Solução da P2 de Geofísica Matemática - 06/06/2020

Questão 1

Solução:

a) Aplicando o critério da razão à série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4-\pi)^n}{n^3+4}$, temos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(4-\pi)^{n+1}}{(n+1)^3+4}\cdot\frac{(n^3+4)}{(4-\pi)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\cancel{(4-\pi)^n}\cdot(4-\pi)\cdot \cancel{n^3}\left(1+\overbrace{\frac{4}{n^3}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n^3}\left[\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)^3+\underbrace{\frac{4}{n^3}}_{\to 0}\right]\cdot \cancel{(4-\pi)^n}}\right| = (4-\pi) < 1$$

Logo, pelo critério da razão esta série é convergente.

b) Aplicando o critério da razão à série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n+n}{2^n+1}$, temos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3^{n+1}+n+1}{2^{n+1}+1}\cdot\frac{2^n+1}{3^n+n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3^n\left(3+\overbrace{\frac{n}{3^n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{1}{3^n}}^{\to 0}\right)}{2^n\left(2+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}\right)\cdot 3^n}\cdot\frac{2^n\cdot\left(1+\overbrace{\frac{1}{2^n}}^{\to 0}\right)}{\left(1+\underbrace{\frac{n}{3^n}}_{\to 0}\right)}\right| = \frac{(3)(1)}{(2)(1)} = \frac{3}{2} > 1$$

Logo, pelo critério da razão esta série é divergente.

Questão 2

Solução

a) $(2+x^2)\,\ddot{y}(x) + 3x\,\dot{y}(x) - y(x) = 0 \quad (i)$

Dividindo-se a equação (i) por $(2+x^2)$, temos:

$$\ddot{y}(x) + \frac{3x}{(2+x^2)}\dot{y}(x) - \frac{1}{(2+x^2)}y(x) = 0 \quad (ii)$$

com $p(x) = \frac{3x}{(2+x^2)}$ e $q(x) = -\frac{1}{(2+x^2)}$

Tanto $p(x)$ quanto $q(x)$ são polinômios que não tem singularidade no ponto $x_0 = 0$. Como $x_0 = 0$ é ponto ordinário, então $(2+x^2)\,\ddot{y}(x) + 3x.\dot{y}(x) - y(x) = 0$ tem duas soluções diferentes, linearmente independentes, da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$$

Derivando-se a equação acima duas vezes, obtemos:

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.n.x^{n-1}$$

e

$$\ddot{y}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n . (n-1) . x^{n-2}$$

Substituindo $y(x)$, $\dot{y}(x)$ e $\ddot{y}(x)$ em (i), temos:

$$(2+x^2) \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n . (n-1) . x^{n-2} + (3x) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n . n . x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\overbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} 2 . a_n . n (n-1) x^{n-2}}^{\mathrm{I}} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n (n-1) . x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 3 . a_n . n . x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n = 0$$

Agora, precisamos deixar todos os termos x elevados à mesma potência. Ajustando I, temos:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2 . a_n . n (n-1) x^{n-2}$$

Chamando $m = n-2$ ou $n = m+2$, chegamos à:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} 2 . a_{m+2} . (m+2)(m+2-1) . x^m .$$ Como m e n são variáveis mudas, então: $\sum_{n=0}^{+\infty} 2 . a_{n+2} (n+2) . (n+1) . x^n$. Dessa forma,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2 . a_{n+2} (n+2)(n+1) . x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n (n-1) . x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 3 . a_n . n . x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n = 0 \quad \text{(iii)}$$

Como a faixa de valores de n é diferente, reescreveremos a equação (iii) deixando explícito os termos $n=0$ e $n=1$:

$$2 . a_2 (0+2)(0+1) . x^0 + 2 . a_3 (1+2)(1+1) . x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 2 . a_{n+2} (n+2)(n+1) . x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n (n-1) x^n + 3 . a_1 . (1) . x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 3 . a_n . n . x^n -$$

$$a_0 . x^0 - a_1 . x^1 - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = 0 \quad \text{(iv)}$$

