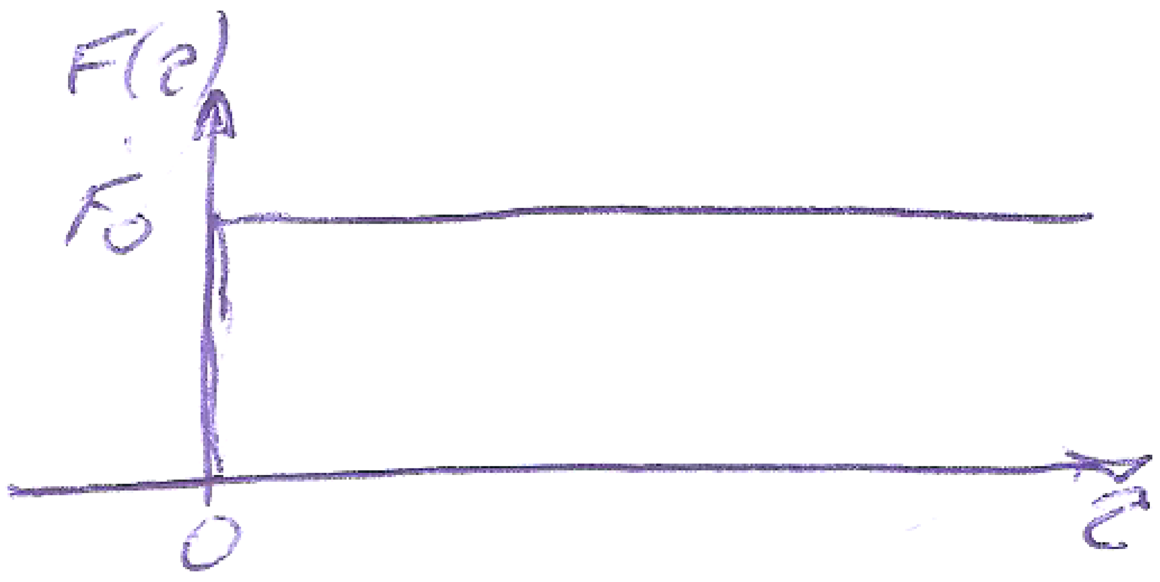
A integral (1) é chamada de Duhamel ou "integral da convolução", que está na origem da transformada de Laplace.

Notem quão poderosa é essa abordagem, e que todo o comportamento dinâmico do sistema está contido na equação diferencial do "sistema livre".

Exemplo:

$\omega = \sqrt{k/m}$





Digamos que a massa estava parada até o instante $\tau = 0$ e que passamos a aplicar uma força $F_0 = cte$ a partir de $\tau = 0$

