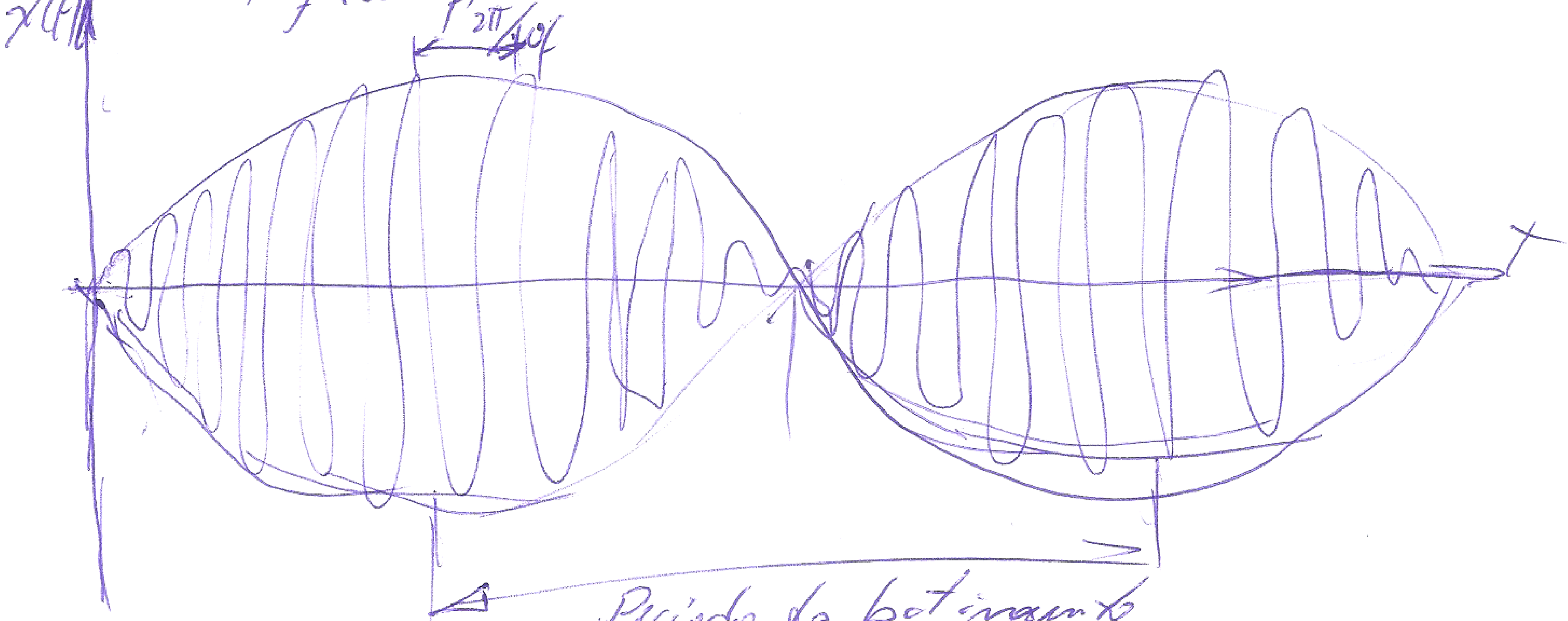
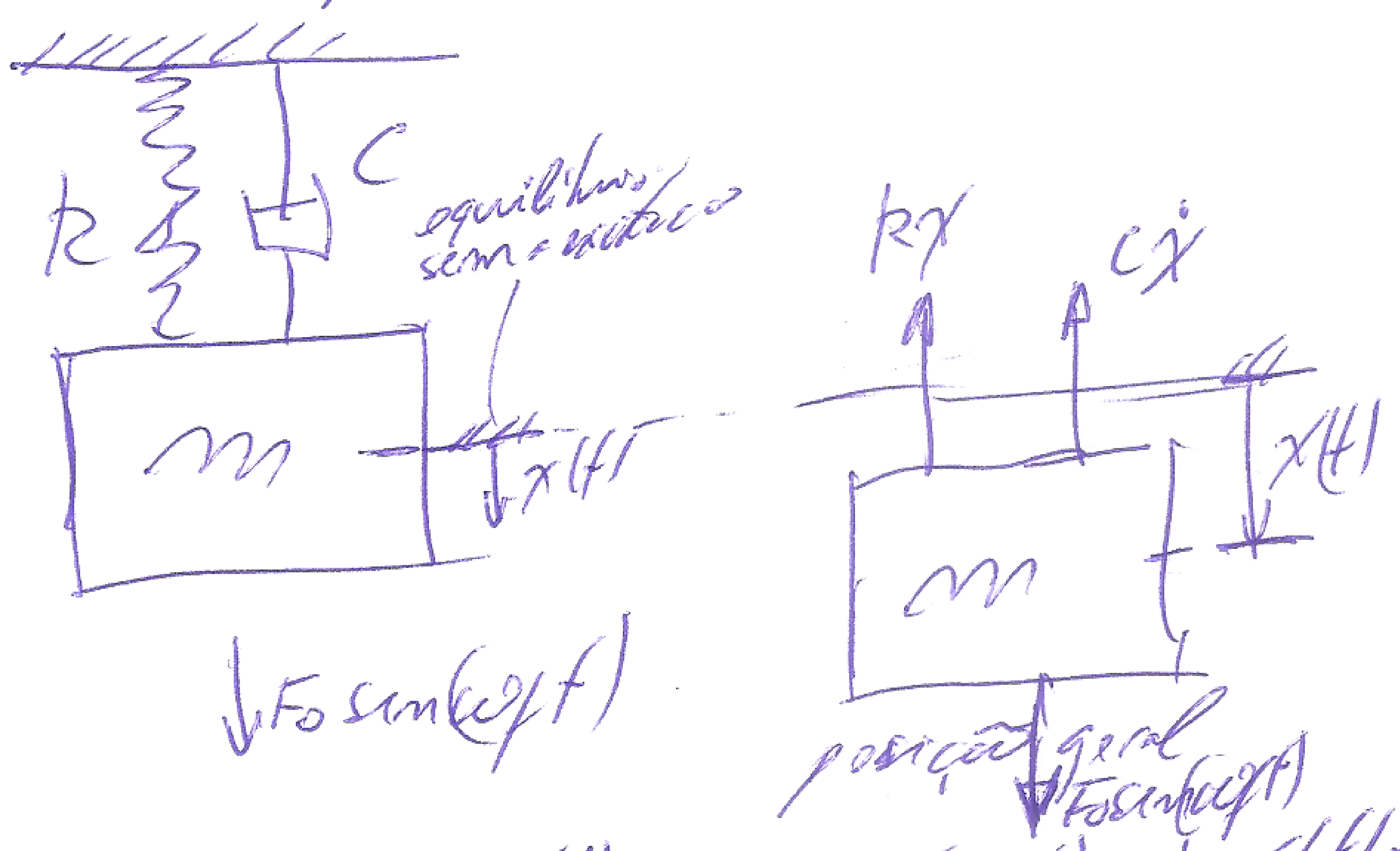
Se ω_f é próximo de ω
fenômeno de "batimento" entre as frequências