A equação (iv) pode ser reescrita como:

$$4 . a_2 + 12 . a_3 . x + 3 . a_1 . x - a_0 - a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} 2 . a_{n+2} (n+2)(n+1) . x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n (n-1) x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} 3 . a_n . n . x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

e

$$(-a_0 + 4a_2) + (2a_1 + 12a_3) . x + \sum_{n=2}^{+\infty} 2 . a_{n+2} (n+2)(n+1) . x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n . n (n-1) x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} 3 . a_n . n . x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n . x^n = 0$$

Por identidade polinomial, temos:

$$\begin{cases} (-a_0 + 4a_2) = 0 & \Rightarrow a_2 = \frac{1}{4} a_0 \\ (2a_1 + 12a_3) = 0 & \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{6} a_1 \\ \{[2(n+2)(n+1)]\, a_{n+2} + [n(n-1) + 3n - 1] . a_n\} = 0 & \Rightarrow a_{n+2} = \frac{-[n(n-1)+3n-1]}{[2(n+2)(n+1)]} a_n \quad \text{(v)}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Usando a equação (v), para $n=2$, temos:

$$a_4 = -\frac{[2(2-1)+3(2)-1]}{[2(2+2)(2+1)]} a_2 = -\frac{[2+6-1]}{24} \cdot \frac{1}{4} a_0 = -\frac{7}{96} a_0$$

Para $n=3$

$$a_5 = -\frac{[3(3-1)+3(3)-1]}{[2(3+2)(3+1)]} a_3 = -\frac{[6+9-1]}{40} a_3 = -\frac{14}{40} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) a_1 = \frac{14}{240} \cdot a_1$$

Como a solução é dada por:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4} a_0 \cdot x^2 - \frac{1}{6} a_1 \cdot x^3 - \frac{7}{96} a_0 \cdot x^4 + \frac{14}{240} \cdot a_1 \cdot x^5 + \ldots$$

$$y(x) = a_0 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{7}{96} x^4 + \ldots\right)}_{y_1(x)} + a_1 \underbrace{\left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{14}{240} x^5 + \ldots\right)}_{y_2(x)}$$

b) $\ddot{y}(x) - (1+x) y(x) = 0 \quad$ (i)

Como $p(x) = 0$ e $q(x) = -(1+x)$ são polinômios que não possuem singularidade em torno do ponto x_0, na verdade, não possui nenhum ponto de singularidade, então $\ddot{y}(x) - (1+x) y(x) = 0$ tem duas soluções diferentes, linearmente independentes, da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$$

Derivando-se a equação acima duas vezes, obtemos:

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

e

$$\ddot{y}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

Substituindo $y(x)$, $\dot{y}(x)$ e $\ddot{y}(x)$ em (i), temos:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot x^{n-2} - (1+x) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot x^{n-2}}_{\mathrm{I}} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^{n+1}}_{\mathrm{II}} = 0 \Rightarrow$$

Agora, precisamos deixar todos os termos x elevados à mesma potência. Ajustando I, temos:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

Chamando $m = n-2$ ou $n = m+2$, chegamos à:

$\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m+2}(m+2).(m+2-1).x^m$. Como n e m são variáveis mudas, então: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1).x^n$

Ajustando II, temos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

Chamando $m = n+1$ ou $n = m-1$, chegamos à:

$\sum_{m=1}^{+\infty} a_{m-1} \cdot x^m$. Como n e m são variáveis mudas, então: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \cdot x^n$. Dessa forma,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2).(n+1).x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \cdot x^n = 0 \qquad (ii)$$

Como a faixa de valores de $\underline{n}$ é diferente, reescrevemos a equação (ii) deixando explícito o termo $n=0$:

$$a_2(0+2).(0+1).x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2}(n+2).(n+1).x^n - a_0 \cdot x^0 - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \cdot x^n = 0 \qquad (iii)$$

A equação 3 pode ser reescrita como:

$$2.a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \{[(n+2)(n+1)]a_{n+2} - a_n - a_{n-1}\} \cdot x^n = 0 \qquad (iv)$$

Por identidade polinomial, obtemos:

$$\begin{cases} 2a_2 - a_0 = 0 & \Rightarrow \quad a_2 = \dfrac{a_0}{2} \\ [(n+2)(n+1)]a_{n+2} - a_n + a_{n-1} = 0 & \Rightarrow \quad a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{[(n+2)(n+1)]} \end{cases}$$

