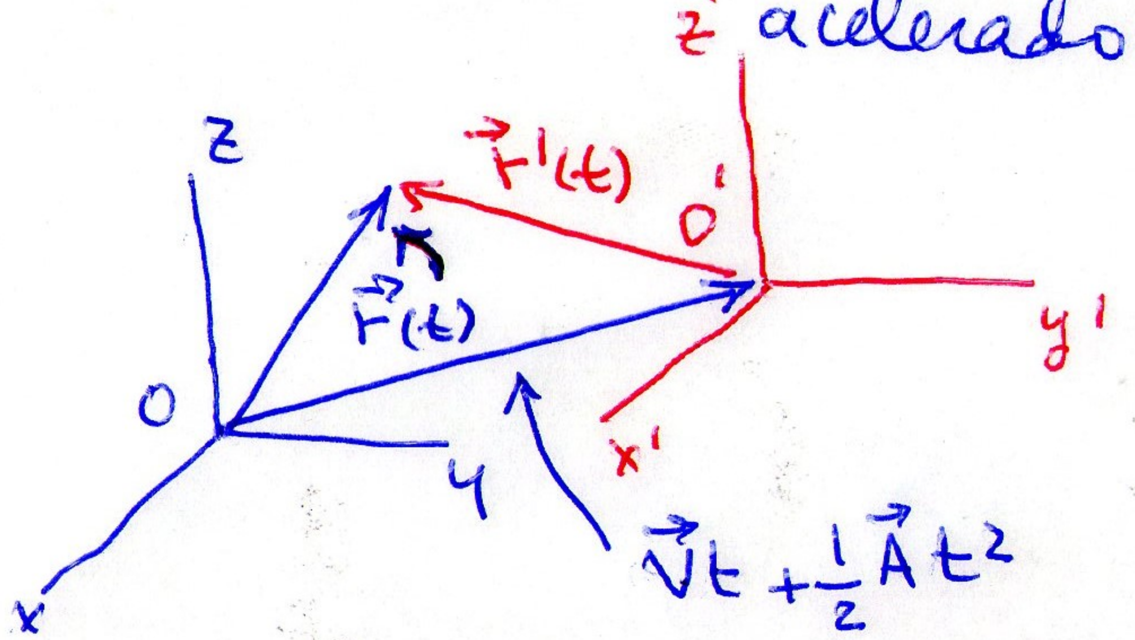
FÍSICA I – 2020

REFERENCIAIS NÃO INERCIAIS E FORÇAS DE INÉRCIA

EPISÓDIO 2

PARA LEMBRAR – Aparecimento de uma 'força de inércia' no contexto mais simples: referencial uniformemente acelerado em relação a um inercial



Relacionamento 'geométrico' das duas descrições:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{V}t + \frac{1}{2}\vec{A}t^2 \ ;$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} + \vec{V} + \vec{A}t \ ;$$

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \frac{d\vec{r}'}{dt^2}(t) + \vec{A}}$$

inercial

Equação de movimento aqui:

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t)$$

acelerado

Como é a equação de movimento aqui?

Lembrar das suposições: $t = t'$

$m = m'$

$\vec{F}(t) = \vec{F}'(t')$

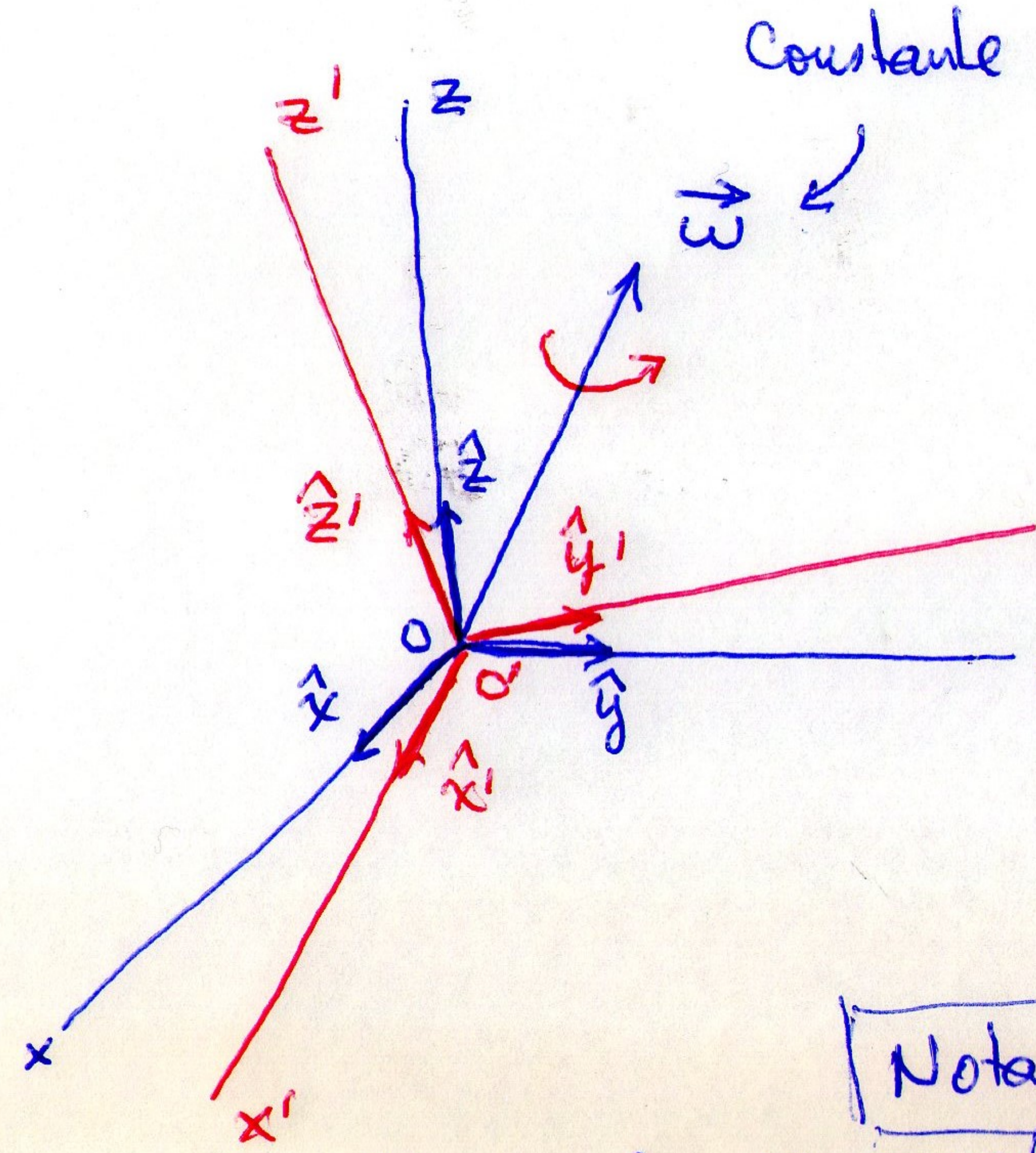
$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}'(t) + \vec{A}\right) = \vec{F}(t)$$