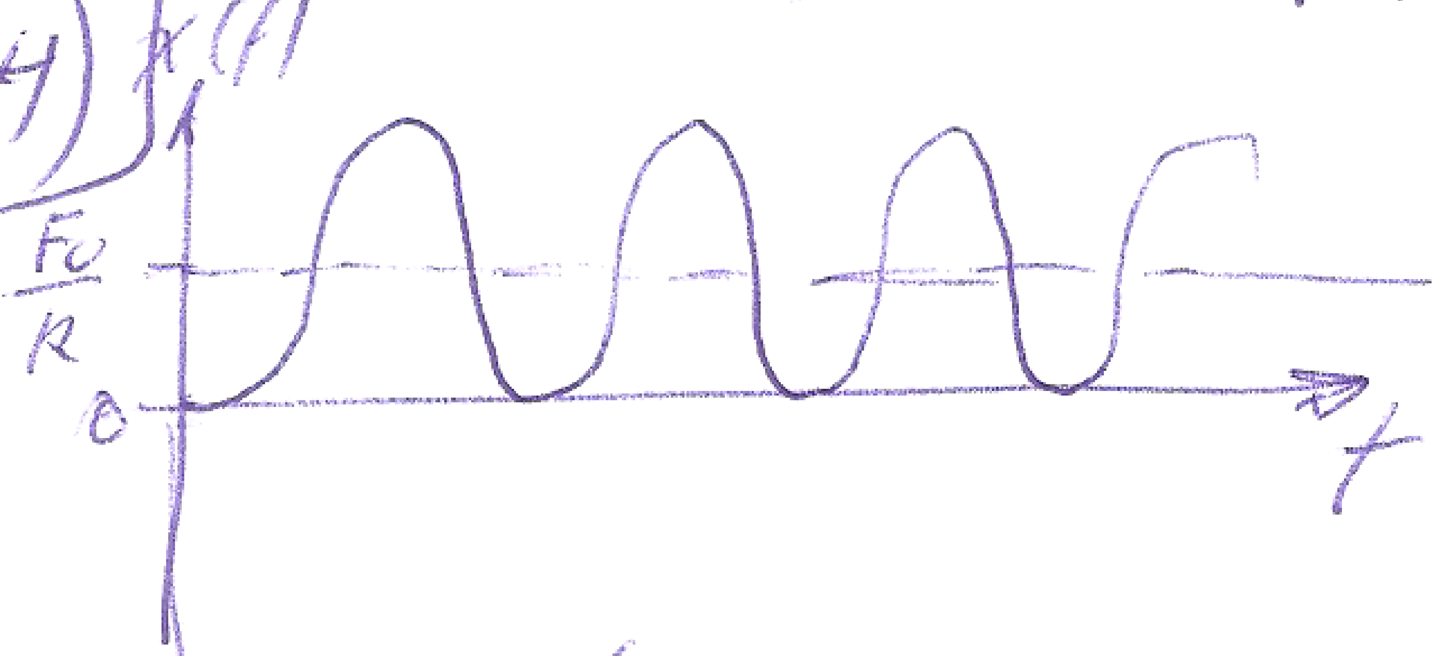
τ é o tempo da excitação; t é o tempo do sistema.

Calculando a resposta do sistema em um instante $t > 0$ pela integral de convolução

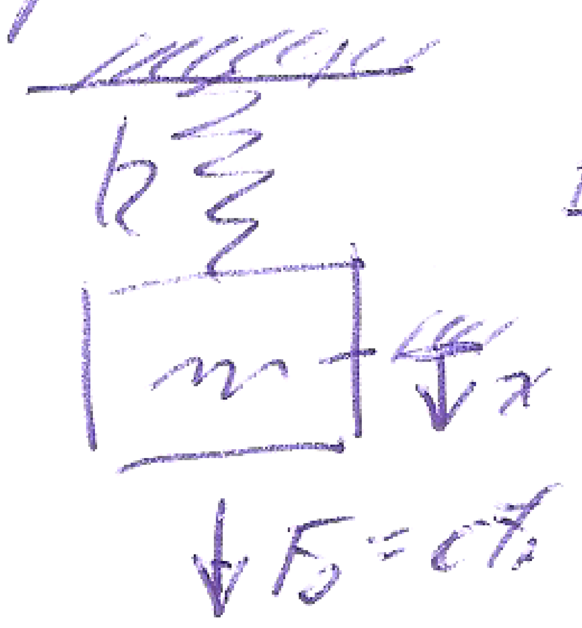
$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \cdot \int_0 F_0 \, \mathrm{sen}(\omega(t-\tau))\, d\tau = \frac{-F_0}{m\omega} \int_t^0 \mathrm{sen}(\omega(t-\tau))\, d(t-\tau) =$$

$$= \frac{-F_0}{m\omega^2} \int_{\omega t}^0 \mathrm{sen}(\omega(t-\tau))\, d(\omega(t-\tau)) = \frac{F_0}{m\omega^2} \cdot \cos(\xi) \Big|_{\omega t}^0 \therefore$$

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{k} \cdot (1 - \cos(\omega t))}$$



O mesmo problema poderia ter sido resolvido com a aplicação de uma força F_0 constante



Equ. dif. $\Rightarrow m\ddot{x} + kx = F_0$

$x_h(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$

$x_p(t) = F_0/k$

$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t) + F_0/k$

Condições iniciais p/ $t = 0$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)$