Para $n = 1$, temos:

$$a_3 = \frac{a_1 + a_0}{(1+2)(1+1)} = \frac{a_1 + a_0}{6}$$

Para $n=2$, temos:

$$a_4 = \frac{a_2 + a_1}{(2+2)(2+1)} = \frac{a_2 + a_1}{12} = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}$$

Para $n=3$, temos:

$$a_5 = \frac{a_3 + a_2}{(3+2)(3+1)} = \frac{a_3 + a_2}{20} = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_1 + a_0}{6.20} + \frac{a_0}{40} = \frac{a_1}{120} + \frac{a_0}{120} - \frac{a_0}{40} = \frac{a_1 + a_0 + 3a_0}{120} =$$

$$a_5 = \frac{a_1}{120} + \frac{4a_0}{120} = \frac{a_1}{120} + \frac{a_0}{30}$$

Como a solução é dada por:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 + \ldots$$

então:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{2}x^2 + \left(\frac{a_1 + a_0}{6}\right)x^3 + \left(\frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}\right)x^4 + \left(\frac{a_1}{120} + \frac{a_0}{30}\right)x^5 + \ldots \Rightarrow$$

$$y(x) = a_0 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{30}\right)}_{y_1(x)} + a_1 \underbrace{\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5\right)}_{y_2(x)} \Rightarrow$$

Questão 3

Solução:

a) $3x\ddot{y}(x) + \dot{y}(x) - y(x) = 0, \quad x_0 = 0 \qquad (i)$

A equação (i) escrita na forma normal é dada por:

$$\ddot{y}(x) + \frac{1}{3x}\dot{y}(x) - \frac{1}{3x}y(x) = 0$$

Com $p(x) = \frac{1}{3x}$ e $q(x) = -\frac{1}{3x}$

Multiplicando $p(x)$ por $(x - x_0)$ e $q(x)$ por $(x - x_0)^2$, temos:

$$x \cdot p(x) = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad x^2 \cdot q(x) = -\frac{x^2}{3x} = -\frac{x}{3}$$

Assim, podemos concluir que $x_0 = 0$ é ponto singular regular. Como x_0 é ponto singular regular, existe pelo menos uma solução na forma:

$$y(x) = |x - x_0|^r \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \qquad (ii)$$

Como $x_0 = 0$, então:

$$y(x) = x^r \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^{n+r} \qquad (iii)$$

Derivando-se duas vezes a equação (iii), temos:

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (n+r)\, x^{n+r-1}$$

e

$$\ddot{y}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r)(n+r-1) \cdot x^{n+r-2}$$

Substituindo $y(x)$, $\dot{y}(x)$ e $\ddot{y}(x)$ na equação (i), obtemos:

$$3x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3a_n (n+r)(n+r-1) \cdot x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[3(n+r)(n+r-1) + (n+r)\right] a_n \cdot x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^{n+r} = 0$$

I

Agora, precisamos deixar todos os termos x elevados à mesma potência. Ajustando I, temos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[3(n+r)(n+r-1) + (n+r)\right] a_n \cdot x^{n+r-1}$$

Chamando $m = n-1$ ou $n = m+1$, chegamos à:

$$\sum_{m=-1}^{+\infty} \left[3(m+1+r)(m+1+r-1) + (m+1+r)\right] \cdot a_{m+1} \cdot x^{m+r} = \sum_{m=-1}^{+\infty} \left[3(m+1+r)(m+r) + (m+1+r)\right] \cdot a_{m+1} \cdot x^{m+r}$$

Como n e m são variáveis mudas, então:

$$\sum_{n=-1}^{+\infty} \left[3(n+r+1)(n+r) + (n+r+1)\right] \cdot a_{n+1} \cdot x^{n+r}$$. Dessa forma:

$$\sum_{n=-1}^{+\infty} \left[3(n+r+1)(n+r) + (n+r+1)\right] \cdot a_{n+1} \cdot x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^{n+r} = 0 \quad (iv)$$