$$x(t) = \frac{F_0/m}{4\omega_f(\omega-\omega_f)} \cdot 2 \cdot sen\left(\frac{\omega_f-\omega}{2} \cdot t\right) \cdot cos\left(\frac{\omega_f+\omega}{2} \cdot t\right)$$



Período do batimento
$$T_b = \frac{2\pi}{|\omega-\omega_f|}$$

Vibrações forçadas com amortecimento viscoso



$$PMB \rightarrow m\ddot{x}(t) = F_0\, sen(\omega_f t) - kx(t) - c\dot{x}(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\,x(t) = F_0\, sen(\omega_f t)$$

Solução da homogênea p/ $\xi < 1$

$$x_h(t) = X e^{-\xi\omega t} \cdot sen(\omega_d t + \phi), \text{ com } \omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Solução particular

$x_p(t) = P\,sen(\omega_f t) + Q\cos(\omega_f t)$ (?) observar que só em $sen(\omega_f t)$ não satisfaz a equação diferencial.

$\dot{x}_p(t) = P\omega_f \cos(\omega_f t) - Q\omega_f\, sen(\omega_f t)$

$\ddot{x}_p(t) = -P\omega_f^2\, sen(\omega_f t) - Q\omega_f^2 \cos(\omega_f t)$

Substituindo na Equ. dif. fica:

$$(-m\omega_f^2+k)\left[P\,sen(\omega_f t) + Q\cos(\omega_f t)\right] + c\omega_f\left[P\cos(\omega_f t) - Q\,sen(\omega_f t)\right] = F_0\,sen(\omega_f t)$$

ou $\begin{bmatrix} k-m\omega_f^2 & -c\omega_f \\ c\omega_f & k-m\omega_f^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pois a parcela em $sen(\omega_f t)$ não pode ser cancelada "permanentemente" pela em $\cos(\omega_f t)$

$$P = \frac{F_0\cdot(k-m\omega_f^2)}{(k-m\omega_f^2)^2+(c\omega_f)^2} \quad e \quad Q = \frac{-F_0\cdot c\,\omega_f}{(k-m\omega_f^2)^2+c\omega_f^2}$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(k-m\omega_f^2)^2+(c\omega_f)^2}\left[(k-m\omega_f^2)\cdot sen\,\omega_f t - c\omega_f\cdot\cos(\omega_f t)\right] =$$

$$= \frac{F_0}{(k-m\omega_f^2)^2+(c\omega_f)^2}\cdot\sqrt{(k-m\omega_f^2)^2+(c\omega_f)^2}\cdot sen(\omega_f t-\psi), \text{ com}$$

$$tg\,\psi = \frac{c\omega_f}{k-m\omega_f^2}$$

lembrando que $A\,sen(\omega t) + B\cos(\omega t) =$ $= X_p\,sen(\omega_f t + \phi)$, com $X_p = \sqrt{A^2+B^2}$ e $tg\,\psi = \frac{B}{A}$

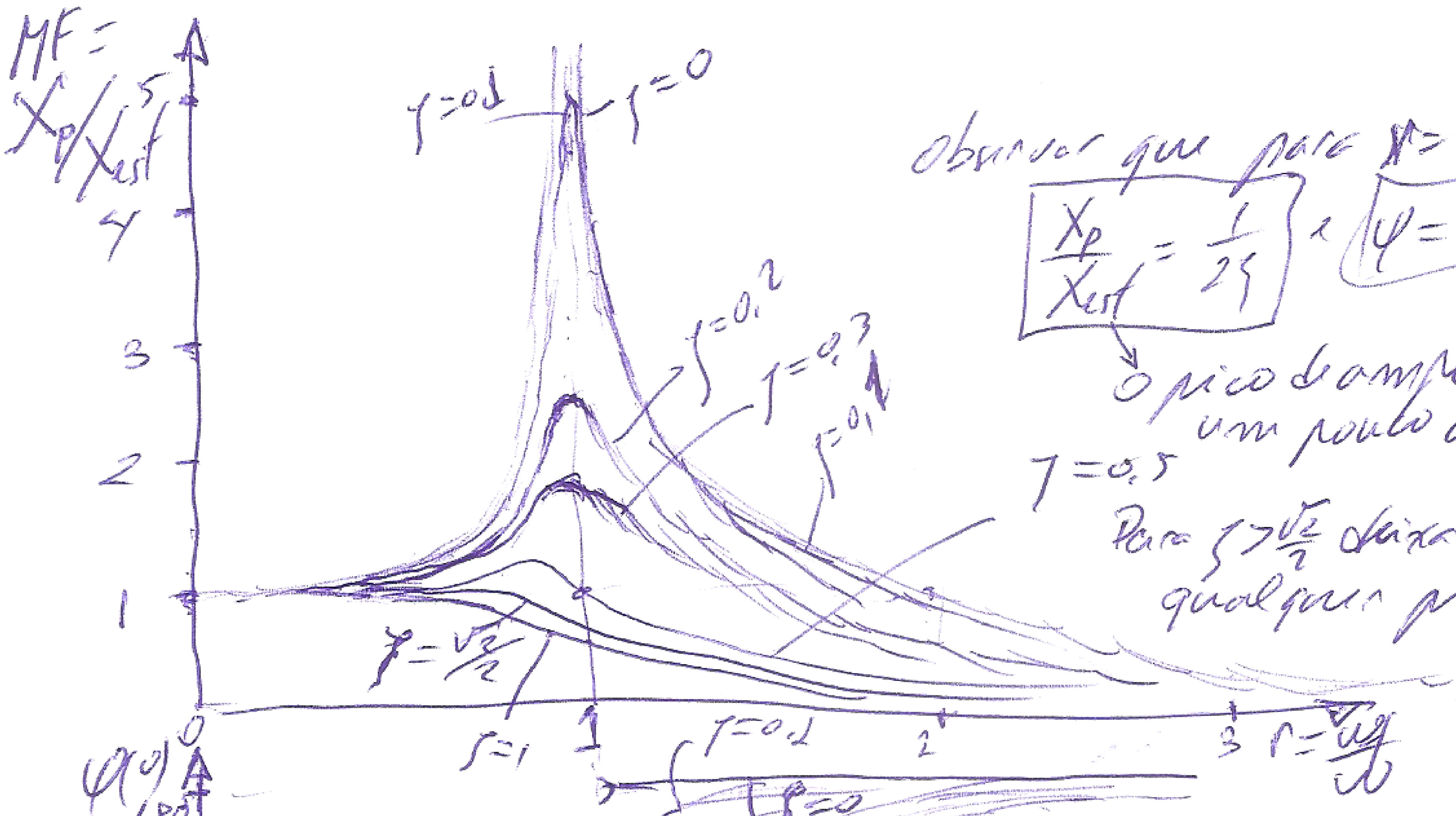
$$x_p(t) = \frac{F_0\cdot sen(\omega_f t-\psi)}{\sqrt{(k-m\omega_f^2)^2+(c\omega_f)^2}} \text{ ou}$$