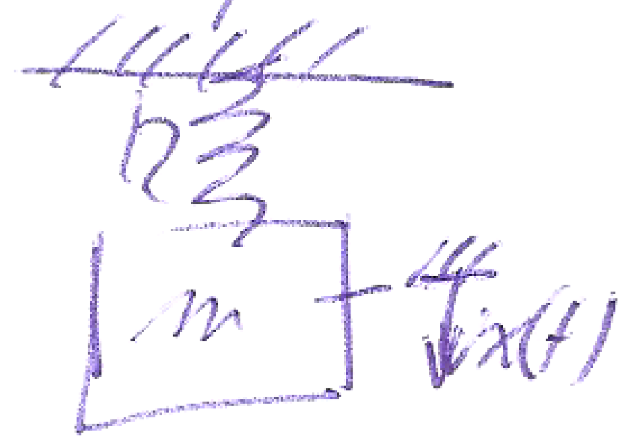
$x(0) = B + F_0/k = 0 \therefore \boxed{B = -F_0/k}$

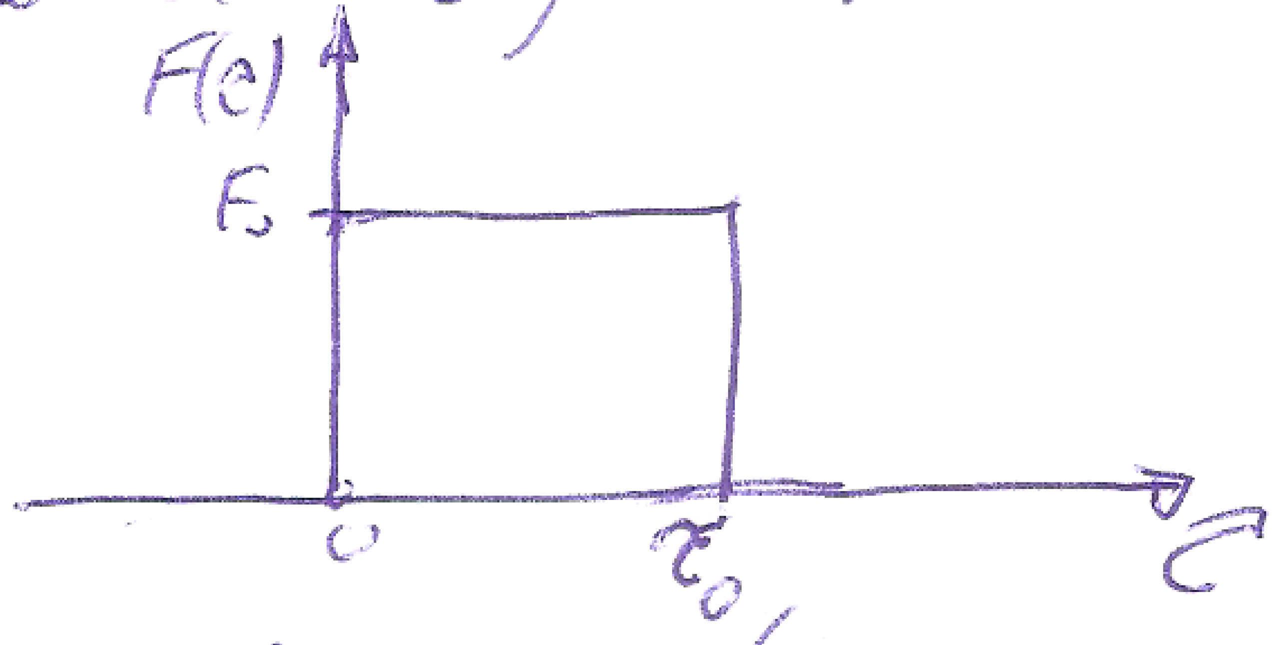
$\dot{x}(0) = 0 = A\omega \therefore \boxed{A = 0}$

