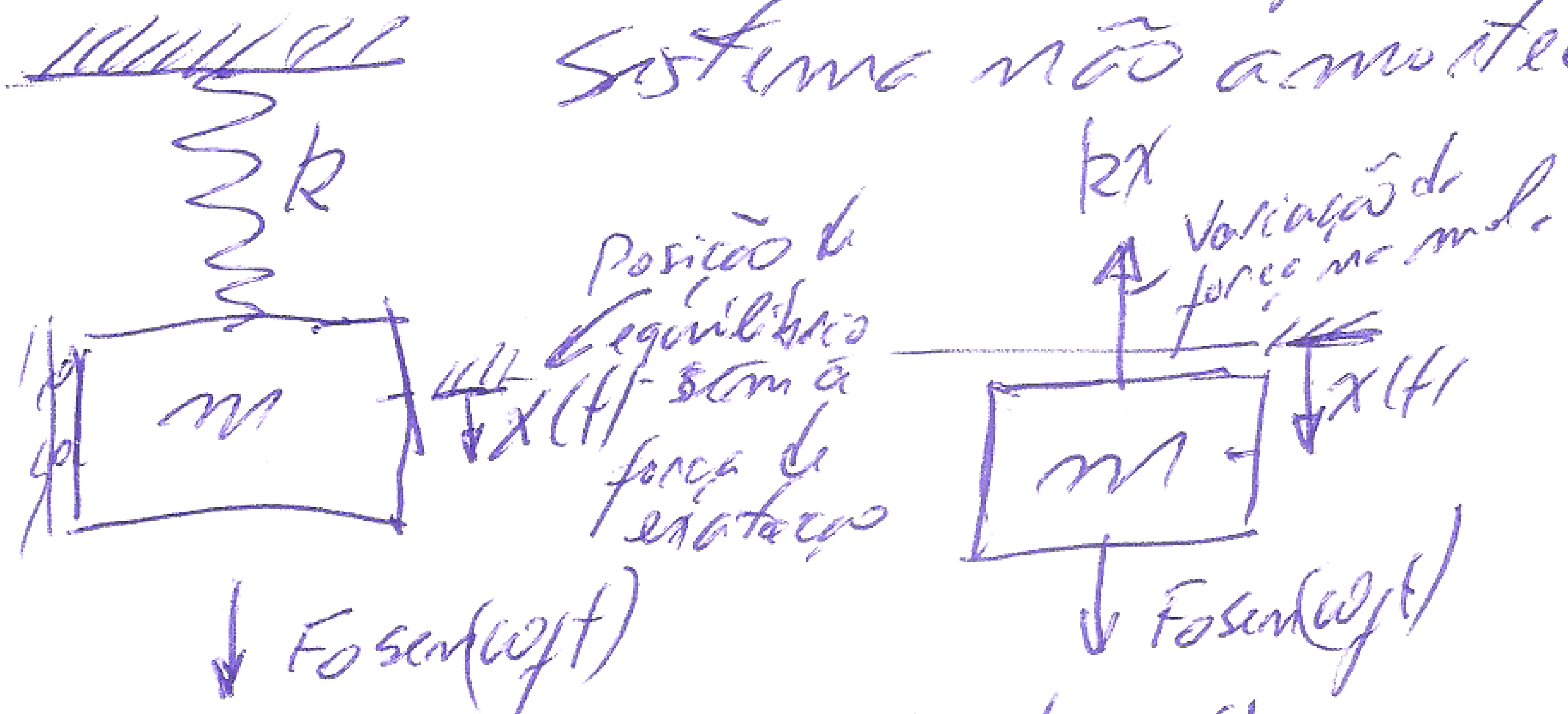
Vibrações forçadas em sistemas com 1 grau de liberdade

Excitação harmônica $F(t) = F_0 \cdot sen(\omega_f t + \cancel{\phi}) \rightarrow F(t) = F_0 \, sen(\omega_f t)$

Sistema não amortecido



$$m\ddot{x}(t) = F_0 \, sen(\omega_f t) - kx(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \, sen(\omega_f t)$$