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}(t) = \vec{F}(t) \underbrace{-m\vec{A}}}$$

'Força de inércia!'

'FORÇAS DE INÉRCIA' em um referencial em rotação uniforme (em relação a um inercial)

* Procedimento análogo ao precedente!



i) Dependência temporal dos versores de 0'

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}' ; \quad \frac{d\hat{y}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{y}' ; \quad \frac{d\hat{z}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{z}' .$$

ii) Relacionamento 'geométrico' das duas descrições, em termos de um vetor genérico $\vec{u}(t)$: em coordenadas

$$\vec{u}(t) = (\vec{u}\cdot\hat{x})\hat{x} + (\vec{u}\cdot\hat{y})\hat{y} + (\vec{u}\cdot\hat{z})\hat{z} =$$
$$= (\vec{u}\cdot\hat{x}')\hat{x}' + (\vec{u}\cdot\hat{y}')\hat{y}' + (\vec{u}\cdot\hat{z}')\hat{z}'$$

Notação abreviada: $\boxed{\vec{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z} = u_{x'}\hat{x}' + u_{y'}\hat{y}' + u_{z'}\hat{z}'}$

Derivada com relação a t:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \underbrace{\frac{du_x}{dt}\hat{x} + \frac{du_y}{dt}\hat{y} + \frac{du_z}{dt}\hat{z}}_{\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_0} = \underbrace{\frac{du_{x'}}{dt}\hat{x}' + \frac{du_{y'}}{dt}\hat{y}' + \frac{du_{z'}}{dt}\hat{z}'}_{\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{0'}} + u_{x'}\frac{d\hat{x}'}{dt} + u_{y'}\frac{d\hat{y}'}{dt} + u_{z'}\frac{d\hat{z}'}{dt}$$

$$u_{x'}(\vec{\omega}\times\hat{x}') + u_{y'}(\vec{\omega}\times\hat{y}') + u_{z'}(\vec{\omega}\times\hat{z}') =$$
$$= \vec{\omega}\times\vec{u}$$

∴ Relação geral:

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{0'} + \vec{\omega}\times\vec{u}}$$

continuação do relacionamento geométrico

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{0'} + \vec{\omega}\times\vec{u}}$$

Aplicando essa relação (geral) a $\vec{r}(t)$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0 = \vec{v}(t) = \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{0'}}_{\vec{v}'(t)} + \vec{\omega}\times\underset{\vec{r}'(t)}{\underset{\shortparallel}{\vec{r}(t)}} \longrightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\omega}\times\vec{r}(t)$$

$$\downarrow$$

Aplicando a $\vec{v}(t)$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_0 = \vec{a}(t) = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{0'} + \vec{\omega}\times\vec{v} \longleftrightarrow \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{0'} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{0'}}_{\vec{a}'(t)} + \vec{\omega}\times\underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{0'}}_{\vec{v}'(t)}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{\omega}\times\vec{v}'(t) + \vec{\omega}\times\vec{v}(t)$$

$$\vec{\omega}\times\vec{v}'(t) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\underset{\vec{r}'(t)}{\underset{\shortparallel}{\vec{r}(t)}})$$

Então $\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'(t) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'(t))}$

2ª Lei de Newton em 0: $m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t)$ ou $\boxed{m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)}$

Em termos das quantidades de 0': $m[\vec{a}'(t) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'(t) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'(t))] = \underset{\vec{F}'(t)}{\underset{\shortparallel}{\vec{F}(t)}}$

Logo $$\boxed{m'\vec{a}'(t) = \vec{F}(t) \underbrace{- 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'(t)}_{\text{coriolis}} \underbrace{- m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'(t))}_{\text{centrífuga}} = \vec{F}(t) + \vec{F}_{in}(t)}$$

FORÇAS DE INÉRCIA no referencial em rotação O':

Em O (inercial)