$x(t) = -\frac{F_0}{k}\cos(\omega t) - \frac{F_0}{k}$

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{F_0}{k}\right) \cdot (1 - \cos(\omega t))}$$ mesma resposta

Se aplicássemos um degrau limitado no tempo





digamos que queremos saber como o sistema se comporta para $t > \tau_0$ (duração do degrau)

$$x(t) = \frac{1}{m\omega}\left\{\int_0^{\tau_0} F_0\,\mathrm{sen}(\omega(t-\tau))\,d\tau + \int_{\tau_0} 0 \times \mathrm{sen}(\omega(t-\tau))\,d\tau\right\} =$$

$$= \frac{-F_0}{m\omega^2}\int_{\omega t}^{\omega(t-\tau_0)} \mathrm{sen}(\omega(t-\tau))\,d(\omega(t-\tau)) - \cancel{\frac{0\times}{m\omega^2}\int_{\omega(t-\tau_0)}^{0} \mathrm{sen}(\omega(t-\tau))\,d(\omega(t-\tau))} =$$

$$= +\frac{F_0}{k}\cdot\cos z\Big|_{\omega t}^{\omega(t-\tau_0)} + \cancel{\frac{0}{k}\cos z\Big|_{\omega(t-\tau_0)}^{0}} = \frac{F_0}{k}\left[\cos(\omega(t-\tau_0)) - \cos(\omega t)\right] =$$

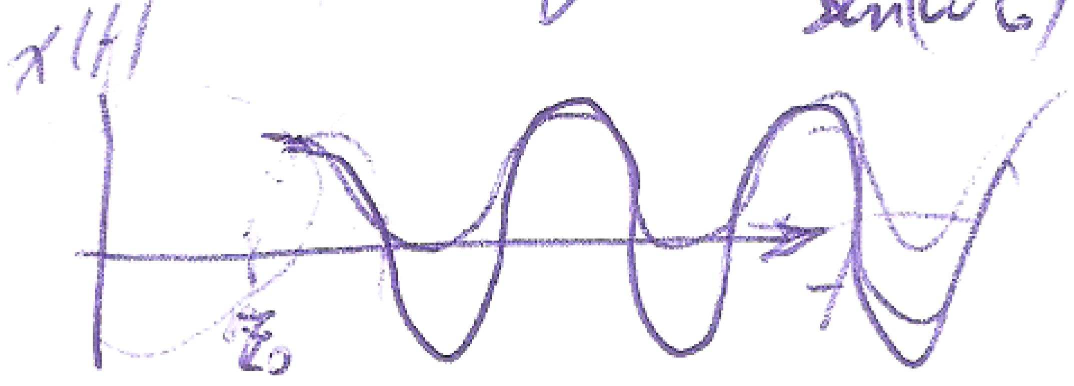
$\cancel{+1-\cos\omega(t-\tau_0)}$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\cdot\left[\cos(\omega t)\cdot\cos(\omega\tau_0) + \mathrm{sen}(\omega t)\cdot\mathrm{sen}(\omega\tau_0) - \cos(\omega t)\right] =$$