Calcular a evolução no tempo

$$x_h(t) = A \, sen(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad \text{com } \omega = \sqrt{k/m}$$

$$x_p(t) = X_p \cdot sen(\omega_f t) \quad (?)$$

$$-m\omega_f^2 X_p \, sen(\omega_f t) + k X_p \, sen(\omega_f t) = F_0 \, sen(\omega_f t)$$

$$X_p = \frac{F_0}{k - m\omega_f^2}$$

$$x(t) = A \, sen(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{F_0}{k - m\omega_f^2} \cdot sen(\omega_f t) = X \, sen(\omega t + \phi) + X_p \, sen(\omega_f t)$$ (duas frequências)

C.I. { p/ t=0 ... }

Vamos verificar o comportamento da solução particular

$$x_p(t) = X_p \cdot sen(\omega_f t) = \frac{F_0 \, sen(\omega_f t)}{k - m\omega_f^2} = \frac{\overbrace{F_0/k}^{X_{est}}}{1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2} \cdot sen(\omega_f t)$$

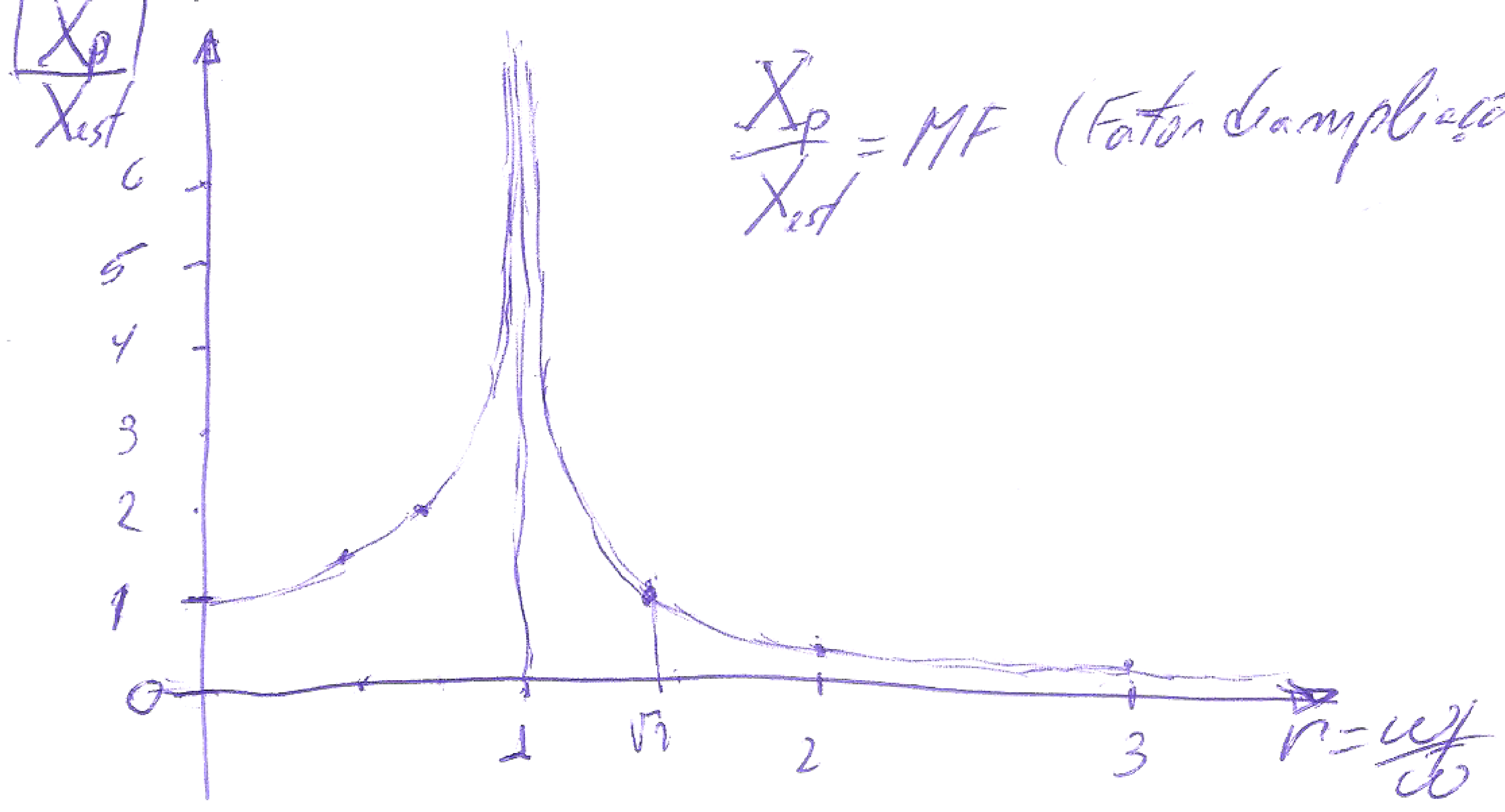
se $\omega_f < \omega$ $x_p(t)$ está em fase com a força

se $\omega_f > \omega$ $x_p(t)$ " " oposição de fase ($X_p < 0$)

