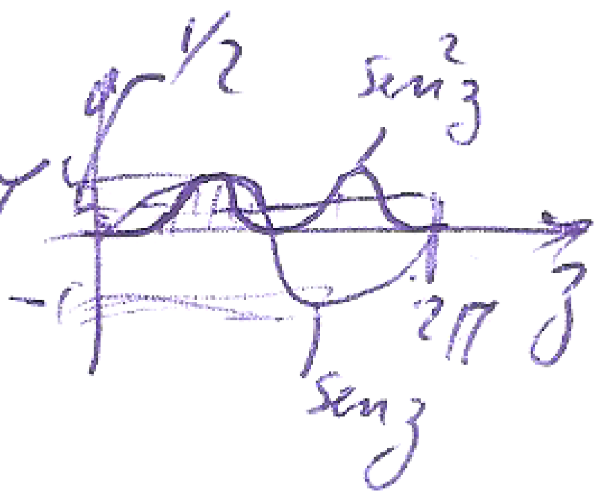
$\mathcal{E}_{ciclo} = F_0 \cdot X_p \cdot \operatorname{sen}\psi \cdot \pi$ $\qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 z\, dz = \pi$



Mas $tg\,\psi = \frac{2\zeta r}{1-r^2}$ ∴ $\operatorname{sen}\psi = \frac{2\zeta r}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$

Quanto é a energia dissipada por ciclo pelo amortecedor $F_{am} = c\cdot\dot{x}$

$$E_{d\,ciclo} = \int_{ciclo} c\,\dot{x}_p\, dx_p = \int_{ciclo} c\,\dot{x}_p \frac{dx_p}{dt} dt = \int_{ciclo} c\,\dot{x}_p^2\, dt = c\,(X_p\,\omega_f)^2 \int_{ciclo} \cos^2(\omega_f t-\psi)\,dt$$

$$E_{d\,ciclo} = c\,X_p^2\,\omega_f \cdot \int_{ciclo} \cos^2(\omega_f t-\psi)\cdot d(\omega_f t-\psi) = c\,X_p^2\,\omega_f \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 z\,dz$$

$$E_{d\,ciclo} = c\,X_p^2\,\omega_f \cdot \pi = \mathcal{E}_{ciclo} = F_0\,X_p \frac{2\zeta r \cdot \pi}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

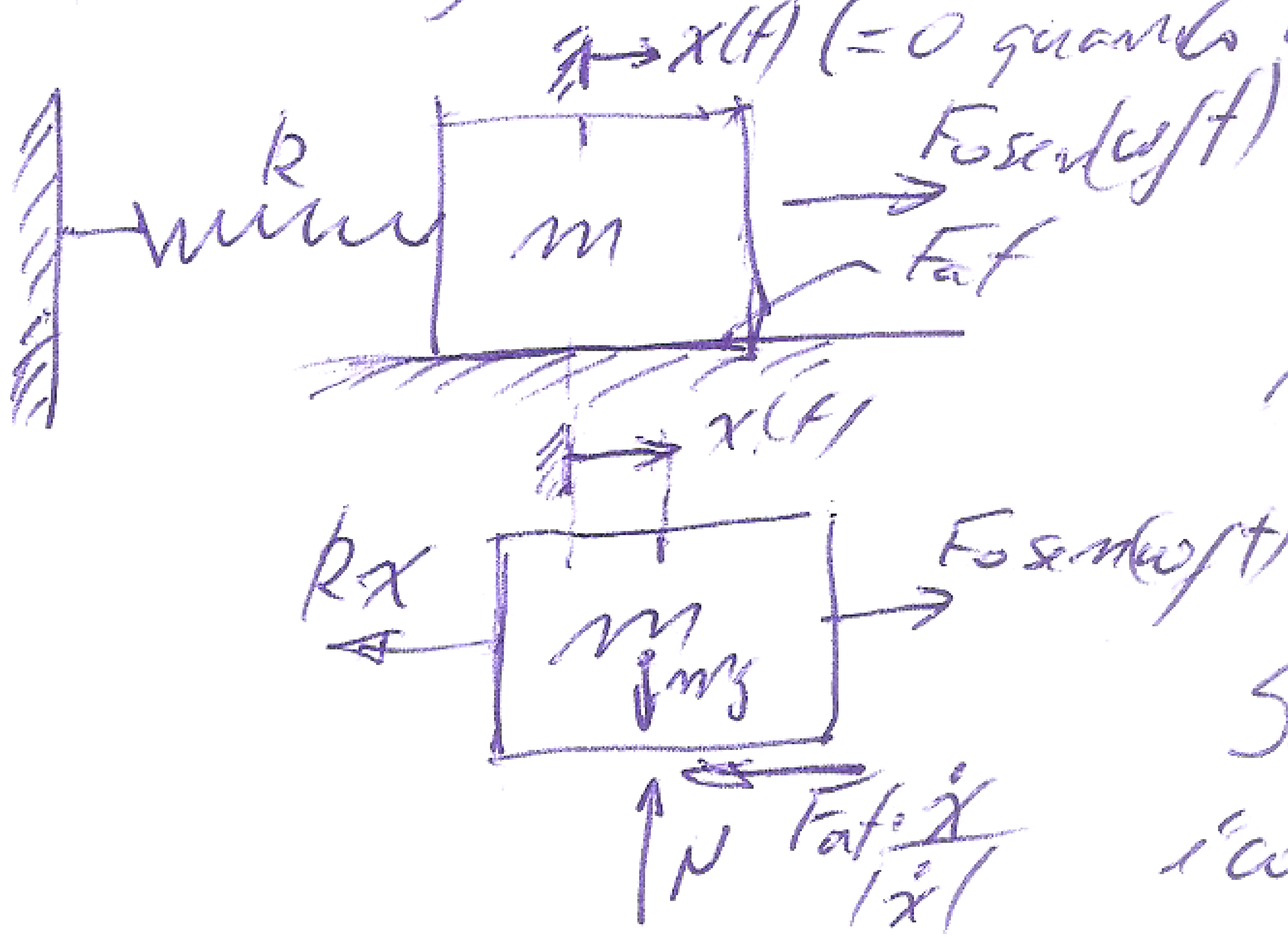
$$X_p = \frac{F_0}{c\,\omega_f}\frac{k}{k}\frac{2\zeta r}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} = \frac{F_0/k}{\left(\frac{c\,\omega_f}{k}\right)}\frac{2\zeta r}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