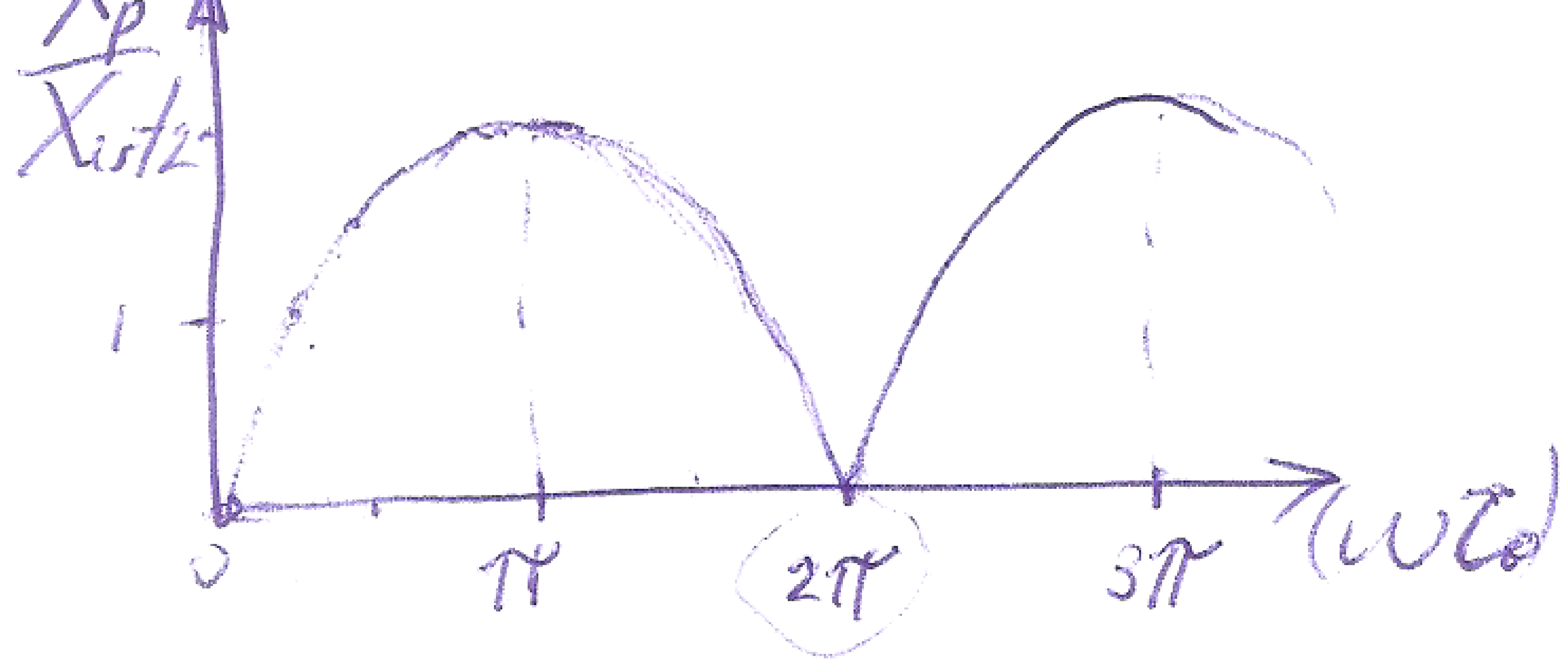
$$= \frac{F_0}{k}\left[\mathrm{sen}(\omega\tau_0)\cdot\mathrm{sen}(\omega t) + (\cos(\omega\tau_0)-1)\cdot\cos(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{F_0}{k}\sqrt{\mathrm{sen}^2(\omega\tau_0) + (\cos(\omega\tau_0)-1)^2}\cdot\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$$ c/ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{-(1-\cos(\omega\tau_0))}{\mathrm{sen}(\omega\tau_0)}$

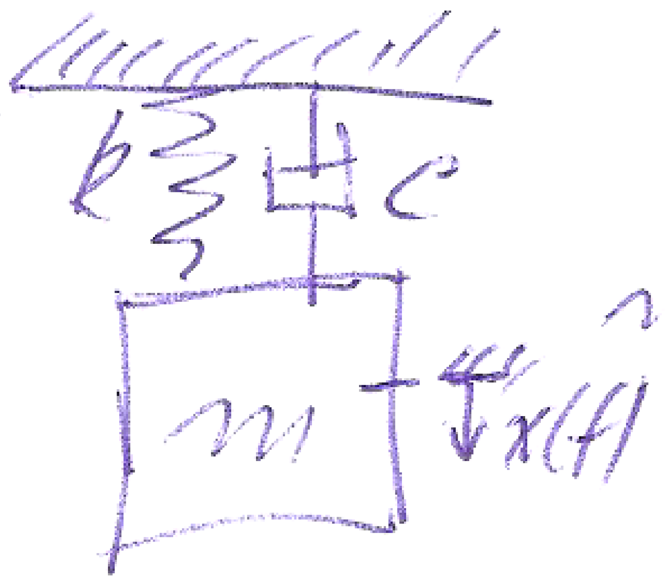
$$x(t) = \underbrace{\frac{F_0}{k}\sqrt{2-2\cos(\omega\tau_0)}}_{X_p}\cdot\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$$