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$$

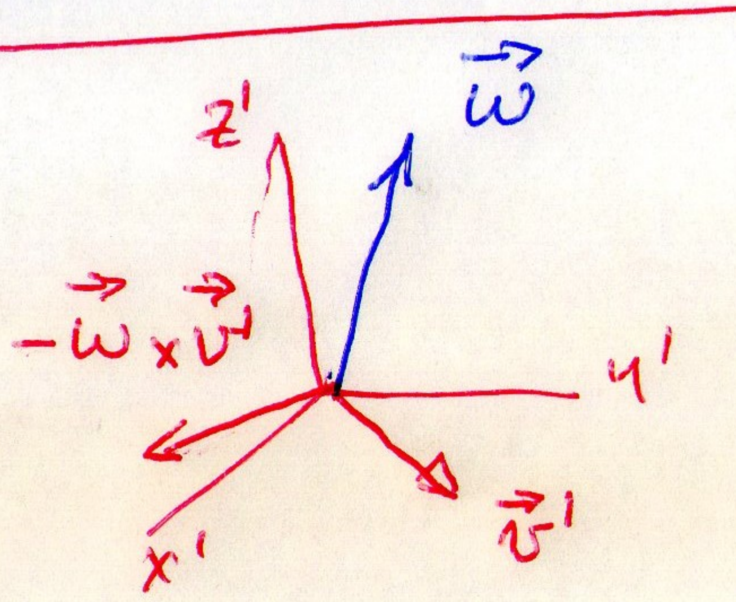
Em O' (vel. angular $\vec{\omega}$ com relação a O)

$$m a'(t) = \vec{F}(t) + \vec{F}_{cor}(t) + \vec{F}_{cf}(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{cor}(t) &= -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'(t) \\ \vec{F}_{cf}(t) &= -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'(t)) \end{aligned}}$$

$\vec{F}_{cor}(t)$: força de Coriolis

* Linear em $\vec{v}'(t)$ (velocidade no referencial girante)
* Acelera <u>para a direita</u> (quando $\vec{\omega}$ aponta para cima), sempre perpendicular a $\vec{v}'$ e a $\vec{\omega}$.



$\vec{F}_{cf}(t)$: força centrífuga

* Depende da posição em O', não da velocidade $\vec{v}'$
* Usando $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \equiv (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$,

único que resta quando $\vec{r}'\cdot\vec{\omega} = 0$

$$\boxed{-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -m(\vec{\omega}\cdot\vec{r}')\vec{\omega} + m\omega^2\vec{r}'}$$

EFEITOS INERCIAIS DA ROTAÇÃO DA TERRA

Efeitos centrífugos - Forma "oblata" da terra

* Efeitos gravitacionais, afetam órbitas de satélites artificiais (Abraão de Morais, na época dos primeiros satélites artificiais)

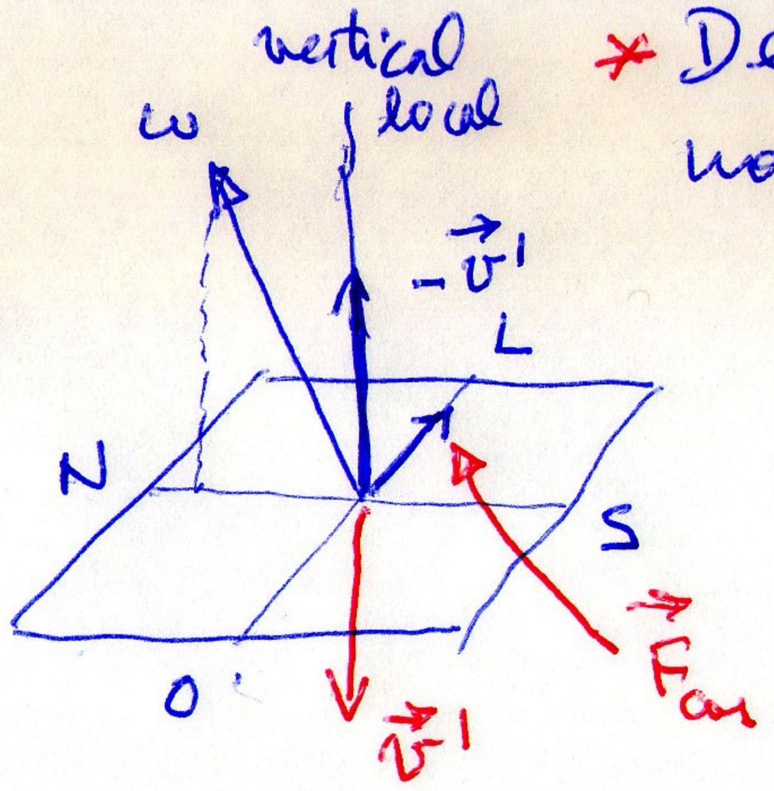
* Além desses efeitos, correções centrífugas no $\vec{g}$ dependentes da latitude.

$-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ * se anula nos polos
* maior no equador: $\omega^2 \vec{r}'$