$$x_p(t) = X_p\cdot sen(\omega_f t-\psi) \text{ com } X_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\frac{m\omega_f^2}{k}\right)^2+\left(\frac{c\omega_f}{k}\right)^2}} \text{ ou}$$

$$X_p = \frac{X_{est}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2}} = \frac{X_{est}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

Observar que $\frac{X_p}{X_{est}} = MF$ (fator de amplificação) e que a resposta em deslocamento do sistema fica atrasada de ψ em relação à excitação; $\boxed{tg\,\psi = \frac{c\omega_f/k}{1-\frac{m\omega_f^2}{k}} = \frac{2\zeta r}{1-r^2}}$

Se a excitação é em $sen(\omega_f t+\alpha)$ a resposta é em $sen(\omega_f t+\alpha-\psi)$; ψ atrasada sempre.

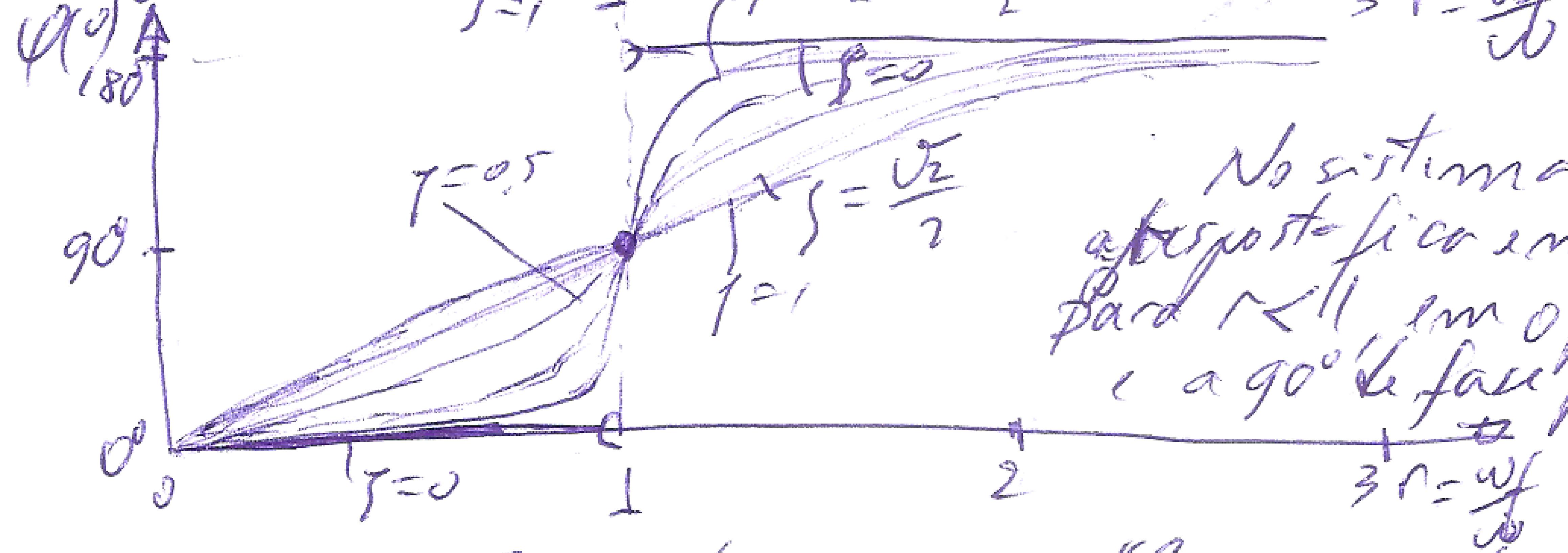


observar que para $r=1$

$$\boxed{\frac{X_p}{X_{est}} = \frac{1}{2\zeta}} \text{ e } \boxed{\psi = 90^\circ}$$

o pico de amplitude acontece um pouco antes de $r=1$

Para $\zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ deixa de existir qualquer pico.



No sistema não amortecido a resposta fica em fase com excitação para $r<1$, em oposição para $r>1$ e a 90° de fase para $r=1$.