$$\frac{X_p}{X_{est}} = \sqrt{2\cdot(1-\cos(\omega\tau_0))}$$



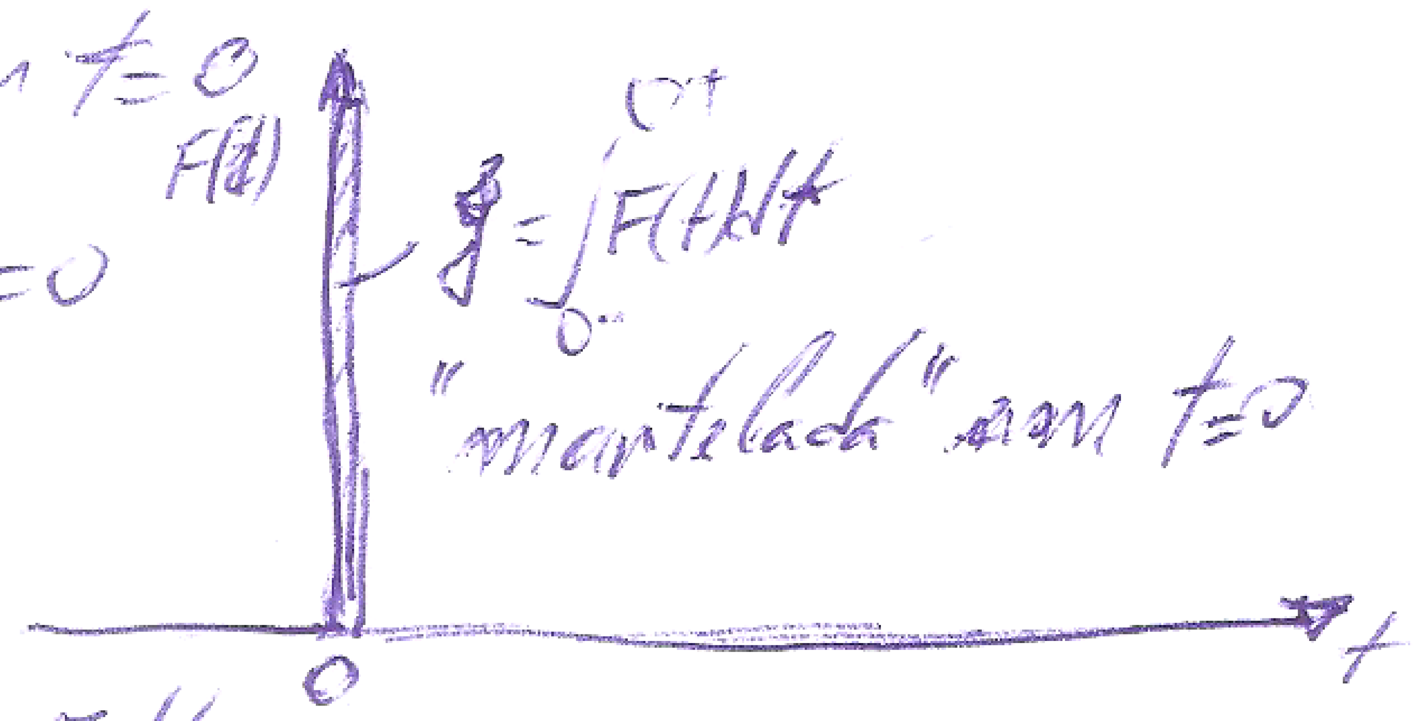
Resposta do sistema amortecido a excitação qualquer



Impulso em $t=0$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\mathcal{I}=\int_0^{0^+}F(t)\,dt$$