Como a faixa de valores de n é diferente, reescreveremos a equação (iv) deixando explícito $n = -1$:

$$\left[3(-1+r+1)(-1+r) + (-1+r+1)\right] \cdot a_0 \cdot x^{r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[3(n+r+1)(n+r) + (n+r+1)\right] a_{n+1} \cdot x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^{n+r} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\left[3r \cdot (r-1) + r\right] \cdot a_0 \cdot x^{r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{\left[3(n+r+1)(n+r) + (n+r+1)\right] a_{n+1} - a_n\right\} x^{n+r} = 0$$

Por identidade polinomial, temos:

$$\begin{cases} \left[3r(r-1) + r\right] \cdot a_0 = 0 & \Rightarrow \text{Para } a_0 \neq 0, \ 3r^2 - 3r + r = 0 \Rightarrow 3r^2 - 2r = 0 \quad r(3r-2) = 0 \\ & \therefore r = 0 \text{ ou } r = \frac{2}{3} \\ \left[3(n+r+1)(n+r) + (n+r+1)\right] \cdot a_{n+1} - a_n = 0 & \Rightarrow \text{vi) } a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\left[3(n+r+1)(n+r) + (n+r+1)\right]} \end{cases}$$

Como temos duas raízes indiciais distintas, diferentes entre si por um número inteiro, então é garantido que há duas soluções linearmente independentes da equação (i).

Para $r=0$, temos:

$$n=0: \quad a_1 = \frac{a_0}{[3(0+0+1)(0+0)+(0+0+1)]} = a_0$$

$$n=1: \quad a_2 = \frac{a_1}{[3(1+0+1)(1+0)+(1+0+1)]} = \frac{a_1}{8} = \frac{a_0}{8}$$

$$n=2: \quad a_3 = \frac{a_2}{[3(2+0+1)(2+0)+(2+0+1)]} = \frac{a_2}{21} = \frac{a_0}{21.8}$$

Assim, a primeira solução será dada por:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^{n+r} = a_0 . x^0 + a_1 . x^1 + a_2 . x^2 + a_3 . x^3 + \ldots \Rightarrow$$

$$\boxed{y_1(x) = a_0 + a_0 . x + \frac{a_0}{8} . x^2 + \frac{a_0}{168} . x^3 + \ldots} = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{168} + \ldots\right)$$

4

Para $r = \frac{2}{3}$, temos:

$$n=0: \quad a_1 = \frac{a_0}{[3(0+\frac{2}{3}+1)(0+\frac{2}{3})+(0+\frac{2}{3}+1)]} = \frac{a_0}{5}$$

$$n=1: \quad a_2 = \frac{a_1}{[3(1+\frac{2}{3}+1)(1+\frac{2}{3})+(1+\frac{2}{3}+1)} = \frac{a_0}{80}$$

$$n=2: \quad a_3 = \frac{a_2}{[3(2+\frac{2}{3}+1)(2+\frac{2}{3})+(2+\frac{2}{3}+1)} = \frac{a_0}{2640}$$

Assim, a segunda solução será dada por:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^{n+r} = a_0 . x^{2/3} + a_1 x^{1+\frac{2}{3}} + a_2 . x^{2+\frac{2}{3}} + a_3 . x^{3+\frac{2}{3}} + \ldots \Rightarrow$$

$$y_2(x) = a_0 x^{2/3} + \frac{a_0}{5} . x^{1+\frac{2}{3}} + \frac{a_0}{80} . x^{2+\frac{2}{3}} + \frac{a_0}{2640} . x^{3+\frac{2}{3}} + \ldots \Rightarrow$$

$$\boxed{y_2(x) = a_0 x^{2/3} \left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{80} + \frac{x^3}{2640} + \ldots\right)}$$

4

Como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes, pelo princípio da superposição a combinação linear entre essas duas soluções será solução geral da E.D.O.:

$$y(x) = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{168} + \cdots\right) + a_1\left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{80} + \frac{x^3}{2640} + \cdots\right)$$

Questão 4 : $4x^2\ddot{y}(x) + 4x\dot{y}(x) + \left(x - \frac{1}{36}\right)y(x) = 0$