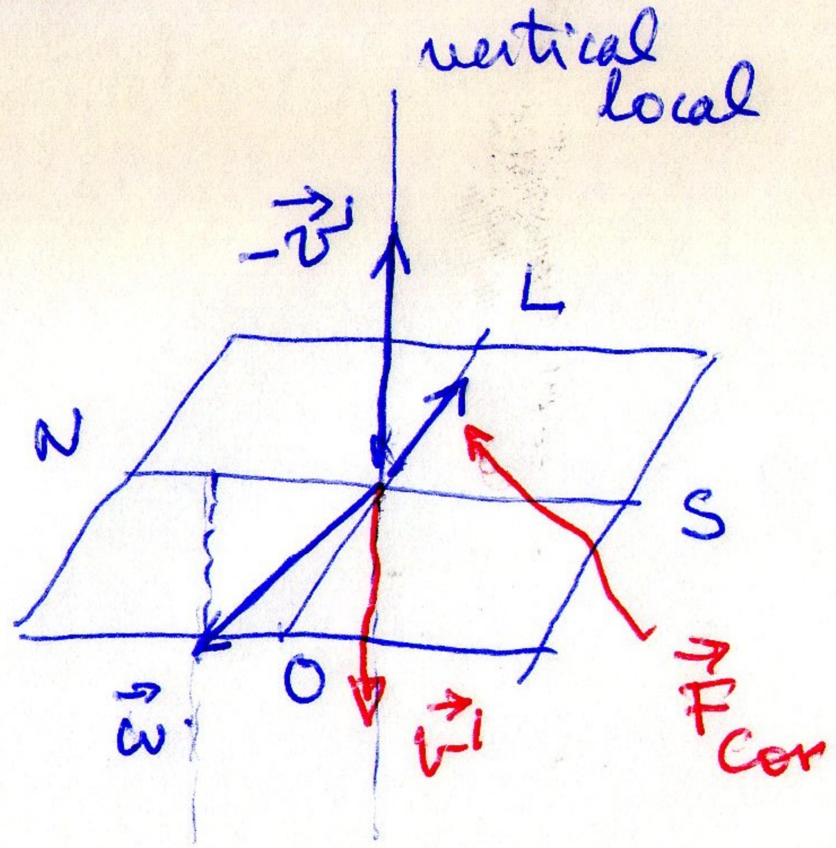
Efeitos da força de Coriolis -

* Desvio para leste na queda livre (exceto nos polos!)

Hemisfério norte:



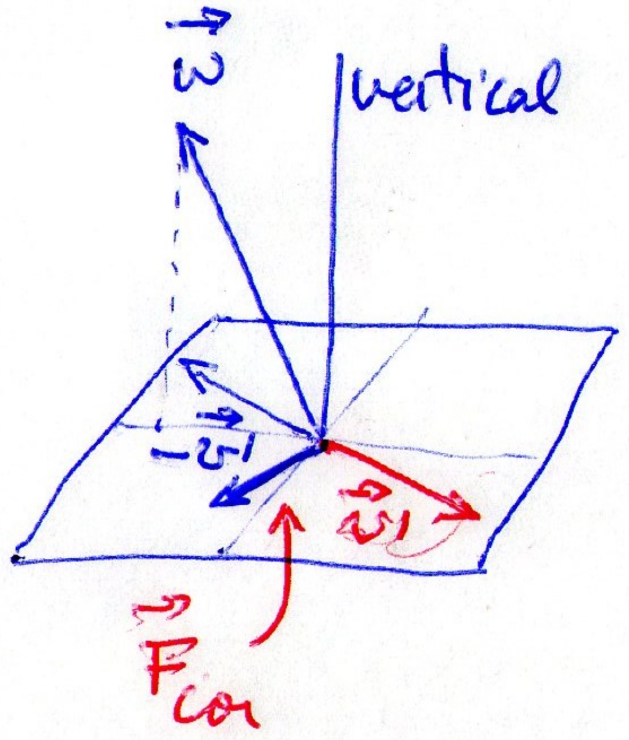
Hemisfério sul:



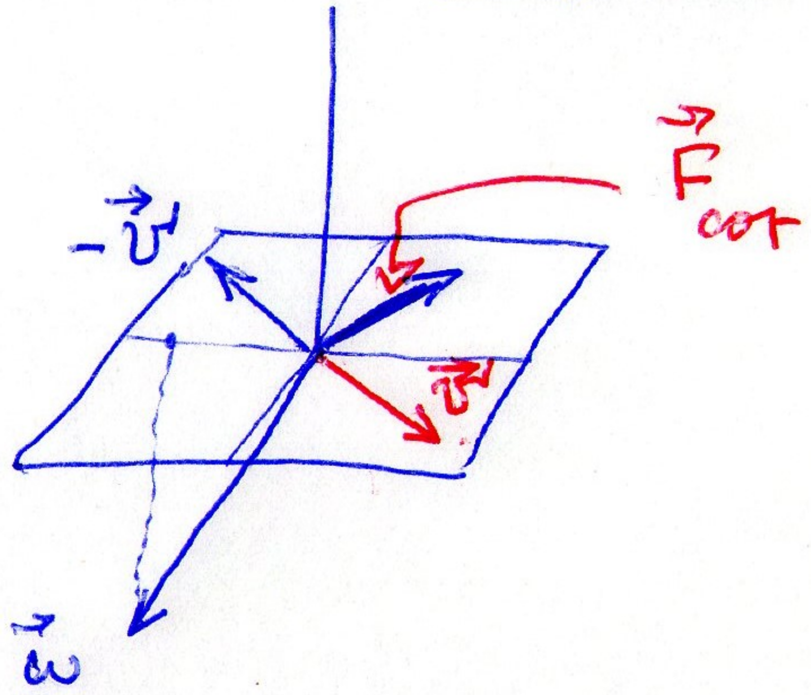
<u>Efeito da força de Coriolis</u> (cont.)

* Movimentos horizontais: no hemisfério norte desvio à <u>direita</u>
no hemisfério sul desvio à <u>esquerda</u>