$\frac{\omega_f}{\omega} = r$ razão de frequências $\left(\frac{\text{excitação}}{\text{natural}}\right)$

e se $\omega_f = \omega$ o denominador vai a zero e a amplitude em regime permanente tende a infinito (vai crescendo)

$X_p = \frac{X_{est}}{1-r^2}$



$\frac{X_p}{X_{est}} = MF$ (Fator de ampliação)

Solução completa

$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t) + \frac{F_0/k}{1-r^2}\,\text{sen}(\omega_f t)$

$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\,\text{sen}(\omega t) + \frac{(F_0/k)\cdot\omega_f}{1-(\omega_f/\omega)^2}\cos(\omega_f t)$

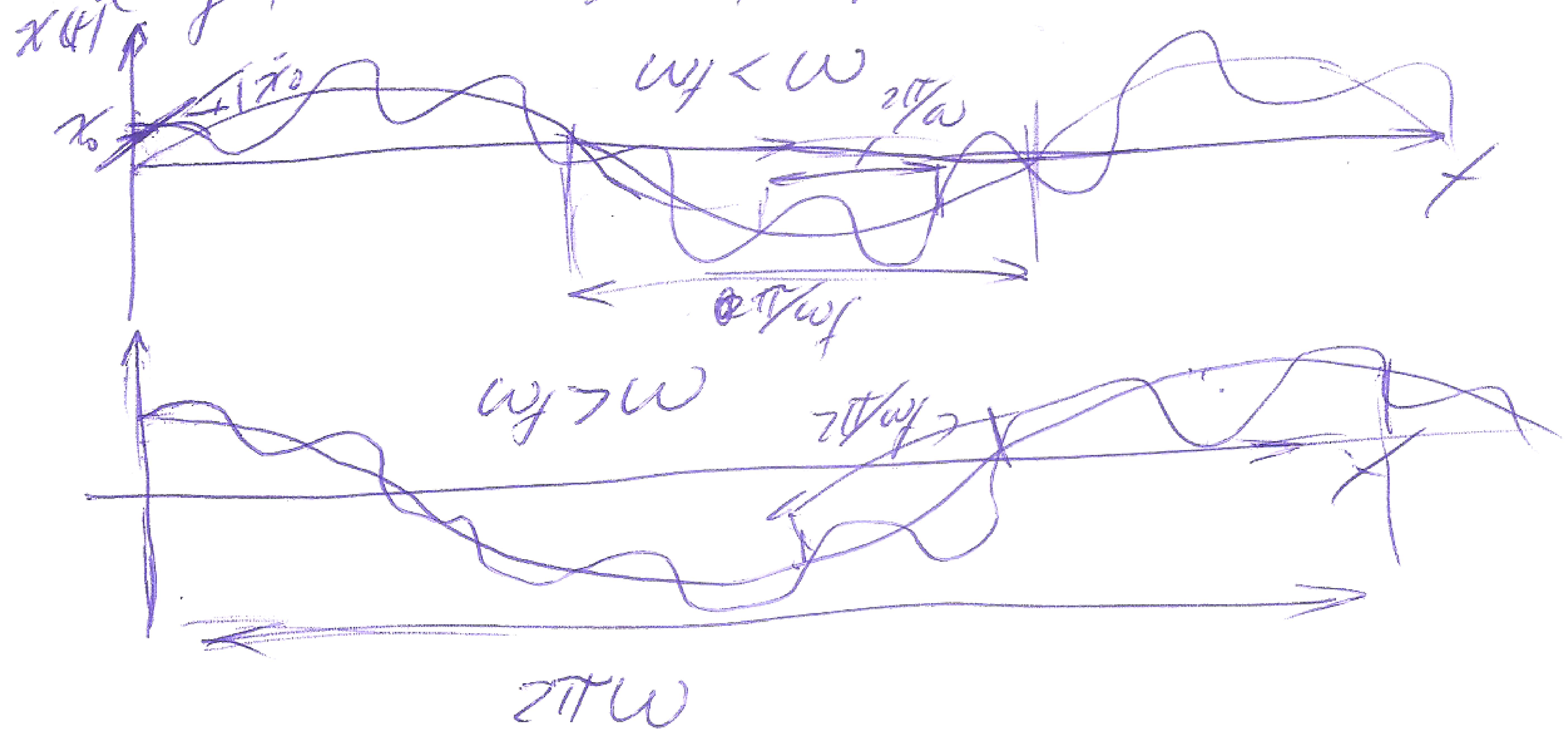
C.I. p/ $t=0$ $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$