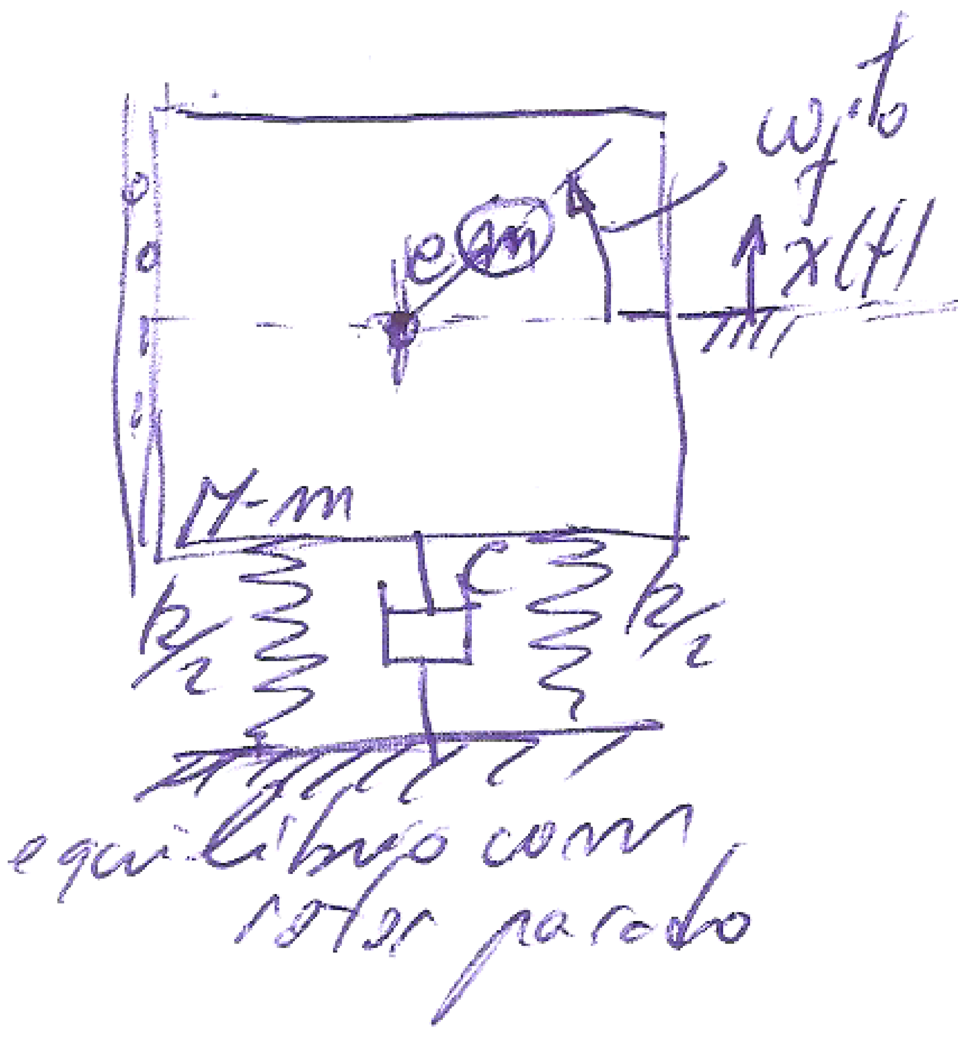
Para $\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ o atraso ψ varia "linearmente" com r

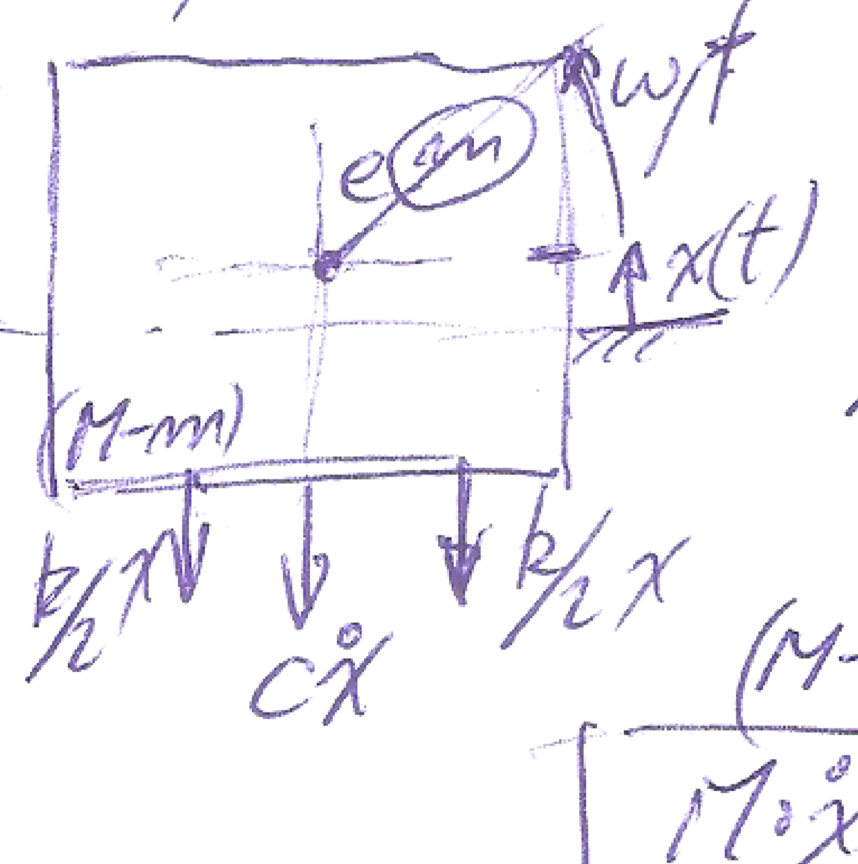
Sistemas de medidas de 2ª ordem exploram essa linearidade de ψ e de um ganho aproximadamente constante $X_p/X_{est} \sim 1$ pesando amortecimento $\zeta \simeq 0{,}5 - 0{,}8$

Para resolver problemas práticos de vibração, muitas vezes se altera a massa do sistema, ou a rigidez, para evitar a coincidência entre as frequências de excitação e natural.