Hemisfério norte



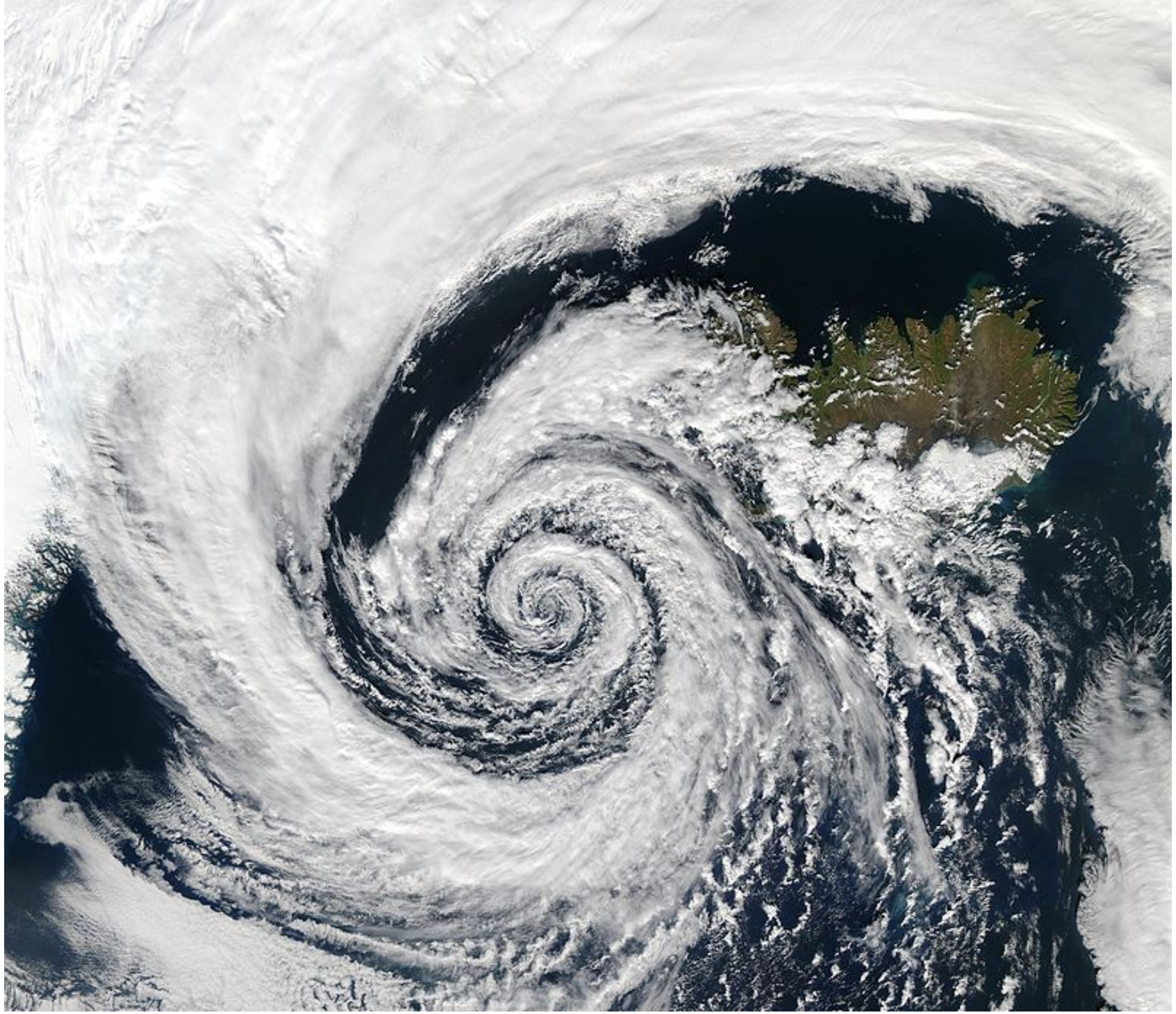
Hemisfério sul

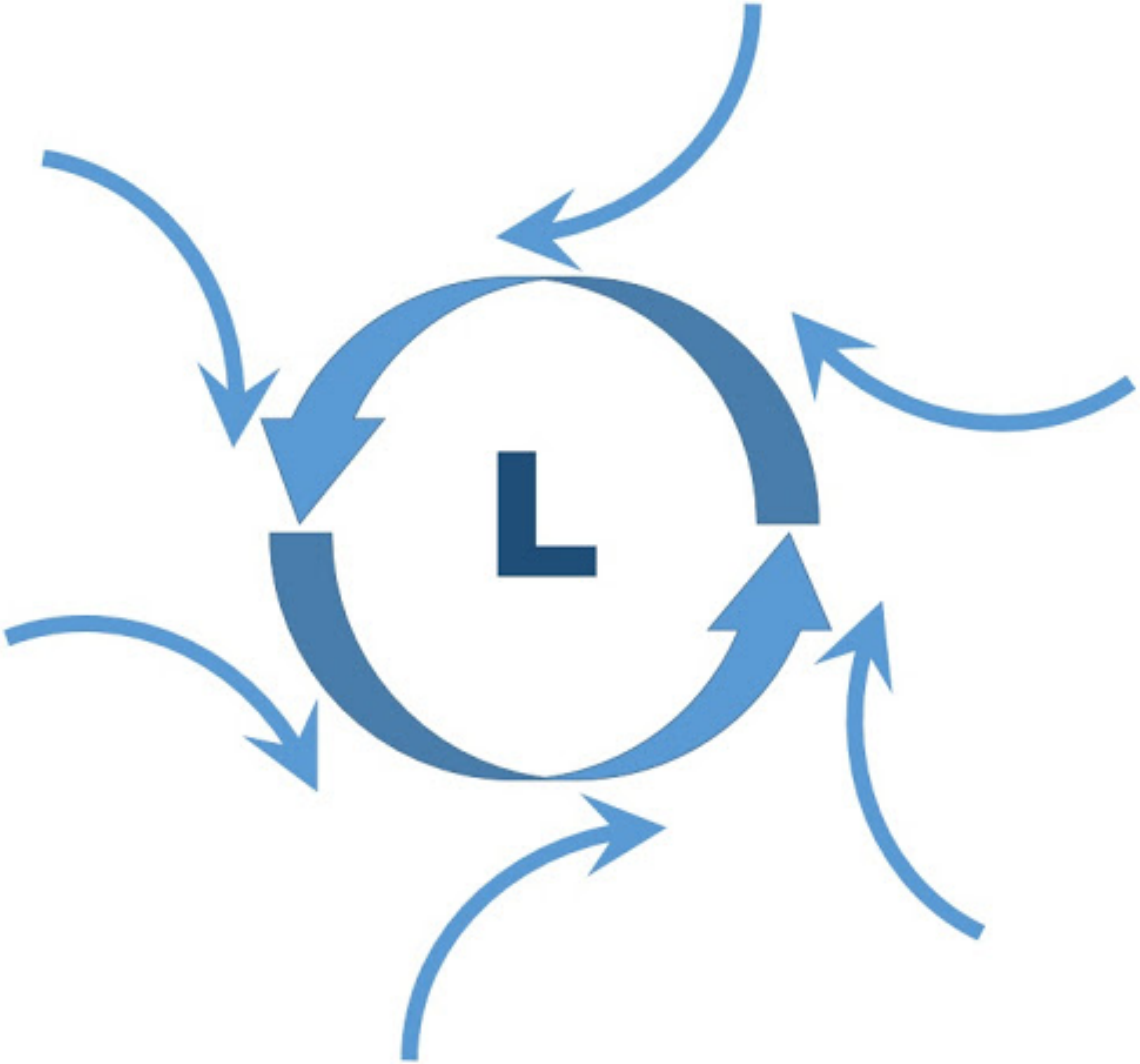


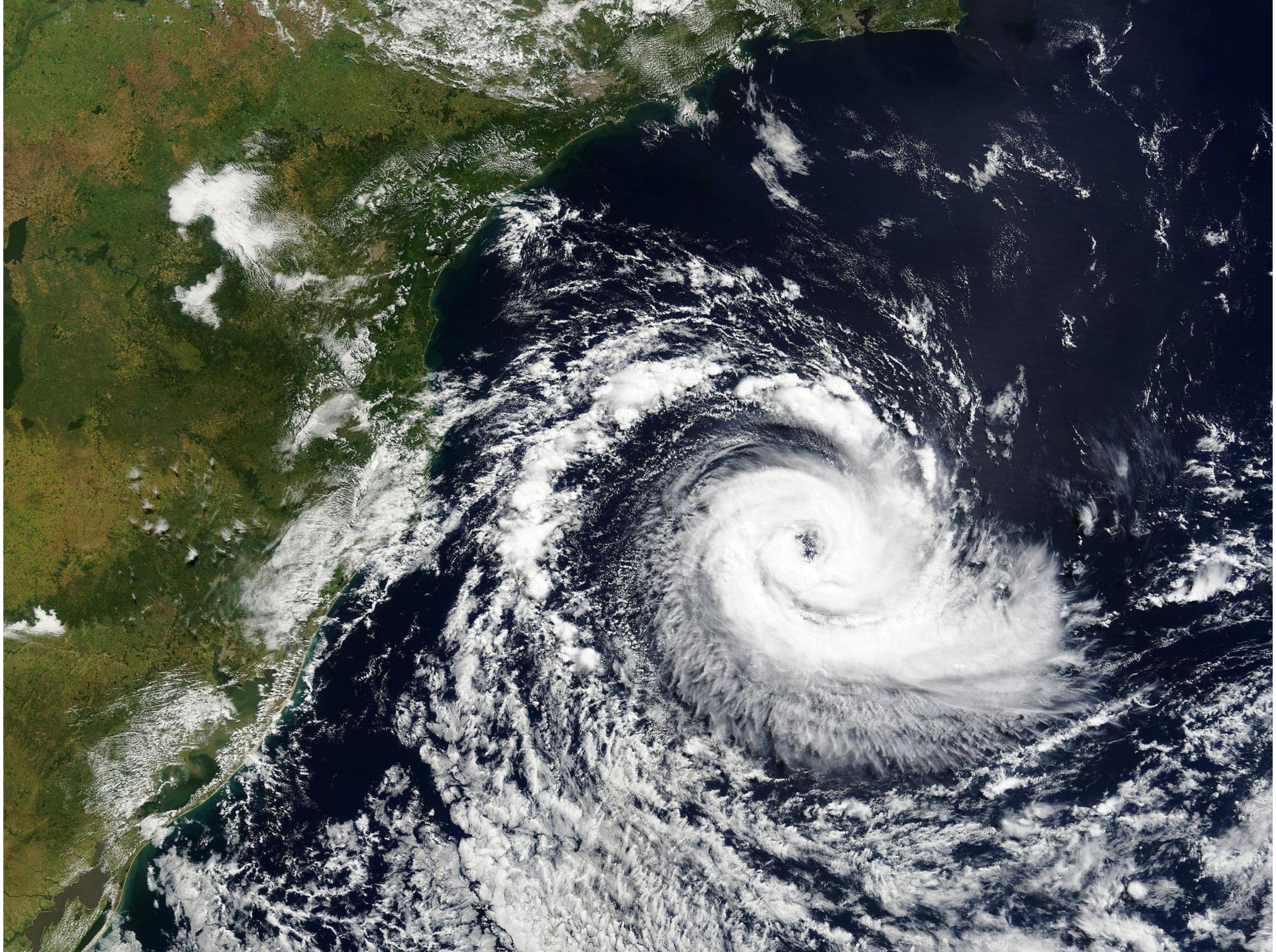
Conseqüências: 1) Rotação e sentido da rotação em cada hemisfério de massas de ar sugadas por centros de baixa pressão.