Mas $\frac{c\,\omega_f}{k} = 2\zeta r$ ∴ $\boxed{X_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$ OK!

Verificou-se a suposição inicial.

Vibração forçada com amortecimento por atrito seco

$x(t)$ (= 0 quando a força na mola é 0)



$$m\ddot{x}(t) + F_{at}\frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} + kx(t) = F_0\,sen(\omega_f t)$$

Solução da equação completa é complicada. Vamos simplificar a abordagem (Engenharia!)

Digamos que a excitação é suficiente para manter a massa em movimento oscilatório.

Como já vimos no movimento livre com atrito de Coulomb, cada meio ciclo era um movimento senoidal, portanto,

se a força de atrito for pequena, admitiremos que o movimento é aproximadamente senoidal, $x_p(t) = X_p \operatorname{sen}(\omega_f t - \psi)$
A energia dissipada por ciclo, fica:

$$E_{d_{ciclo}} = 4 \cdot F_{at} \cdot X_p$$

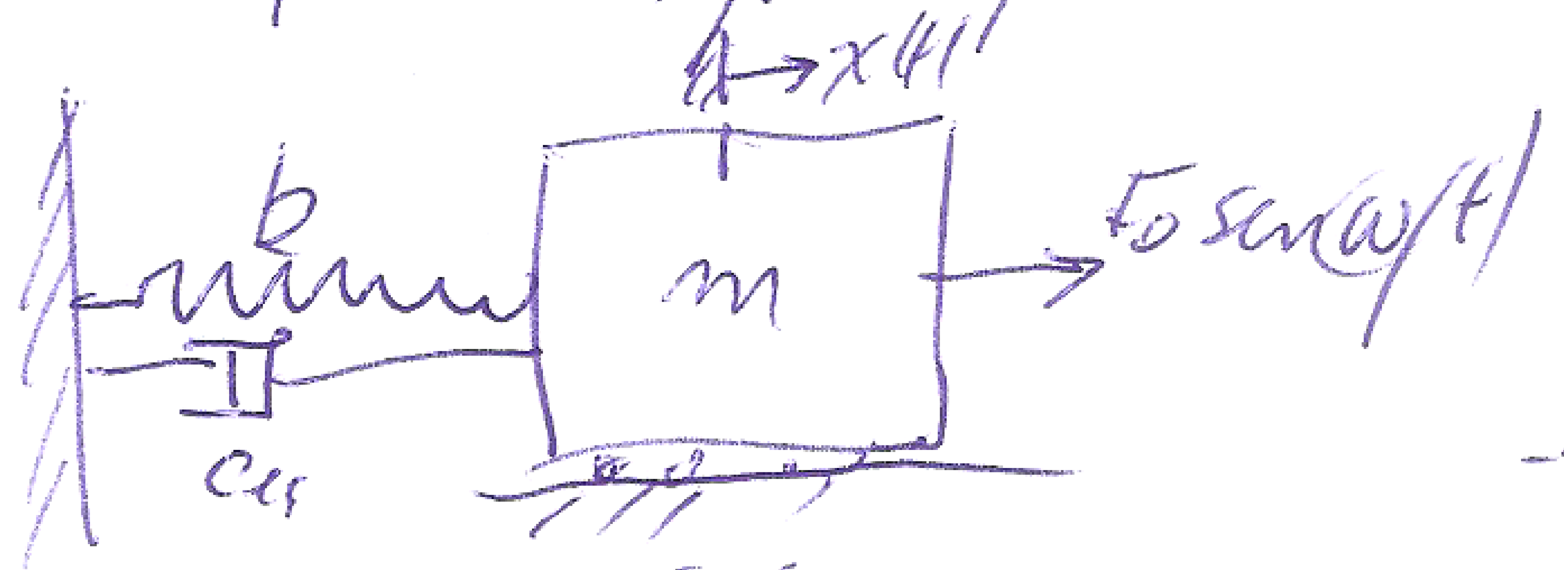
Se admitíssemos a substituição do atrito seco por um viscoso que dissipasse a mesma energia por ciclo

$$E_{d_{ciclo}} = \pi \cdot C_{eq} \cdot \omega_f \cdot X_p^2$$ (como já havíamos mostrado)

$$\therefore \quad C_{eq} = \frac{4 \cdot F_{at}}{\pi \cdot \underbrace{\omega_f \cdot X_p}_{\dot{X}_p}}$$

. Observe-se que quanto menor a velocidade máxima, maior fica o C_{eq}

A solução em regime permanente para o sistema equivalente



$$x_p(t) = X_p \operatorname{sen}(\omega_f t - \psi)$$

$$X_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta_{eq} r)^2}} \; ; \quad \boxed{(2\zeta r) = 2\frac{C_{eq}}{C_c}\cdot\frac{\omega_f}{\omega} = \frac{2 \cdot C_{eq} \cdot \omega_f}{2\sqrt{km}\sqrt{k/m}} = \boxed{\frac{C_{eq}\cdot\omega_f}{k}}}$$