Solução: Para resolver esta E.D.O., primeiro temos de trazê-la à forma a forma normal da equação de Bessel:

$$x^2 \cdot \ddot{y}(x) + x \cdot \dot{y}(x) + (x^2 - \nu^2) \cdot y(x) = 0$$

Para isso, teremos de proceder com a seguinte mudança de variável: $x = z^2$ ou $z = \sqrt{x}$. Assim,

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$. Como $\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, então: $\dot{y} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$. Logo $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dx} = \frac{d\dot{y}}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$$\therefore \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dz} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2z} \cdot \frac{dy}{dz}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}\left[-\frac{1}{2z^2} \cdot \frac{dy}{dz} + \frac{1}{2z} \cdot \frac{d^2y}{dz^2}\right] = \frac{1}{4z^2} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{4z^3} \cdot \frac{dy}{dz}$$

Substituindo $\dot{y}$, $\ddot{y}$ e z na equação, temos:

$$\left[\frac{1}{4z^2} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{4z^3} \cdot \frac{dy}{dz}\right] 4z^4 + 4 \cdot z^2\left[\frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}\right] + \left[z^2 - \frac{1}{36}\right] \cdot y = 0 \Rightarrow$$

$$z^2 \cdot \frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz} + 2z\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{36}\right) \cdot y = 0 \Rightarrow$$

$$z^2 \cdot \ddot{y} + z\dot{y} + \left(z^2 - \frac{1}{36}\right) \cdot y = 0$$

Assim, $\nu = \pm 1/6$. Como ν é um não-inteiro a solução geral pode ser escrita como:

$$y_{1/6}(z) = a_1 \cdot J_{1/6}(\sqrt{x}) + a_2 \cdot J_{-1/6}(\sqrt{x})$$

$$\boxed{= a_1\left(\frac{x}{2}\right)^{1/6} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma\left(n + \frac{1}{6} + 1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + a_2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/6} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma\left(n - \frac{1}{6} + 1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}$$

Questão 5

Solução: $x\ddot{y}(x) + (1-2n)\dot{y}(x) + x y(x) = 0$ (i)

$y(x) = x^n \cdot J_n(x)$. Derivando $y(x)$, temos:

$$\dot{y}(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot J_n(x) + x^n \cdot \dot{J}_n(x)$$

$$\ddot{y}(x) = n\cdot(n-1)x^{n-2} \cdot J_n(x) + n \cdot x^{n-1} \cdot \dot{J}_n(x) + n \cdot x^{n-1} \cdot \dot{J}_n(x) + x^n \cdot \ddot{J}_n(x)$$

Substituindo $y(x)$, $\dot{y}(x)$ e $\ddot{y}(x)$ em (i), temos:

$$x \cdot \left[n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2} \cdot J_n(x) + n \cdot x^{n-1} \cdot \dot{J}_n(x) + n \cdot x^{n-1} \cdot \dot{J}_n(x) + x^n \cdot \ddot{J}(x)\right] + (1-2n)\left[n \cdot x^{n-1} \cdot J_n(x) + x^n \cdot \dot{J}_n(x)\right] + x^{n+1} \cdot J_n(x) = n(n-1) \cdot x^{n-1} \cdot J_n(x) + n \cdot x^n \cdot \dot{J}_n(x) + n \cdot x^n \cdot \dot{J}_n(x) + x^{n+1} \cdot \ddot{J}(x) + (1-2n) \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot J_n(x)$$

$$+ (1-2n) \cdot x^n \cdot \dot{J}_n(x) + x^{n+1} \cdot J(x) = n^2 \cdot x^{n-1} \cdot J_n(x) \overset{\mathrm{I}}{- n \cdot x^{n-1} \cdot J_n(x)} + \overset{\mathrm{II}}{2n x^n \dot{J}_n(x)} + x^{n+1} \cdot \ddot{J}(x) + \overset{\mathrm{I}}{n \cdot x^{n-1} \cdot J_n(x)} -$$

$$2n^2 \cdot x^{n-1} \cdot J_n(x) + x^n \cdot \dot{J}_n(x) \overset{\mathrm{II}}{- 2n \cdot x^n \cdot \dot{J}_n(x)} + x^{n+1} \cdot J(x) = -n^2 \cdot x^{n-1} \cdot J_n(x) + x^{n+1} \cdot \ddot{J}(x) + x^n \cdot \dot{J}_n(x)$$

$$+ x^{n+1} \cdot J(x) = x^{n-1}\left(-n^2 \cdot J_n(x) + x^2 \cdot \ddot{J}(x) + x \dot{J}_n + x^2 \cdot J_n(x)\right) = x^{n-1}\underbrace{\left(x^2 \cdot \ddot{J}_n(x) + x\dot{J}(x) + (x^2 - n^2) J(x)\right)}_{\text{Equação de Bessel} = 0} = 0$$