Excitação por desbalanceamento rotativo

Rotor desbalanceado que provoca vibração; modelo mais simples:





$$M \cdot \ddot{x}_{CM} = -kx - c\dot{x}$$

$$M \cdot x_{CM} = m(x + e\,\mathrm{sen}(\omega_f t)) + (M-m) \cdot x$$

$$(M-m)\ddot{x} + m(\ddot{x} - e\omega_f^2 \mathrm{sen}(\omega_f t)) + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\boxed{M\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \underbrace{me\omega_f^2}_{F_0}\mathrm{sen}(\omega_f t)}$$

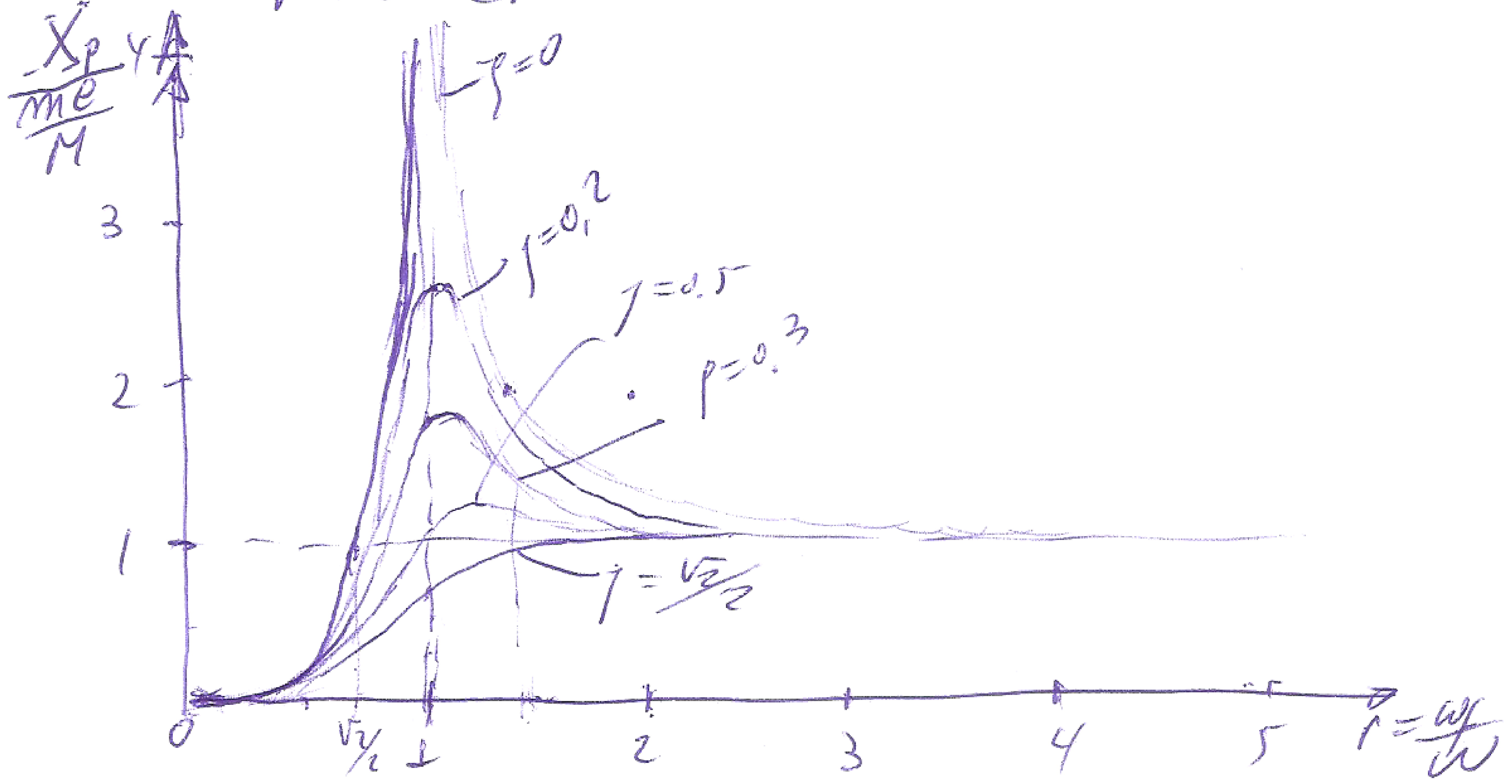
Solução da Equa. Dif.

Solução da homogênea — já visto (a t campo)

Solução particular, por semelhança à com excitação por força.

$$x_p(t) = X_p \operatorname{sen}(\omega_f t - \psi) \quad \text{com} \quad X_p = \frac{\frac{m e \omega_f^2}{k} \cdot \frac{M}{M}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{\frac{me}{M} \cdot \left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$X_p = \frac{\frac{me}{M} \cdot r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \; ; \; tg\,\psi = \frac{2\zeta r}{1-r^2}$$



Observar que, tanto para excitação por força harmônica ou pelo desbalanceamento rotativo, muitas vezes os limites da vibração a serem observados na máquina não o são em deslocamento, mas sim em velocidade ou aceleração.

Se $\quad x_p(t) = X_p \operatorname{sen}(\omega_f t - \psi)$

$$\dot{x}_p(t) = X_p \omega_f \cdot \cos(\omega_f t - \psi)$$

velocidade máxima

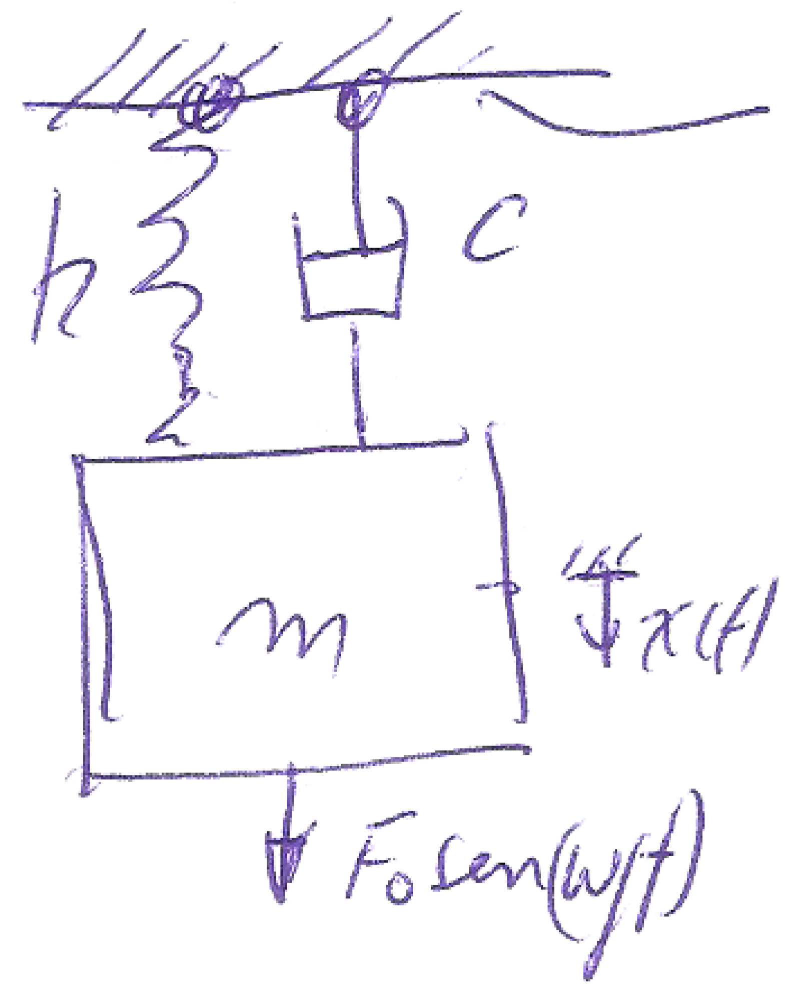
$$\ddot{x}_p(t) = -X_p \omega_f^2 \operatorname{sen}(\omega_f t - \psi)$$