$x(0) = \boxed{x_0 = B}$

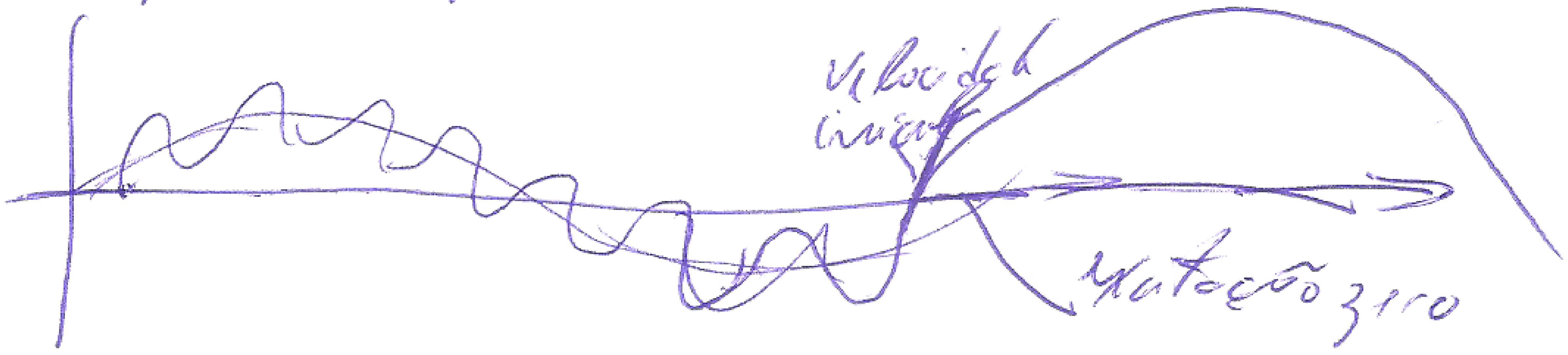
$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = A\omega + \frac{(F_0/k)\cdot\omega_f}{1-(\omega_f/\omega)^2} \therefore \boxed{A = \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{F_0/k\cdot\frac{\omega_f}{\omega}}{1-(\omega_f/\omega)^2}}$

$x(t) = \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)\cdot\text{sen}(\omega t) + x_0\cos(\omega t) + \frac{F_0/k}{1-r^2}\left(\text{sen}(\omega_f t) - \frac{\omega_f}{\omega}\,\text{sen}(\omega t)\right)$

Se $\omega_f \neq \omega$ (razoavelmente diferentes)



Quando $\omega_f > \omega$, observar o possível aumento de amplitude quando cessa a excitação.



Movimento quando ω_f é próximo ou igual à ω

$$x(t) = \underbrace{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)\cdot sen(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)}_{\text{podemos ignorar, ou fazer } \dot{x}_0 = 0 \text{ e } x_0 = 0} + \frac{F_0/k}{1-\left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2}\cdot\left(sen(\omega_f t) - \frac{\omega_f}{\omega}\, sen(\omega t)\right)$$

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega^2-\omega_f^2}\cdot\left[sen(\omega_f t) - \left(\frac{\omega_f}{\omega}\right) sen(\omega t)\right]$$