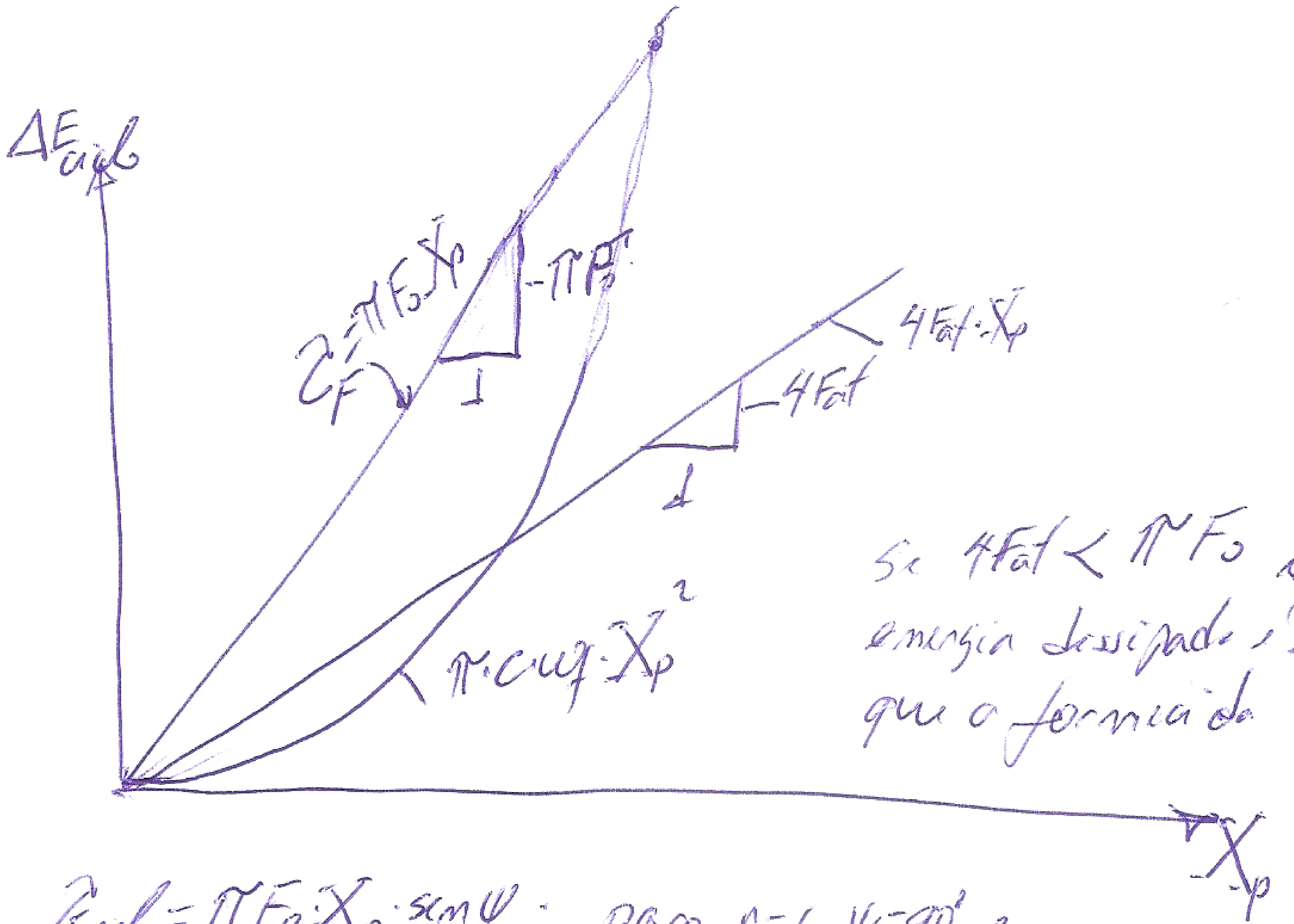
$$X_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \left(\frac{C_{eq}\omega_f}{k}\right)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \left(\frac{4F_{at}}{\pi \cdot X_p \cdot k}\right)^2}}$$

ou $$X_p^2 \cdot \left[(1-r^2)^2 + \left(\frac{4F_{at}}{\pi X_p k}\right)^2\right] = \left(\frac{F_0}{k}\right)^2$$ ou

$$X_p^2 = \frac{\left(\frac{F_0}{k}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{4F_{at}}{\pi F_0}\right)^2\right)}{(1-r^2)^2} \quad \therefore \quad \boxed{X_p = X_{est} \cdot \frac{\sqrt{1-\left(\frac{4F_{at}}{\pi F_0}\right)^2}}{1-r^2}}$$

Se $F_{at} << F_0$ a solução é real, e a fase depende se ω_f é maior ou menor que ω ($\psi = 0°$ ou $180°$)
No entanto, o atrito seco não limita a amplitude na ressonância ($\omega_f = \omega$; $r = 1$).

Para entendermos por que a dissipação viscosa limita a amplitude na ressonância e a dissipação por Coulomb não, basta considerar as energias fornecida e dissipada por ciclo para $r=1$.