aceleração máxima

Nestes casos, um aumento da frequência de excitação acima da ressonância pode aumentar a velocidade e ou aceleração máxima que estava sendo medida.

Transmissibilidade de Força e Isolamento de Vibração

Uma força de excitação $F_0 sen(\omega_f t)$ aplicada a um sistema dinâmico tanto pode ser reduzida ao "passar" pelo sistema, como amplificada. Entendendo fisicamente esse fenômeno se pode resolver inúmeros problemas de vibração e ruído.



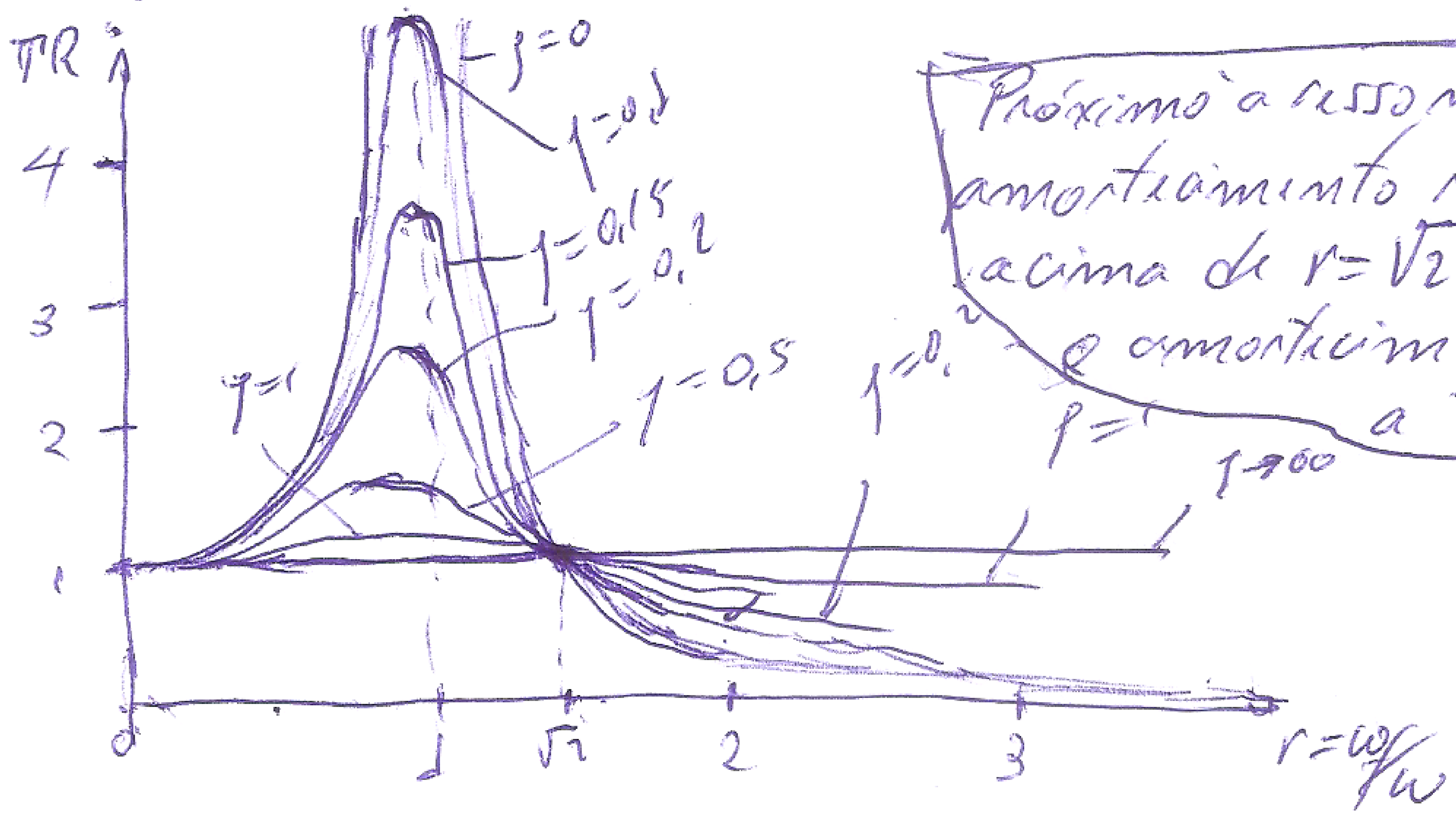
Qual o valor da força dinâmica transmitida ao suporte?