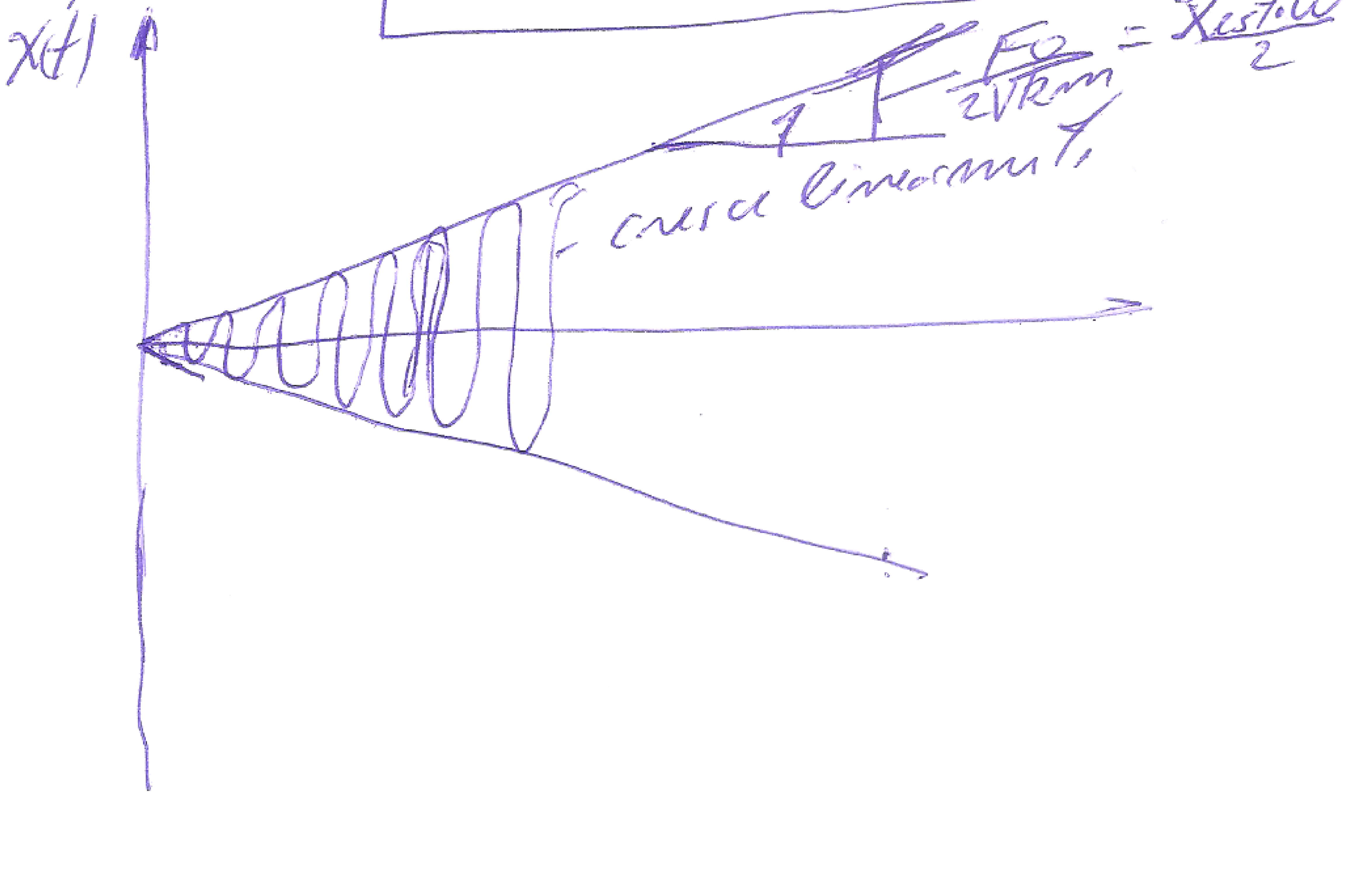
se $\omega-\omega_f = 2\Delta$; $\omega+\omega_f \simeq 2\omega_f$; $\omega^2-\omega_f^2 \simeq 4\omega_f\cdot\Delta$

$$x(t) = \frac{F_0/m}{4\omega_f\Delta}\cdot 2\cdot sen\left(\frac{\omega_f-\omega}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_f+\omega}{2}\cdot t\right)$$