Se $4F_{at} < \pi F_0$ a energia dissipada é sempre menor que a fornecida

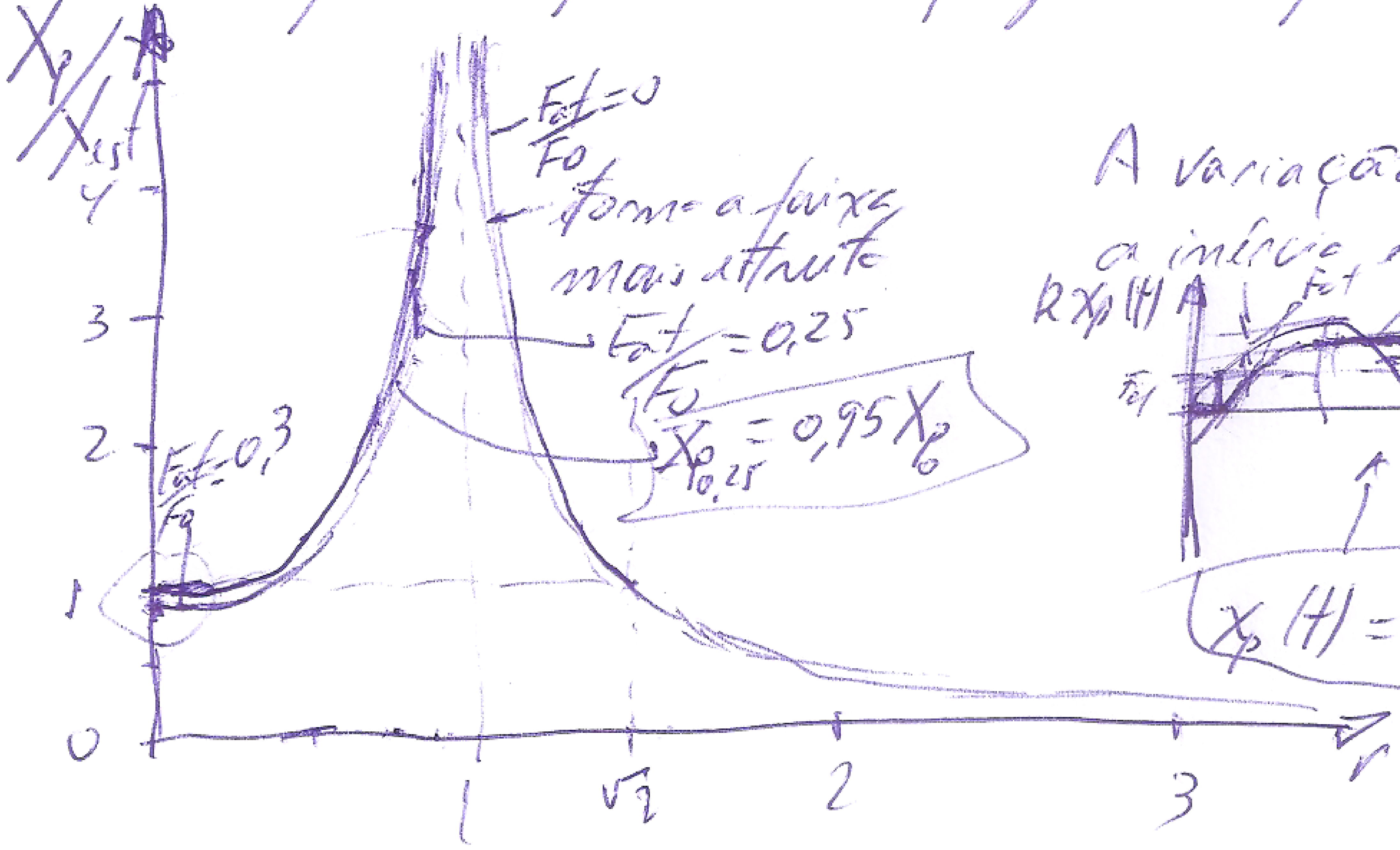
$\mathcal{E}_{Fciclo} = \pi F_0 \cdot X_p \cdot \operatorname{sen}\psi$; para $r=1$ $\psi = 90°$ e

