2b) $\ddot{y}(x) - (1+x)y(x) = 0$; em torno do ponto $x_0 = 1$ (i)

Como $p(x) = 0$ e $g(x) = -(1+x)$ são polinômios que não possuem singularidade em torno do ponto x_0, na verdade, não possuem nenhum ponto de singularidade, então $\ddot{y}(x) - (1+x).y(x) = 0$ tem duas soluções diferentes, linearmente independentes, da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . (x-1)^n$$

Derivando-se a equação acima duas vezes, obtemos:

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n . n . (x-1)^{n-1}$$

e

$$\ddot{y}(x) = \sum_{n=2} a_n . n . (n-1) . (x-1)^{n-2}$$

Substituindo $\ddot{y}(x)$ e $y(x)$ em (i), temos:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n(n-1).(x-1)^{n-2} - (1+x) . \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . (x-1)^n = 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n(n-1).(x-1)^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . (x-1)^n -$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . (x-1)^n . x = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Vamos proceder com a seguinte mudança de variável: $x - 1 = z$ ou $x = z + 1$. Portanto, a equação (ii) pode ser reescrita como:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n . (n-1) . z^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . z^n (z+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n(n-1) . z^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . z^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n . (n-1) . z^{n-2}}_{\mathrm{I}} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . z^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . z^{n+1}}_{\mathrm{II}} = 0$$

Agora, precisamos deixar todos os termos x elevados à mesma potência. Ajustando I, temos:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n . (n-1) . z^{n-2}$$

Chamando $m = n-2$ ou $n = m+2$, chegamos à:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m+2} . (m+2)(m+2-1) . z^m$$ Como m e n são variáveis mudas, então: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} . (n+2) . (n+1) . z^n$

Ajustando II, temos:

$$-\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot Z^{n+1}$$

Chamando $m=n+1$ ou $n=m-1$, chegamos à:

$-\sum_{m=1}^{+\infty} a_{m-1} \cdot Z^m$. Como n e m são variáveis mudas, então: $-\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \cdot Z^n$. Dessa forma,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot Z^n - 2\sum_{n=0}^{} a_n \cdot Z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \cdot Z^n = 0 \quad (iii)$$

Como a faixa de valores de $\underline{n}$ é diferente, reescrevemos a equação (iii), deixando explícito o termo $n=0$:

$$a_2 (0+2) \cdot (0+1) \cdot Z^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) \cdot Z^n - 2a_0 \cdot Z^0 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot Z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \cdot Z^n = 0 \Rightarrow$$

$$2a_2 - 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2a_n - a_{n-1}] \cdot Z^n \} = 0$$

Por identidade polinomial, temos:

$$\begin{cases} 2a_2 - 2a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = a_0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2a_n - a_{n-1}] = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \dfrac{2a_n + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases}$$

Para $n=1$, temos:

$$a_3 = \frac{2 \cdot a_1 + a_0}{(1+2)(1+1)} = \frac{2a_1 + a_0}{6}$$

Para $n=2$, temos:

$$a_4 = \frac{2 \cdot a_2 + a_1}{(2+2)(2+1)} = \frac{2 \cdot a_2 + a_1}{12} = \frac{2a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{2 \cdot a_0}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{12}$$

Para $n=3$, temos:

$$a_5 = \frac{2 \cdot a_3 + a_2}{(3+2)(3+1)} = \frac{2 \cdot a_3 + a_2}{20} = \frac{2a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{1}{10}\left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{12}\right) + \frac{a_0}{20} = \frac{a_0}{60} + \frac{a_1}{120} + \frac{a_0}{20} = \frac{2a_0 + a_1 + 6a_0}{120} =$$

$$a_5 = \frac{8 \cdot a_0}{120} + \frac{a_1}{120}$$

Como a solução é dada por:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 (x-1)^0 + a_1 (x-1)^1 + a_2 (x-1)^2 + a_3 (x-1)^3 + a_4 (x-1)^4 + a_5 (x-1)^5 + \dots$$

$$y(x) = a_0 + a_1 (x-1) + a_0 (x-1)^2 + \left(\frac{2a_1 + a_0}{6}\right) \cdot (x-1)^3 + \left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{12}\right)(x-1)^4 + \left(\frac{8 \cdot a_0}{120} + \frac{a_1}{120}\right)(x-1)^5 + \dots$$

$$y(x) = a_0 \left\{ 1 + (x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \frac{8}{120}(x-1)^5 + \dots \right\} + a_1 \left\{ (x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4 + \frac{1}{120}(x-1)^5 + \dots \right\}$$