Assim, $y(x) = x^n \cdot J_n(x)$ é solução de (1). Agora devemos procurar por uma solução particular da equação $x \cdot y''(x) - y'(x) + x \cdot y(x)$ (ii). É facil verificar, comparando as equações (i) e (ii) que

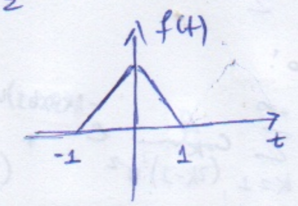
$x \cdot y''(x) - y'(x) + x \cdot y(x) = x \cdot \ddot{y}(x) + (1-2n)\dot{y}(x) + x \ddot{y}(x)$ para $n = 1$. Logo:

$$\boxed{y(x) = x^1 \cdot J_1(x)}$$

Questão 6

Solução:

a) $T = 2 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$



b) Função par, pois $f(t) = f(-t)$, como pode ser observado no gráfico do item a)

c) Sim, $f(t)$ satisfaz as condições de Dirichlet

1° É uma função contínua no intervalo onde está definida;

2° $f(t)$ é uma função seccionalmente monotônica: crescente no intervalo de -1 a 0 e decrescente no intervalo de 0 a 1.

3° $f(t)$ é absolutamente integrável.

$$\int_{-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\left[(-1) + \frac{1}{2}\right] + \left[1 - \frac{1}{2}\right] = 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1 < \infty$$

d) Como $f(t)$ é uma função par, então $b_K = 0$. Logo:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{2}{2}\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_K = \frac{4}{T}\int_0^1 (1-t).\cos(k.\omega.t)\,dt = \frac{4}{2}\left[\int_0^1 \cos(k.\omega.t)\,dt - \int_0^1 t.\cos(k.\omega.t)\,dt\right] = 2\left\{\left[\frac{\sin(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^1 - \left(\left[\frac{t\sin(k\omega t)}{k.\omega}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(k.\omega.t)}{k\omega}\,dt\right)\right\} = 2\left\{\left[\frac{\sin(k.\omega t)}{k\omega}\right]_0^1 - \left[\frac{t.\sin(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega}\,dt\right\} = 2\left\{\left[\frac{\sin(k.\omega.t)}{k\omega}\right]_0^1 - \left[\frac{t.\sin(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^1 - \left[\frac{\cos(k\omega t)}{k^2\omega^2}\right]_0^1\right\} = 2\left\{\frac{\sin(k\pi)}{k\pi} - \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} - \frac{\cos(k\pi)}{k^2\pi^2} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right\} = 2\left\{-\frac{(-1)^k}{k^2\pi^2} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right\} = 2\left\{\frac{1}{k^2\pi^2} - \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}\right\}$$

$$a_K = \begin{cases} 0, & \text{se } K \text{ é par} \\ \dfrac{4}{k^2\pi^2}, & \text{se } K \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \therefore \quad a_K = \frac{4}{(2K-1)^2\pi^2}$$

Portanto, a série de Fourier será dada por:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{(2K-1)^2\pi^2}\cdot\cos[(2K-1)\pi t]\right)}$$

e) A relação entre os coeficientes de Fourier na forma real e complexa é dada por:

$$a_0 = c_0 \qquad\qquad c_K = \frac{a_K - i b_K}{2}$$
$$a_K = c_K + c_{-K} \qquad \text{ou}$$
$$b_K = i(c_K - c_{-K}) \qquad\qquad c_{-K} = \frac{a_K + i b_K}{2}$$