Com $\omega_f \to \omega$ $\quad x(t) = \frac{-F_0/m}{4\omega_f\Delta}\cdot 2\cdot sen(\Delta t)\cdot\cos(\omega_f t)$

mas $sen(\Delta t) = \Delta\cdot t$ e

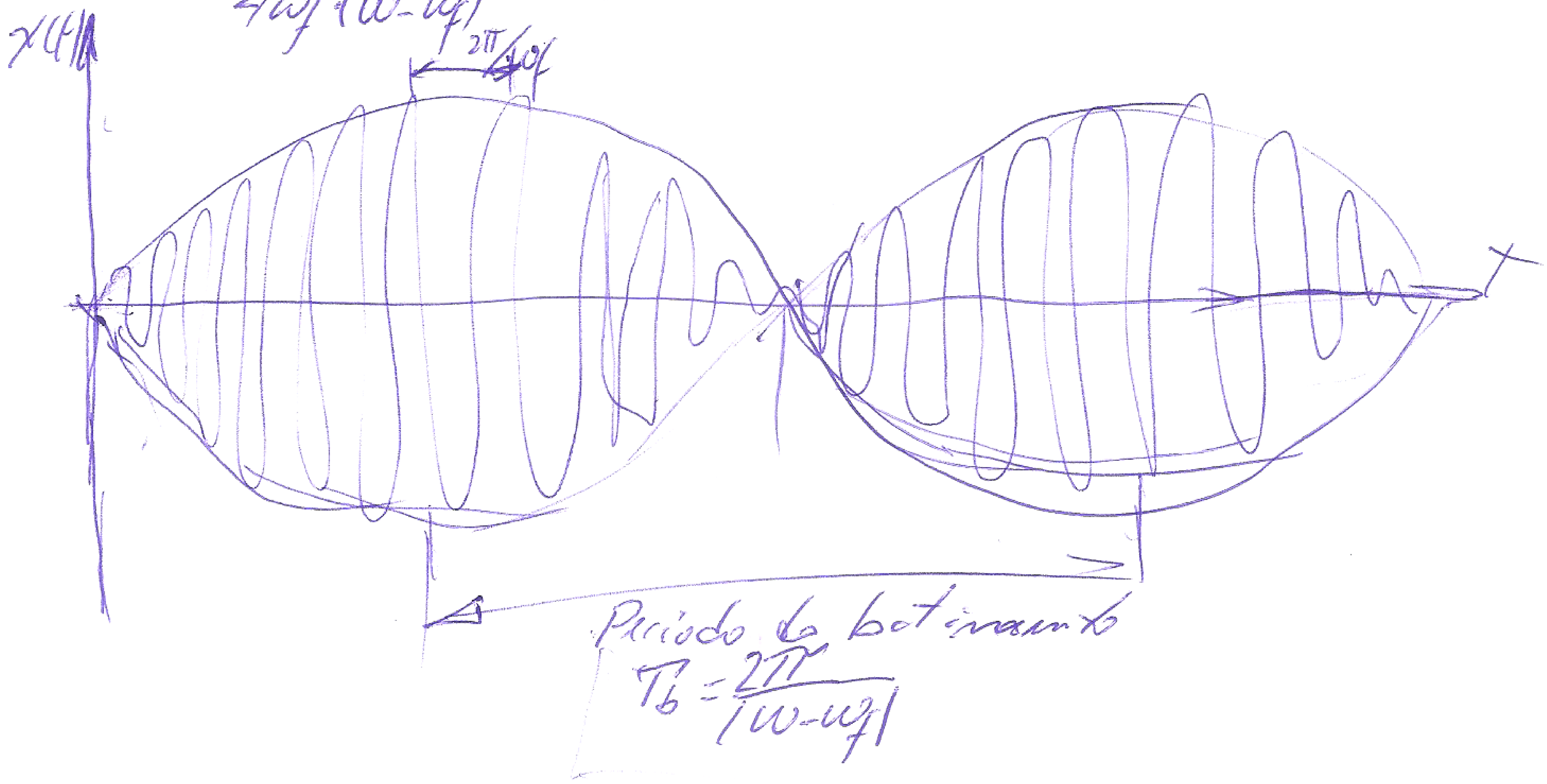
portanto $\boxed{x(t) = \frac{-F_0}{2m\omega}\cdot t\cdot\cos(\omega t) \quad p/\ \omega_f = \omega}$