$\mathcal{E}_{Fciclo} = \pi \cdot F_0 \cdot X_p$

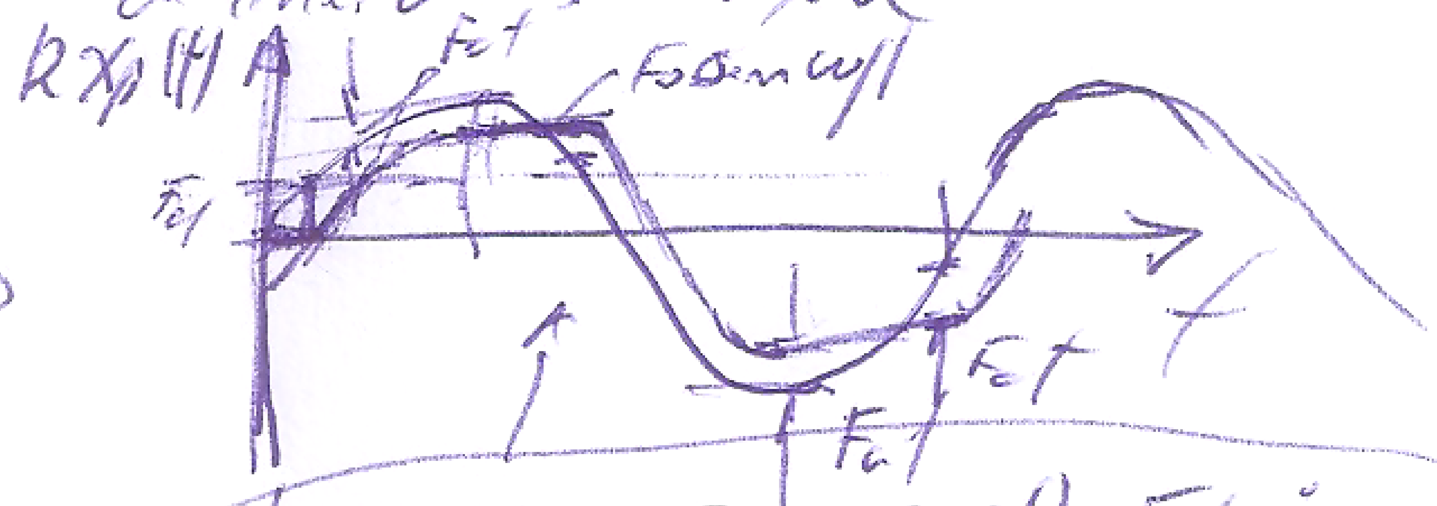
$E_{dciclo} = 4 F_{at} \cdot X_p$ (para atrito seco)

$E_{dvciclo} = \pi \cdot c \cdot \omega_f \cdot X_p^2$ (para dissipação viscosa)