$x_p(t) = X_p sen(\omega_f t - \psi)$ $\quad X_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$

$$F_t = kx_p + c\dot{x}_p = kX_p sen(\omega_f t - \psi) + c X_p \omega_f cos(\omega_f t - \psi) = X_p \sqrt{k^2+(c\omega_f)^2}\, sen(\omega_f t - \psi + \alpha)$$

$F_t(t) = F_{TR}\, sen(\omega_f t - \psi + \alpha)$ onde a força máxima transmitida é $F_{TR} = kX_p\sqrt{1+(2\zeta r)^2} = \frac{F_0\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$

$\frac{F_{TR}}{F_0}$ = TR (Transmissibilidade de força): $TR = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$

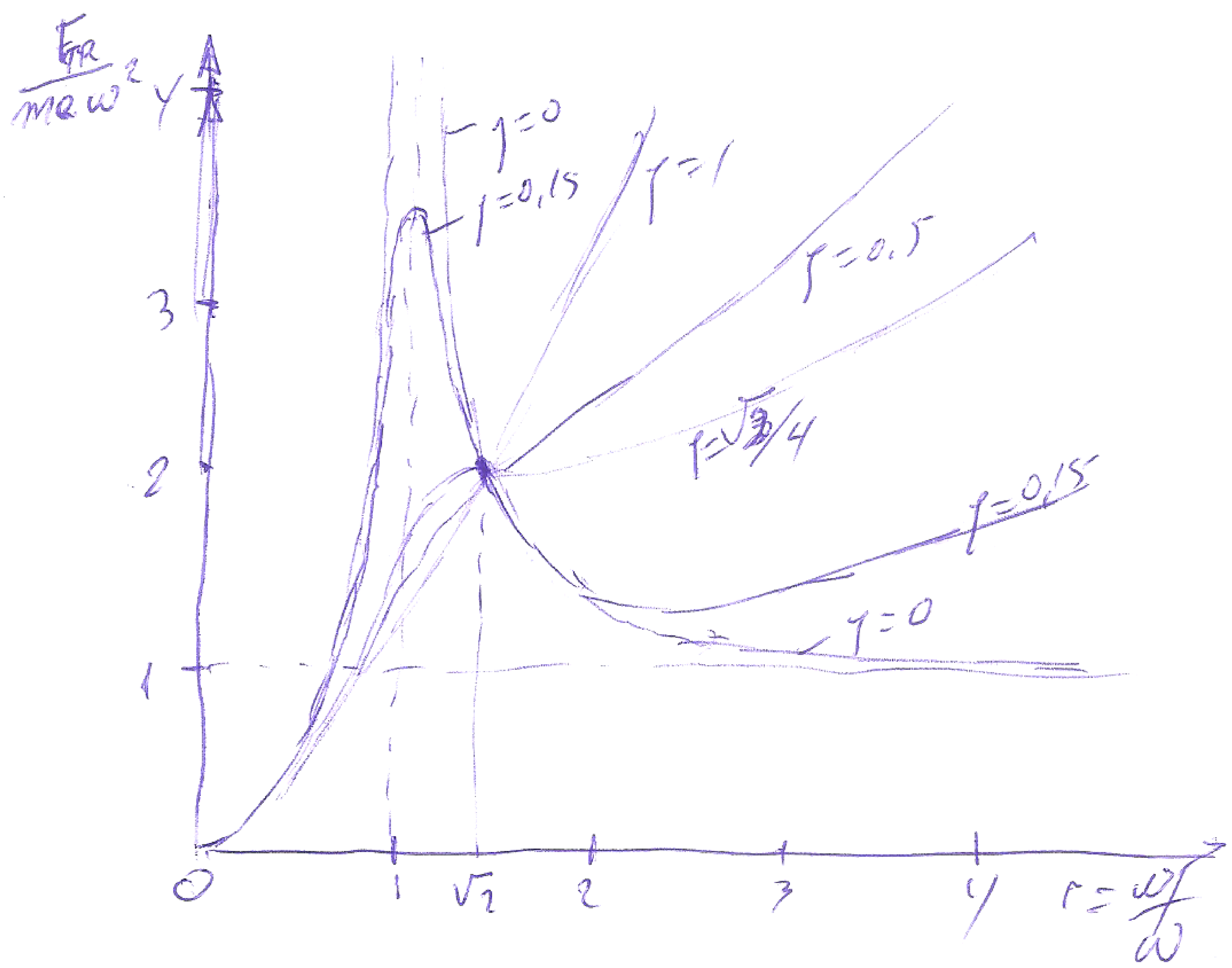


Próximo à ressonância, o amortecimento reduz a TR; acima de $r=\sqrt{2}$, q.to menor o amortecimento menor a transmissibilid.

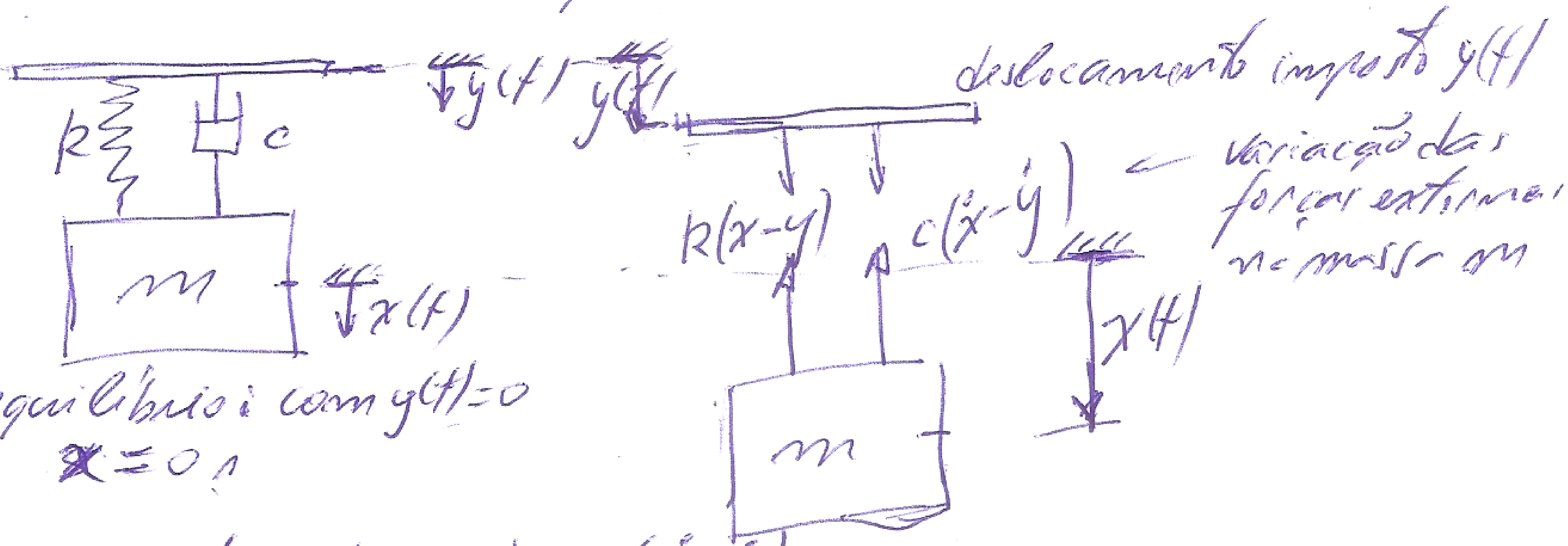
O mesmo tratamento matemático pode ser dado à excitação por desbalanceamento rotativo.

