Notas sobre o Guidorizzi, Calculo 1, 5ed - Semana 13 - página 161.
Artur Hideyuki Tomita

7. Derivadas (cont.).

7.8 Função derivada e derivadas de ordem superior.

Quando calculamos $f'(x)$ para todo x onde ela existe, temos a função derivada f'. Como comentando anteriormente, o domínio da função derivada f' pode ser menor que a do domínio de f.

Podemos então calcular a derivada da função f'. Podemos chamar por exemplo $g = f'$ e fazer a derivada de g. Essa função g' é a função f''. Da mesma forma, podemos calcular f'''.

Em geral, podemos denotar a n-ésima derivada como $f^{(n)}$. Indutivamene, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Quando a derivada sai pela fórmula como no Exemplo 1, basta aplicar a derivada.

No exemplo 2, a verificação de $f'(1)$ não existe e por isso não faz parte do gráfico de f'. Nos outros pontos, bastou calcular pela fórmula.

7.9 Notações para derivada.

A outra notação que é comumente usada para derivação é a notação de fração. Se $y = f(x)$ indicamos a derivada também for $\frac{dy}{dx}$. Esta notação, se usada com cuidado pode ser pensada realmente como se fosse uma fração. Quando mexemos com inversas de funções, nesta notação comparamos $\frac{dy}{dx}$ com $\frac{dx}{dy}$. Quando mexemos com integral, esta notação é útil também.

A segunda derivada nesta notação é $\frac{d^2y}{dx^2}$ e mais geralmente $\frac{d^ny}{dx^n}$ para n inteiro positivo. Em geral, $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}(\frac{d^ny}{dx^n})$ (nesta última, considere que $z = \frac{d^ny}{dx^n}$ e calcule $\frac{dz}{dx}$).

Nesta subsecção são feitos exemplos para se acostumar com a notação.

Aqui também é feito uma pequena argumentação sobre a regra da cadeia que será vista em seção posterior e o comentário sobre a regra da cadeia será deixado para tal seção.

Uma outra notação que aparece em equações diferenciais é $\dot{x}$ para primeira derivada de x, $\dot{x}$ para primeira derivada, $\ddot{x}$ para segunda derivada etc...

7.10. Regra da Cadeia para derivação de função composta.

Se $h(t) = f(g(t)) = (f \circ g)(t)$ com g derivável em t e f derivável em $g(t)$ então $(f \circ g)'(t) = h'(t) = f'(g(t)).g'(t)$.

Se chamarmos $f(x) = y$ e $g(t) = x$ então $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ e $g'(t) = \frac{dx}{dt}$.

Assim a regra da cadeia fica $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$. Assim, pensando em frações é como se do lado direito estivemos dividindo e multiplicando por dx. Note que quando calculamos isto num instante t_0, então $\frac{dy}{dx}$ é calculado no x_0 correspondente ao instante t_0 ou seja $x_0 = x(t_0)$. Assim, é preciso tomar um pouco mais de cuidado ao usar esta notação de frações.

Por exemplo se tivessemos, $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$. Ao calcular num instante t_0, teremos $x_0 = x(t_0)$ e $y_0 = y(x_0)$ para serem utilizados nos cálculos no ponto t_0.

Não é necessário neste curso saber a demonstração da regra da cadeia que aparece nesta subsecção.

7.11. Aplicações da Regra da Cadeia.

São dados exemplos do uso da regra da cadeia. É recomendável acostumar se a usar a fórmula com mais cuidado, escrevendo a composição até que a conta se torne natural. Na dúvida, escreva mais e faça o passo a passo para não cometer erros. Isto vale não somente para a regra da cadeia como para resolver uma função que use composta, soma, multiplicação, frações, exponeciações, etc... como por exemplo os exemplos 5, 6 e 7.

7.12. Derivada de $f(x)^{g(x)}$.

A derivada desta função é feita reescrevendo $f(x)^{g(x)} = (e^{\ln(f(x)})^{g(x)} = e^{\ln(f(x)).g(x)}$ e utilizar a regra da cadeia com as funões $k(x) = e^x$, $s(x) = \ln(f(x)).g(x)$ e $f(x)^{g(x)} = k \circ s(x)$. Há uma fórmula específica no livro para isto, mas sempre se pode escrever a composta acima e fazer a conta utilizando a regra da cadeia.

7.13. Derivação de função dada implicitamente.

Neste caso, seria quando sabemos que para um cada x existe um único y, mas nem sempre está claro como escrever a função que associa y em função de x (basicamente podemos escrever y sozinho à esquerda e coisas com x à direita). Por exemplo, em $y^2 + xy - 1 = 0$ o y está escrito implicitamente em função de x. Note que é mais fácil colocar x em função de y explicamente ($y = 0$ não ocorre, então dá para deixar x sozinho como $x = \frac{1-y^2}{y}$). Para derivar implicamente simplesmente considere que temos compostas $y = y(x)$ e fazemos as contas, por exemplo y^2 deve ser visto como uma composta e $y.x$ um produto de duas funções que dependem de x etc...

A derivação implicita é usado para encontrar a derivada da função inversa. Para verificar que a inversa é derivável, é preciso usar primeiro o teorema da função inversa. Iremos usar as derivadas de função inversa como na tabela. Algumas derivadas de inversa aparecem em alguns exemplos desta subsecção (exemplos 6 e 7).

7.14. Interpretação de $\frac{dy}{dx}$ como quociente diferencial.

Para cada x podemos tomar a relação $dy = f'(x)dx$, que é chamda da diferencial de $y = f(x)$. Mais ou menos a ideia é ver $f'(x)$ como a proporção da variação de dy com a variação de dx. Ver Δy e Δx na figura da página 193. Pela definição de derivada, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vai se aproximando de $f'(x)$. O que ocorre agora é pensar em manusear os 'limites' dy de Δy e dx de Δx separadamente, e estes são pensados como números infinitamente pequenos, os infinitésimos.

Veja os exemplos da subsecção para ver cálculos de diferenciais. A notação de diferencial aparece na notação de integral, $\int f(t)dt$.

7.15. Velocidade e Aceleração. Taxa de variação.

A velocidade é sobre a relação deslocamento/tempo. No começo da subsecção é comentado sobre velocidade média e a velocidade instantânea (obtida pelo limite das velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores). Podemos usar o mesmo conceito para medir outros tipos de 'velocidade', que no caso são chamados de taxa de variação. A aceleração á taxa de variação da velocidade e corresponde a segunda derivada da relação deslocamento/tempo.

Nos exercícios são dados vários exemplos de taxa de variação e faremos alguns exercícios em vídeo.

7.16. Problemas envolvendo reta tangente e reta normal ao gráfico de uma função.

No início da subsecção são dados as equações da reta tangente e da reta normal.

8. Funções inversas.

São dadas as definições das funções arco seno, arco cosseno. É importante notar a diferença no domínio dessas funções.

Na subsecção 8.2, estão a derivada do arco seno e arco tangente e alguns exemplos de derivação usando a composta e estas funções. O arco seno e o arco tangente aparecem na tabela de integração.

Desta seção é importante lembrar do domínios do arco seno, arco tangente e a fórmula das suas derivadas.