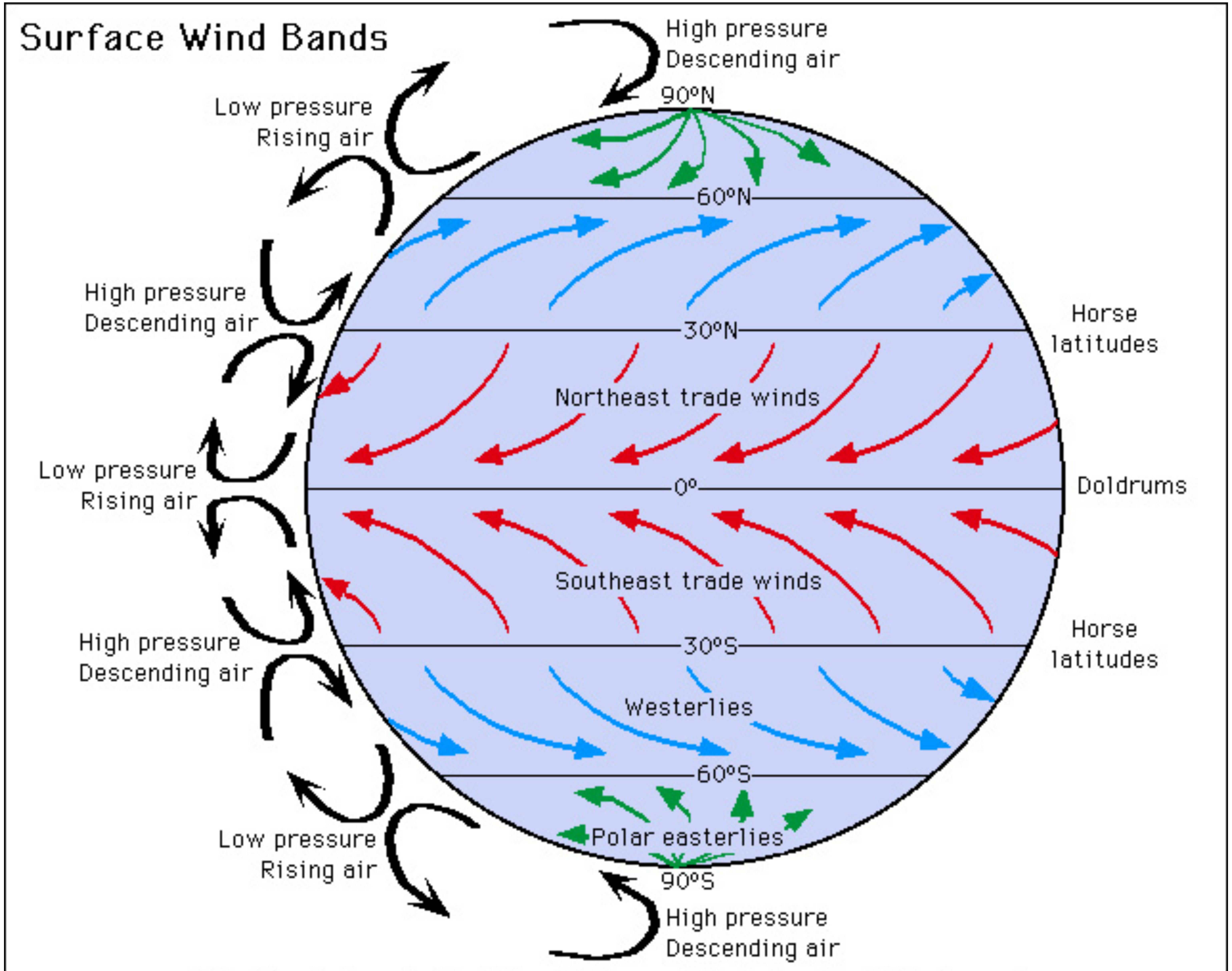
2) Características "macro" dos movimentos atmosféricos (na escala da terra como um todo)
E.g. deflexão dos <u>ventos alíseos</u>.

3) Pêndulo de Foucault (forças de Coriolis sôbre o movimento (quase) horizontal do pêndulo.