Como $b_K = 0$, então: $c_0 = \frac{1}{2}$ e $c_K = c_{-K} = \frac{a_K}{2}$

$$f(t) = c_0 + \sum_{K=1}^{+\infty} c_{-K}.e^{-ik\omega t} + c_K.e^{ik\omega t} = \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{+\infty} \frac{2}{(2K-1)^2\pi^2}\,e^{-i(2K-1)\omega t} + \frac{2}{(2K-1)^2\pi^2}\,e^{i(2K-1)\omega t}$$

f) $f(-1)=0$

$f(0)=1$

$f(1)=0$

$f(2)=f(0)=1$

$f(31)=f(15.2+1-2)=f(-1)=0$

$f(93)=f(46.2+1-2)=f(-1)=0$

Questão 7

Seja $v(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k . e^{ik\omega t}$ o desenvolvimento da solução particular da equação não-homogênea em série de Fourier. Derivando-se $v(t)$ em relação a t, temos:

$$\dot{v}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k.(ik\omega).e^{ik\omega t} \quad e \quad \ddot{v}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k.(ik\omega)^2.e^{ik\omega t}$$

Substituindo na E.D.O. do problema, temos:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(ik\omega)^2.e^{ik\omega t}+c.\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k.(ik\omega).e^{ik\omega t}+2.\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k.e^{ik\omega t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k.e^{ik\omega t}$$

Para que as séries do primeiro, segundo e terceiro membros sejam iguais, é necessário que os coeficientes dos termos dos termos correspondentes sejam iguais, ou seja

$$d_k\left[(ik\omega)^2+c.(ik\omega)+2\right]=c_k \quad \therefore$$

$$d_k=\frac{c_k}{\left[(ik\omega)^2+c(ik\omega)+2\right]}$$

Como $c_k=\frac{2}{(2k-1)^2\pi^2}$ para $k\neq 0$ e $c_0=\frac{1}{2}$, então a solução particular será dada por:

$$\boxed{v(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k.e^{ik\omega t}=\frac{1}{4}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[\omega^2(2k-1)^2+ci(2k-1)\omega+2\right]}.\frac{2}{(2k-1)^2\pi^2}.e^{i(2k-1)\omega t}}$$

para $k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

Questão 8

Solução: A relação entre os coeficientes de Fourier na forma real e complexa é dada por:

$$a_0 = c_0$$
$$a_k = (c_k + c_{-k})$$
$$b_k = i(c_k - c_{-k})$$

Para $k = 0$

$$c_0 = \sinh(\pi) \cdot \frac{1 + i(0)}{1+(0)} \cdot \cos(0 \cdot \pi) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \quad \therefore \quad \boxed{a_0 = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}}$$

$$c_k = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{1+ik}{1+k^2} \cdot \cos(k\pi) \Rightarrow c_{-k} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(1-ik)}{1+k^2} \cdot \cos(-k\pi) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(1-ik)}{1+k^2} \cdot \cos(k\pi) \therefore$$

$$a_k = \left[\frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{\cos(k\pi)}{1+k^2} + \cancel{\frac{\sinh(\pi) \cdot \cos(k\pi) \cdot ik}{\pi(1+k^2)}} + \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{\cos(k\pi)}{(1+k^2)} - \cancel{\frac{\sinh(\pi) \cdot \cos(k\pi)}{\pi(1+k^2)} ik} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{a_k = \frac{2 \cdot \sinh(\pi) \cdot \cos(k\pi)}{\pi \cdot (1+k^2)}}$$

$$b_k = i \left(\frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{\cos(k\pi)}{(1+k^2)} + \frac{\sinh(\pi) \cdot \cos(k\pi) \cdot ik}{\pi(1+k^2)} - \frac{\sinh(\pi) \cdot \cos(k\pi)}{\pi \cdot (1+k^2)} + \frac{\sinh(\pi) \cdot \cos(k\pi) \cdot ik}{\pi(1+k^2)} \right) =$$

$$b_k = \frac{-2 \cdot k \cdot \sinh(\pi) \cdot \cos(k\pi)}{\pi(1+k^2)}$$

Como $a_k \neq 0$ e $b_k \neq 0$, então a função $f(t)$, periódica de 2π, não é par nem ímpar.