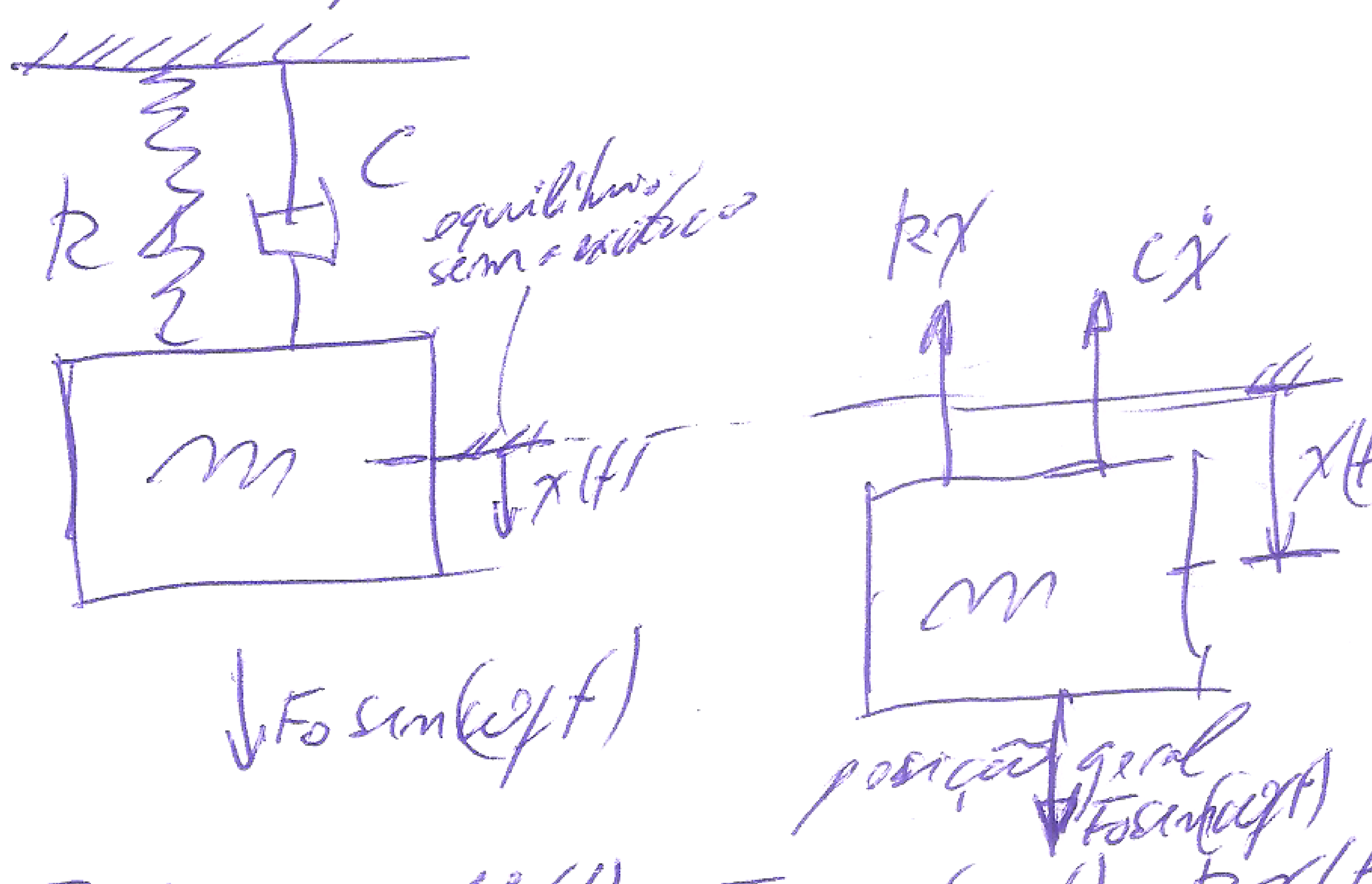
Se ω_f é próximo de ω

fenômeno de "batimento" entre as frequências

$$x(t) = \frac{F_0/m}{4\omega_f(\omega-\omega_f)} \cdot 2 \cdot sen\left(\frac{\omega_f-\omega}{2}\cdot t\right)\cdot cos\left(\frac{\omega_f+\omega}{2}\cdot t\right)$$



Vibrações forçadas com amortecimento viscoso



PMB $\rightarrow$ $m\ddot{x}(t) = F_0\, sen(\omega_f t) - kx(t) - c\dot{x}(t)$

$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0\, sen(\omega_f t)$

Solução da homogênea p/ $\zeta < 1$

$x_h(t) = Xe^{-\zeta\omega t}\cdot sen(\omega_d t + \phi)$, com $\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$;

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$