$F_t(t) = kx_p(t) + c\dot{x}_p(t)$ onde $x_p(t) = X_p sen(\omega_f t - \psi)$

com $X_p = \frac{\frac{me}{M} r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$; $\quad F_{TR} = kX_p\sqrt{1+(2\zeta r)^2} = \frac{me\omega^2 r^2\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$



Base oscilante (Excitação por ~~um~~ deslocamento no suporte do sistema massa-mola



equilíbrio: com $y(t)=0$
$x=0$,

$$m\ddot{x}(t) = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y})$$

Se $y(t) = Y\,\text{sen}(\omega_f t)$; $\dot{y}(t) = Y\omega_f \cos(\omega_f t)$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = kY\,\text{sen}(\omega_f t) + cY\omega_f\cos(\omega_f t) =$$

$$= kY\left[\text{sen}(\omega_f t) + \underbrace{\frac{c\omega_f}{k}}_{2\zeta r}\cos(\omega_f t)\right] = kY\cdot\sqrt{1+(2\zeta r)^2}\cdot\text{sen}(\omega_f t+\alpha)$$

$$tg\,\alpha = 2\zeta r$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \overbrace{k\cdot Y\cdot\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}^{F_0}\cdot\text{sen}(\omega_f t+\alpha)$$

$$x_p(t) = \underbrace{\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}_{X_p}\cdot\text{sen}(\omega_f t+\alpha-\psi) = \frac{Y\cdot\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\cdot\text{sen}(\omega_f t+\alpha-\psi)$$

$$\frac{X_p}{Y} = \text{Transmissibilidade de deslocamento} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

Observa-se que a expressão é exatamente a mesma da transmissibilidade de força.

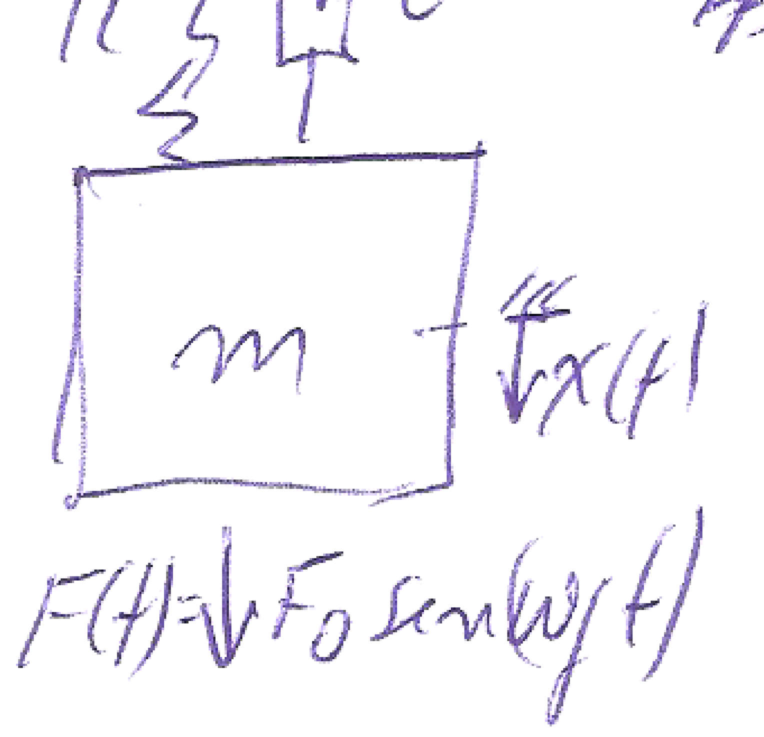
Mais uma vez, quando existe uma vibração no suporte indesejável (nível elevado), a maneira de se reduzir seu efeito no sistema é fazer com que $r > \sqrt{2}$. Somente para $r > \sqrt{2}$ a transmissibilidade fica menor que 1.

Se a frequência de excitação ω_f é dada, o modo de se reduzir seu efeito na massa do sistema dinâmico é reduzir a frequência natural ω_n. Portanto reduzindo k ou aumentando m $\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$.

Observa-se também que $TR = \frac{X_p}{Y} = \frac{X_p\omega_f}{Y\omega_f} = \frac{X_p\omega_f^2}{Y\omega_f^2}$;
ou seja, é a mesma para transmissibilidade de velocidade ou de aceleração.

<u>Considerações sobre energia em sistemas ~~excitados~~ ~~externa~~.</u>

Uma vez que estamos considerando sistemas vibratórios com amortecimento, a solução de regime permanente, portanto a solução particular da equação diferencial, só se mantém se a excitação estiver fornecendo, a cada ciclo, a mesma energia que é dissipada no amortecedor.



~~$x_p(t)$~~ O trabalho realizado por $F(t)$ em um ciclo

$$\tau_{ciclo} = \int_{ciclo} F_0 \, sen(\omega_f t) \cdot dx_p = \int_{ciclo} F_0 X_p \omega_f \, sen(\omega_f t) \cdot \cos(\omega_f t - \psi) \, dt$$

$$x_p(t) = X_p \, sen(\omega_f t - \psi) \therefore \frac{dx_p}{dt} = X_p \omega_f \cos(\omega_f t - \psi)$$

$$\tau_{ciclo} = F_0 X_p \omega_f \cdot \int sen(\omega_f t) \cdot [\cos\psi \cdot \cos(\omega_f t) + sen\psi \cdot sen(\omega_f t)] \, dt =$$

$$= F_0 \cdot X_p \cancel{\omega_f} \left[\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos\psi \cdot sen(\omega_f t) \cos(\omega_f t) \, d(\omega_f t)}_{0} + sen\psi \cdot \int_0^{2\pi} sen^2(\omega_f t) \, d(\omega_f t) \right.$$