Como fica o fator de amplificação para atrito de Coulomb

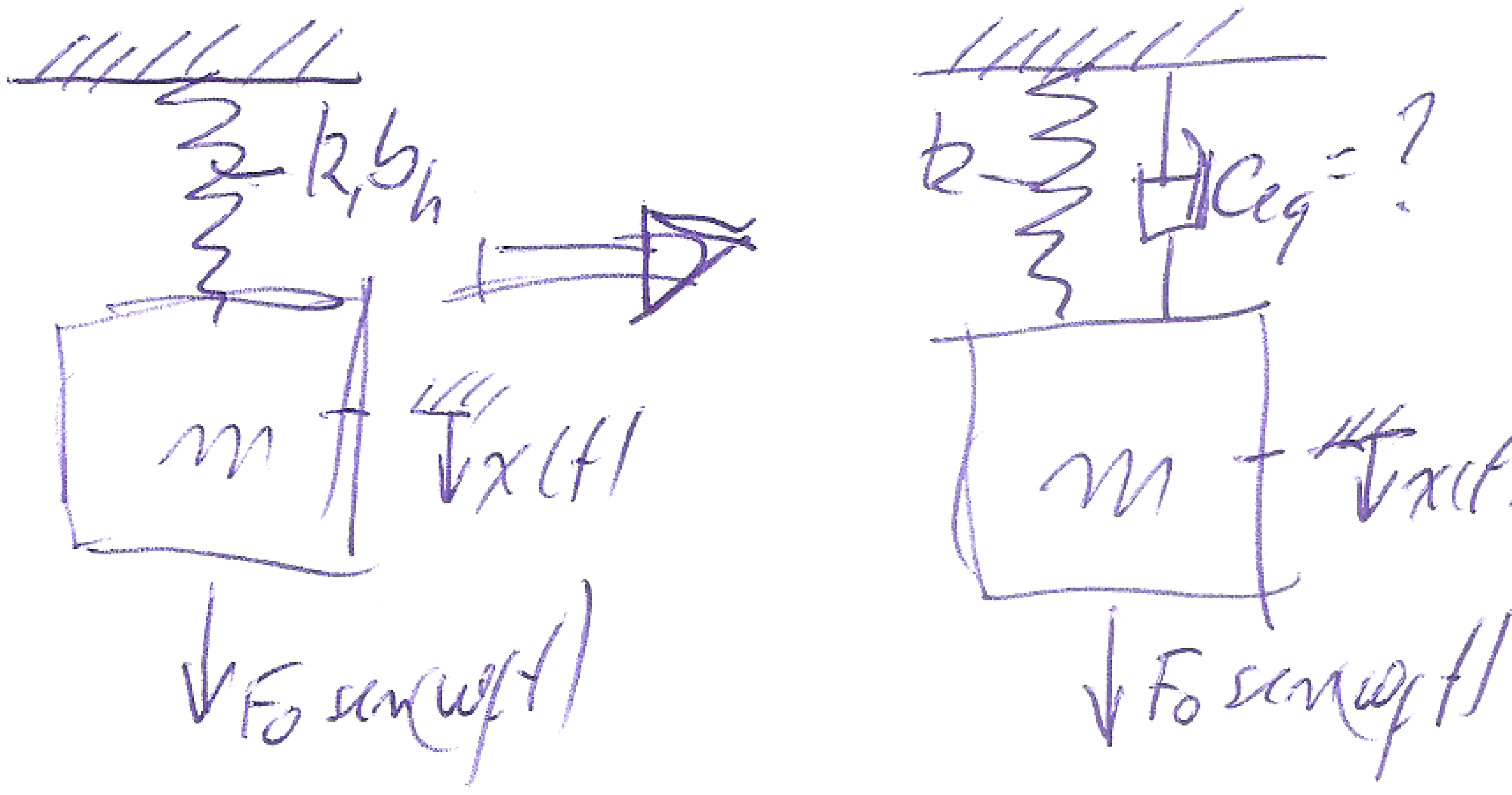


A variação para $r \approx 0$, onde a inércia é baixa



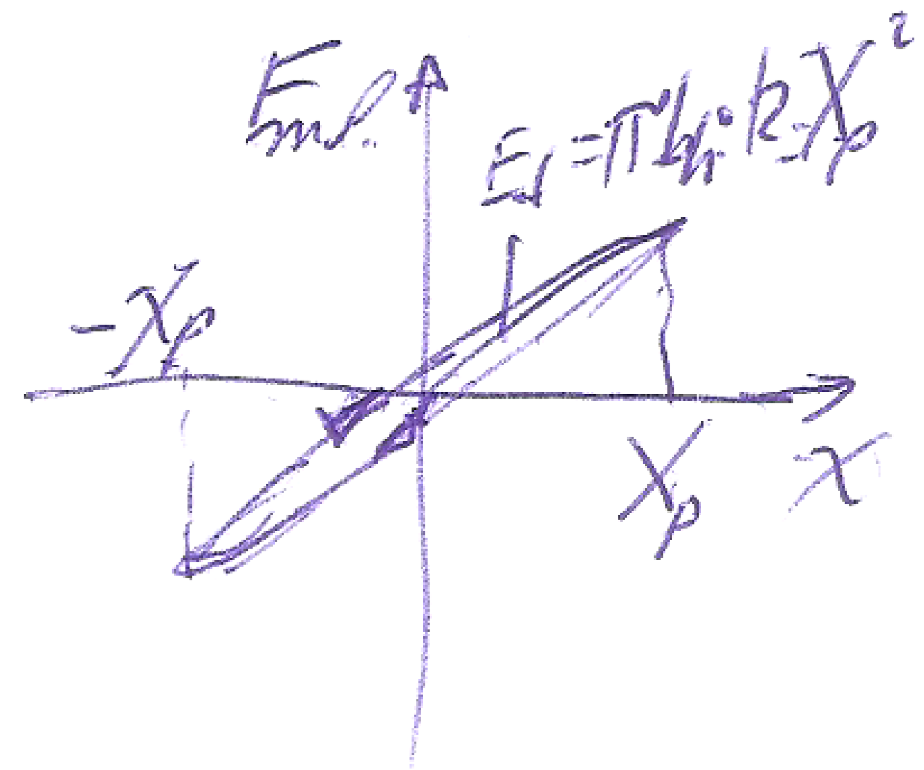
$X_p(t) = \frac{F_0}{R} \operatorname{sen}(\omega_f t) - \frac{F_{at}}{R} \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$

Vibração forçada com amortecimento por histerese



Se $x_p(t) = X_p \operatorname{sen}(\omega_f t - \psi)$

$E_{ciclo} = \pi \cdot b_h \cdot k \cdot X_p^2$ (por histerese)