"martelada" em $t=0$

$$\dot{x}(0^-)=0$$
$$x(0^-)=0$$

$$d(mv)=F\cdot dt$$

$$m(v_{0^+}-v_{0^-})=\int_0^{0^+}F\,dt=\mathcal{I}$$

$$m(\dot{x}(0^+)-\dot{x}(0^-))=\mathcal{I}\ \therefore\ \dot{x}(0^+)=\frac{\mathcal{I}}{m}\ ;\ x(0^+)=0$$

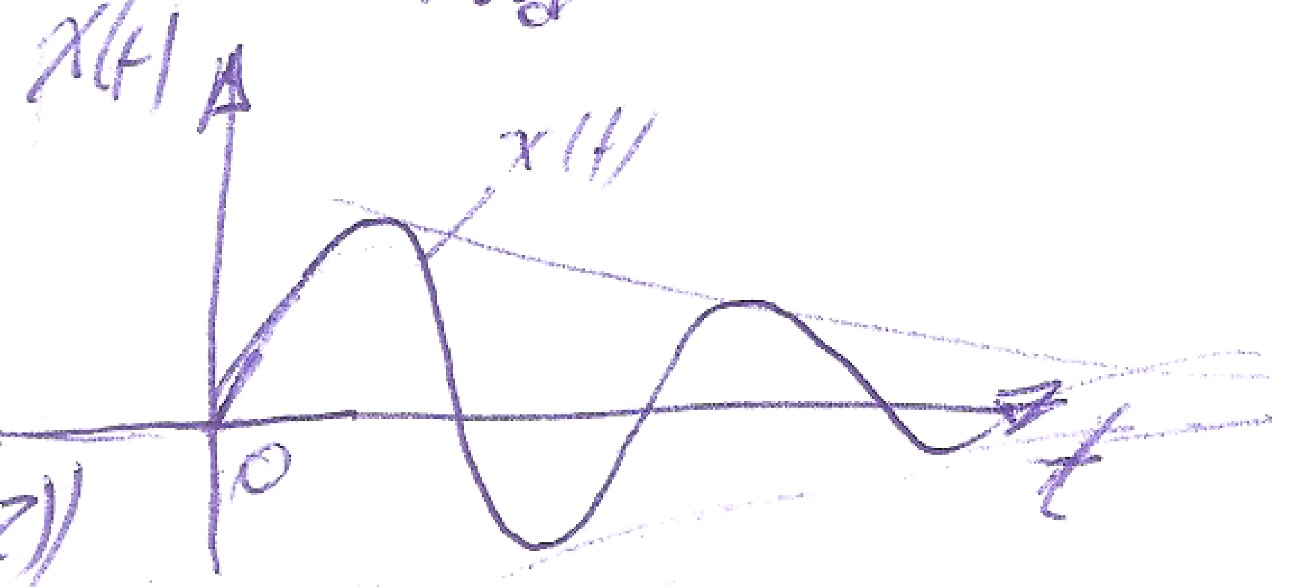
$$x(t)=[A\,sen(\omega_d t)+B\cos(\omega_d t)]\,e^{-\xi\omega t}\quad p/\ \xi<1;\ \omega_d=\omega\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\xi=\frac{c}{2\sqrt{k\cdot m}}$$

$$\dot{x}(t)=-\xi\omega\cdot e^{-\xi\omega t}[A\,sen(\omega_d t)+B\cos(\omega_d t)]+$$
$$+e^{-\xi\omega t}\cdot[A\omega_d\cos(\omega_d t)-B\omega_d\,sen(\omega_d t)]$$