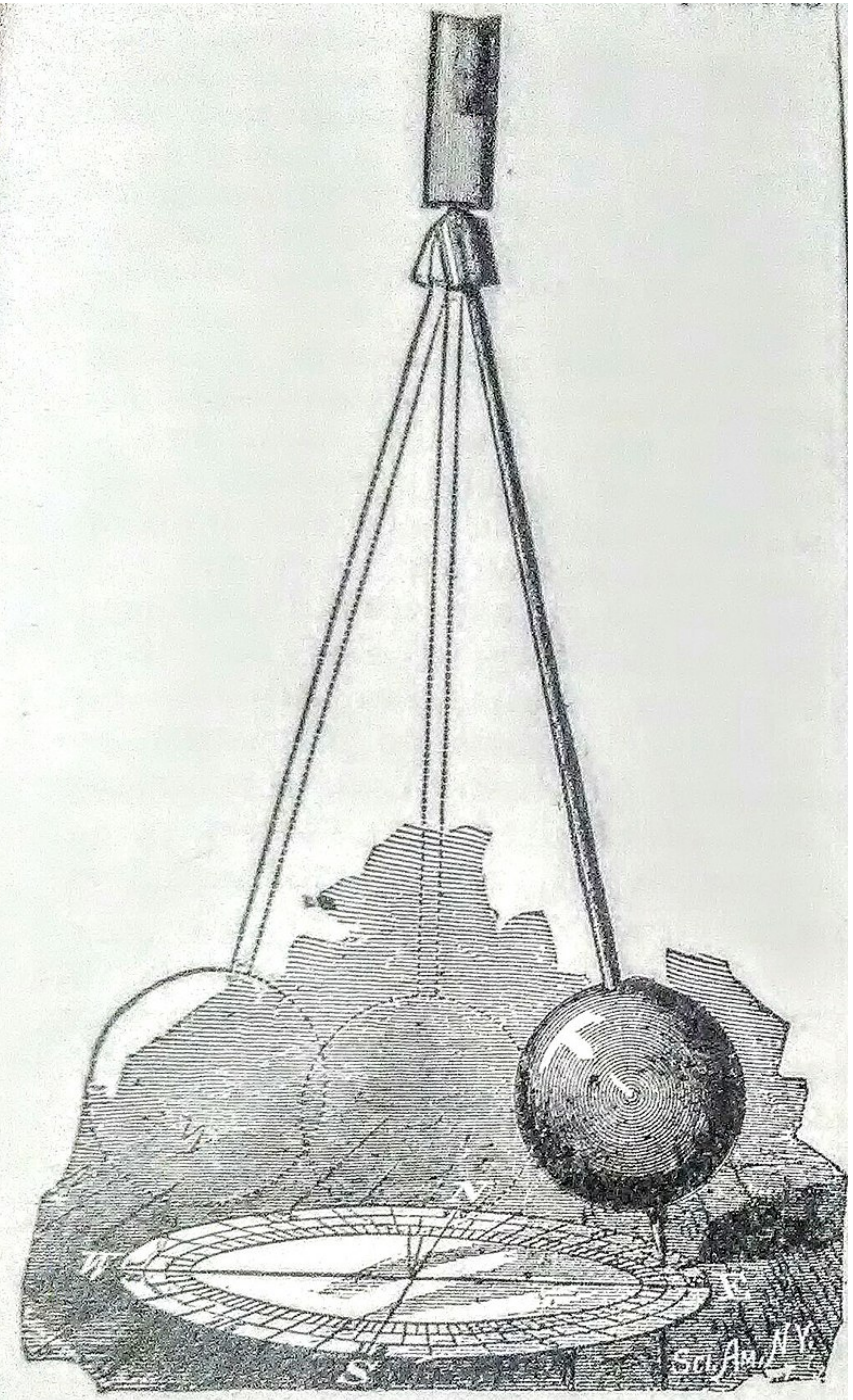



L

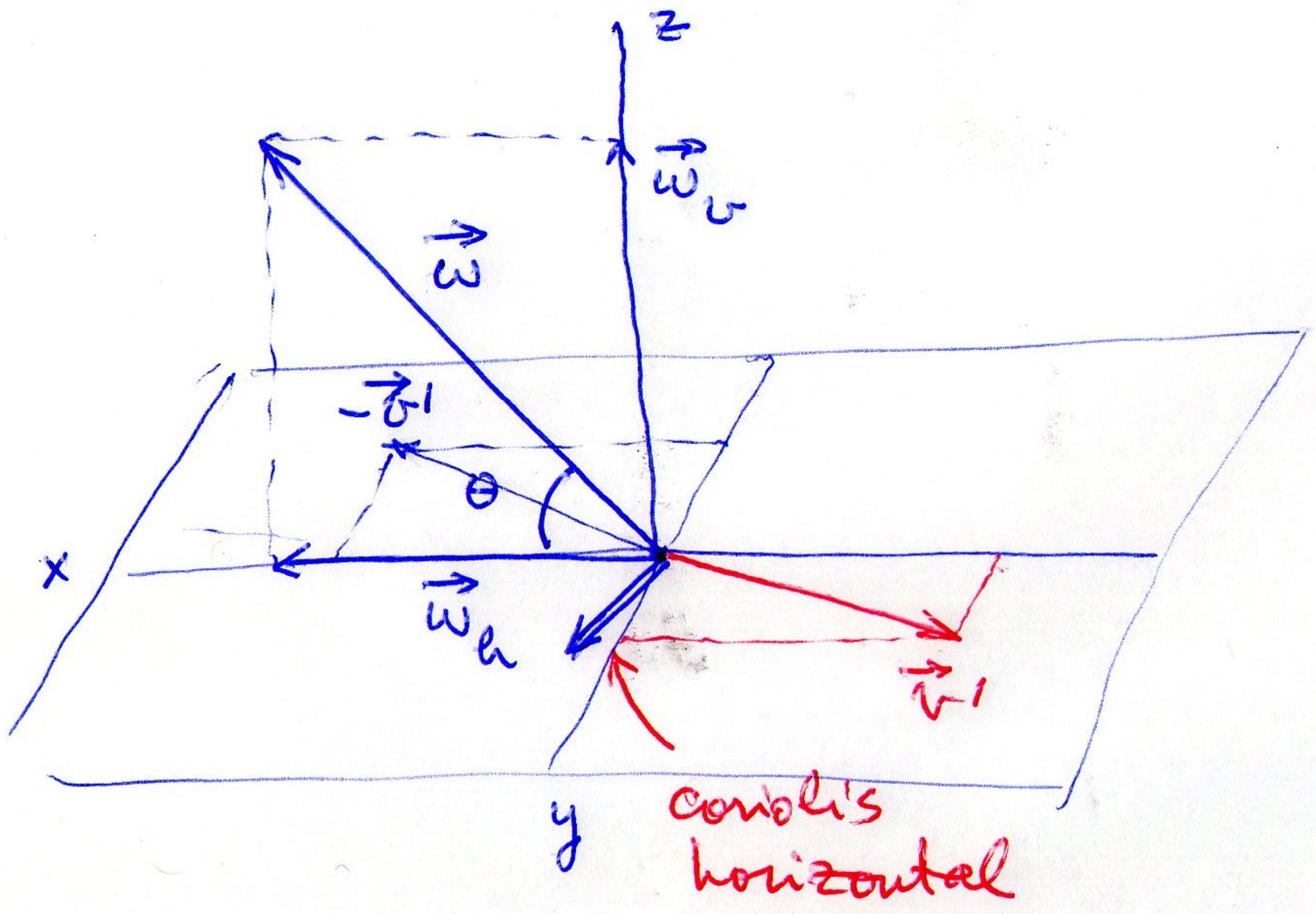




Adapted from Duxbury, Alyn C. and Alison B. Duxbury. *An Introduction to the World's Oceans, 4/e.*


N
W
E
S
Sci. Am. N.Y.

Forças de Coriolis e o pêndulo de Foucault



θ: latitude

$$\vec{\omega}_v = \omega \operatorname{sen}\theta \ \hat{z}$$

$$\vec{\omega}_h = \omega \cos\theta \ \hat{x}$$

$$-(\vec{\omega}_v + \vec{\omega}_h)\times\vec{v}' = \underbrace{-\vec{\omega}_v\times\vec{v}'}_{\text{aceleração horizontal}}\ \underbrace{-\vec{\omega}_h\times\vec{v}'}_{\text{aceleração vertical}}$$

↑
responsável
pela precessão