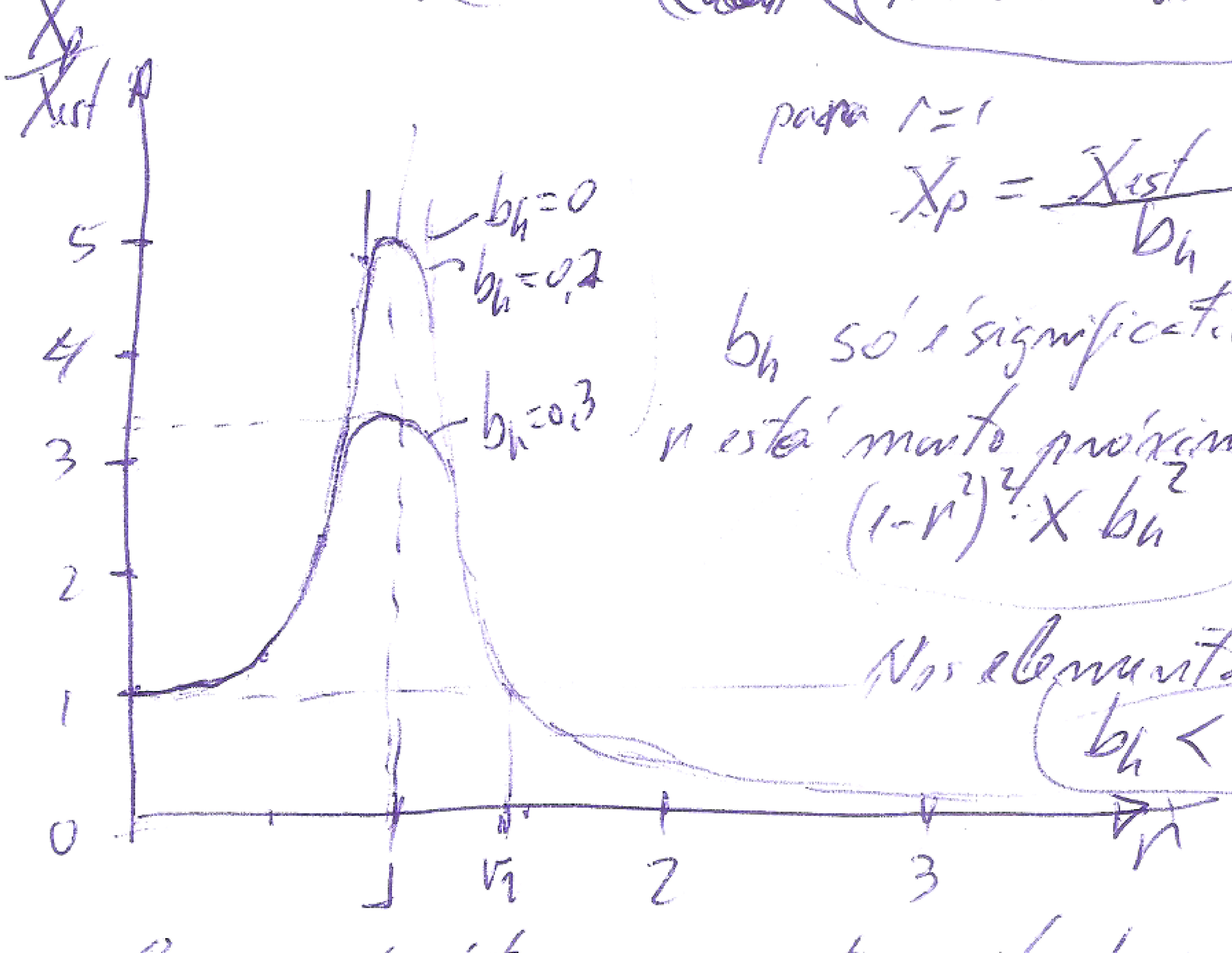
$E_{viscoso} = \pi \cdot C_{eq} \cdot \omega_f X_p^2 \quad \therefore \quad \boxed{C_{eq} = \frac{b_h \cdot k}{\omega_f}}$

Portanto $\zeta_{eq} = \frac{C_{eq}}{C_c} = \frac{b_h \cdot k}{\omega_f \cdot 2\sqrt{km}}$ ou

$$(2\zeta r) = \frac{2 \cdot b_h \cdot k}{2\sqrt{km} \cdot \omega_f} \cdot \frac{\omega_f}{\omega} = \frac{b_h \cdot k}{\omega \sqrt{km}} = \boxed{b_h}$$

$$X_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (b_h)^2}}$$

não varia com r



para $r = 1$ $\quad X_p = \frac{X_{est}}{b_h}$

b_h só é significativo qdo r está muito próximo de 1

$(1-r^2)^2 \times b_h^2$

Nos elementos elásticos usuais $b_h < 0{,}15$

Como só afeta o comportamento dinâmico do sistema próximo à ressonância, é ideal para reduzir a transmissibilidade, pois para $r > \sqrt{2}$ tem efeito nulo.