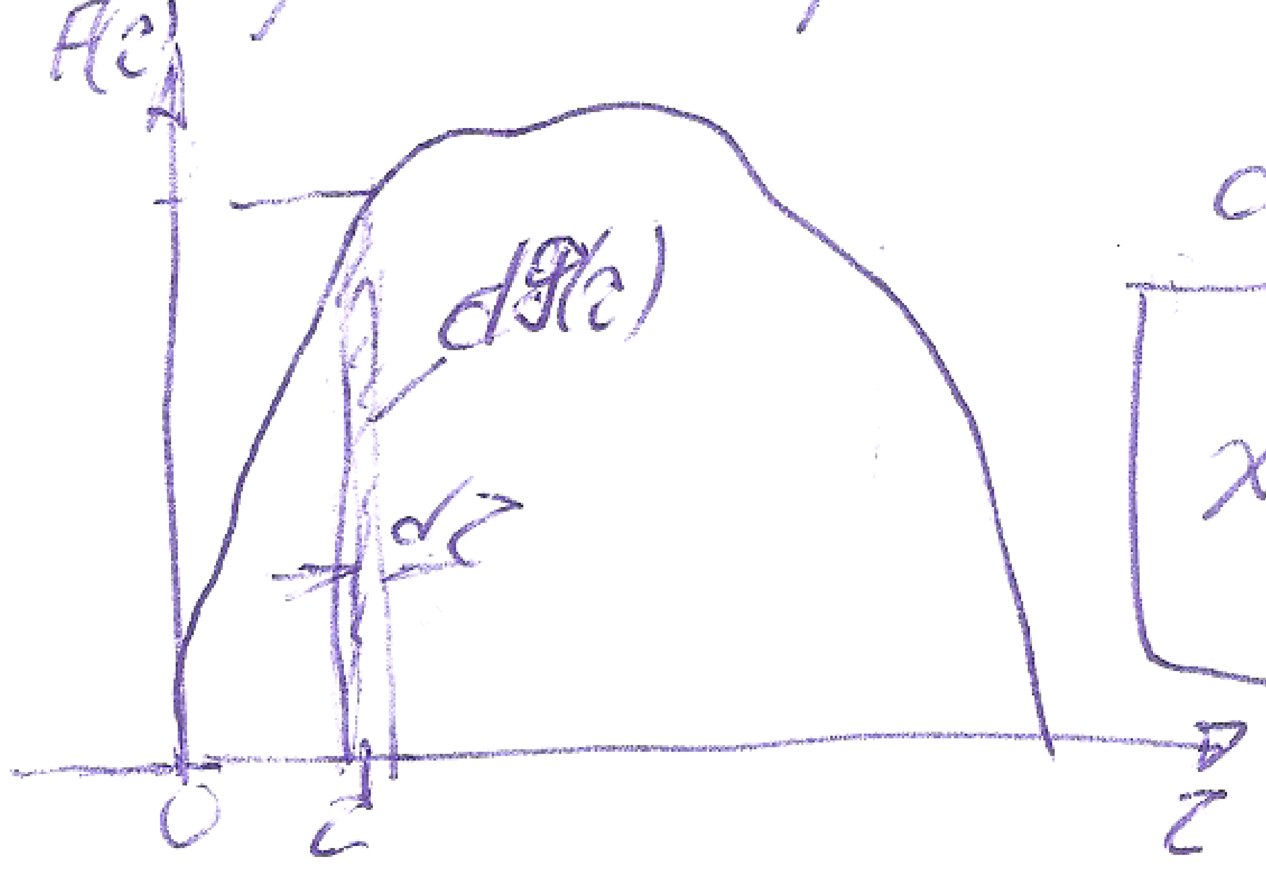
C. Iniciais
$$\begin{cases} x(0^+)=\boxed{0=B} \\ \dot{x}(0^+)=\frac{\mathcal{I}}{m}=A\omega_d\ \therefore\ A=\frac{\mathcal{I}}{m\omega_d} \end{cases}$$

$$x(t)=\frac{\mathcal{I}}{m\omega_d}\cdot e^{-\xi\omega t}\cdot sen(\omega_d t)$$



Se fosse aplicado em τ
$$x(t)=\frac{\mathcal{I}}{m\omega_d}\cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cdot sen(\omega_d(t-\tau))$$

Se fôssemos aplicar uma força de excitação qualquer $F(\tau)$



$$dx(t)=\frac{d\mathcal{I}(\tau)}{m\omega_d}\cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cdot sen(\omega_d(t-\tau))$$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{m\omega_d}\cdot\int_0^t F(\tau)\cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cdot sen(\omega_d(t-\tau))\cdot d\tau}$$

integral de convolução.