Algumas soluções - Lista 5
Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Exercício 1:

(a) Seja $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$, para $x \neq 1$ e $g(u) = \sqrt[3]{u}$. Como g é contínua em $\mathbf{R}$ e

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = 3,$$

segue que

$$\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}} = \lim_{x\to -1} g(f(x)) = \lim_{u\to 3} g(u) = \sqrt[3]{3}.$$

Nesse item foi usado o teorema seguinte (pg. 88 do Guidorizzi):

Teorema 1. *Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset dom(g)$. Se $\lim_{x\to p} f(x) = a$ e g é contínua em a, então,*

$$\lim_{x\to p} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

(b) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x+7} = u$, para $x \neq 1$. Então $u^3 = x+7$ e portanto $x-1 = u^3-8$. Se $g(u) = \dfrac{u-2}{u^3-8}$, para $u \neq 2$, temos que $g(u) = g(f(x))$. Agora, como $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x+7} = \sqrt[3]{8} = 2$,

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 2} g(u) &= \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{u^3-8} \\ &= \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{(u-2)(u^2+2u+4)} \\ &= \lim_{u\to 2} \frac{1}{(u^2+2u+4)} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

e g não está definida em 2, segue que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} g(f(x)) = \lim_{u\to 2} g(u) = \frac{1}{12}.$$

Nesse item foi usado o teorema seguinte (pg. 89 do Guidorizzi):

Teorema 2. *Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset dom(g)$, $\lim_{x\to p} f(x) = a$ e $\lim_{u\to a} g(x) = L$. Nestas condições, se g não estiver definida em a, então $\lim_{x\to p} g(f(x))$ existe e*

$$\lim_{x\to p} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

Os teoremas anteriores serão usados em muitas das soluções seguintes, ao justificar o cálculo do limite de funções compostas. Entretanto, para não carregar demais as soluções, não vou explicitá-los toda vez que estiver usando. Procurem justificar as passagens, mentalmente, utilizando-os.

Exercício 2:

(a) Note que

$$\frac{f(x^2-1)}{x-1} = \frac{f(x^2-1)}{(x^2-1)}(x+1).$$

Se calcularmos $\lim_{x\to 1} \frac{f(x^2-1)}{x^2-1}$, poderemos utilizar o fato de que *O limite do produto é o produto dos limites* para calcular o limite pedido. Seja $g(u) = \frac{f(u)}{u}$, para $u \neq 0$, e $h(x) = x^2 - 1$, para $x \neq, 1, -1$. Então $\lim_{x\to 1} h(x) = 0$, por hipótese $\lim_{u\to 0} g(u) = \lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} = 1$ e g não está definida em 0. Sendo assim,

$$\lim_{x\to 1} g(h(x)) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{u\to 0} g(u) = 1$$

e portanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{f(x^2-1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x^2-1)}{(x^2-1)}(x+1)\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x^2-1)}{(x^2-1)} \lim_{x\to 1}(x+1) = 1 \cdot 2 = 2.\end{aligned}$$

Exercício 3:

Seja $F(h) = p + h$, para $h \neq 0$ e $G(x) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. Então $\lim_{h\to 0} F(h) = p$,

$\lim_{x\to p} G(x) = L$ e G não está definida em 0. Então

$$\lim_{h\to 0} G(F(h)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{x\to p} G(x) = L.$$

Exercício 5:
Se para todo x vale que $|f(x)-3| \leq 2|x-1|$, então $-2|x-1| \leq f(x)-3 \leq 2|x-1|$ e assim

$$3-2|x-1| \leq f(x) \leq 3+2|x-1|.$$

Agora, como

$$\lim_{x\to 1^+} |x-1| = \lim_{x\to 1^+} x-1 = 0$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} |x-1| = \lim_{x\to 1^-} 1-x = 0,$$

segue que $\lim_{x\to 1}(3-2|x-1|) = \lim_{x\to 1}(3+2|x-1|) = 3$. Pelo teorema do confronto, $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

Exercício 6:

As funções $f(x) = x$ e $g(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, para $x \neq 0$, são tais que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq 1$, para todo $x \neq 0$. Então $\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Nesse exercício utilizamos o resultado do Exemplo 2 da pg.91 do Guidorizzi, que é consequência do teorema do confronto:

Teorema 3. *Sejam f e g funções com o mesmo domínio A tais que $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$ para todo x em A, onde $M > 0$ é um real fixo. Então $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.*

Exercício 7:

(b) Como $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen } x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\text{sen } x/x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}(\text{sen } x/x)} = 1.$$

(d) Seja $f(x) = x - \pi$, para $x \neq \pi$ e $g(u) = \dfrac{\text{sen }(u+\pi)}{u}$, para $u \neq 0$. Observe que $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = 0$. A ideia é calcular o limite de g para u tendendo a 0 e, caso ele exista, poderemos aplicar o Teorema 2 mencionado anteriormente. Para isso, vamos escrever $\text{sen }(u+\pi) = \text{ sen } u \cos\pi + \text{ sen } \pi \cos u = -\text{ sen } u$. Então

$$\lim_{u\to 0} g(u) = \lim_{u\to 0} -\frac{\text{sen } u}{u} = -1$$

e assim

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\text{sen } x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} g(f(x)) = \lim_{u\to 0} g(u) = -1.$$

(g) Podemos escrever, para $x \neq 0$,

$$\frac{\tan 3x}{\text{sen } 4x} = \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\text{sen } 4x} \cdot \frac{3}{4}\,,$$

e utilizando novamente os resultados a respeito de limite de funções compostas:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{3x} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan u}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen } u}{u} \cdot \frac{1}{\cos u} = 1 \cdot 1 = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\text{sen } 4x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\text{sen } u} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\text{sen } 4x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\text{sen } 4x} \cdot \frac{3}{4} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

(h) Para todo $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos x}{x} &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \frac{1-\cos^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \frac{\text{sen }^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \text{sen } x \cdot \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\text{sen }x\cdot\frac{\text{sen }x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)=0\cdot 1\cdot\frac{1}{2}.$$

(j) Para todo $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\text{sen }\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)-\text{ sen }\dfrac{1}{x}}{x}&=\frac{\text{sen }x^2\cos\dfrac{1}{x}+\text{ sen }\dfrac{1}{x}\cos x^2-\text{ sen }\dfrac{1}{x}}{x}\\&=\frac{\text{sen }x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}+\text{ sen }\frac{1}{x}\cdot\frac{\cos x^2-1}{x}\\&=\frac{\text{sen }x^2}{x^2}\cdot x\cos\frac{1}{x}+x\,\text{sen }\frac{1}{x}\cdot\frac{\text{sen }^2x}{x^2}.\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x^2}{x^2}=1,$$

usando o Teorema 2 a respeito do limite de funções compostas. Além disso, pelo Teorema 3 mencionado acima,

$$\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$$

e

$$\lim_{x\to 0}x\,\text{sen }\frac{1}{x}=0.$$

Por fim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }^2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x}\cdot\frac{\text{sen }x}{x}=1\cdot 1=1.$$

Utilizando as propriedades de limite, concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)-\text{ sen }\dfrac{1}{x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen }x^2}{x^2}\cdot x\cos\frac{1}{x}+x\,\text{sen }\frac{1}{x}\cdot\frac{\text{sen }^2x}{x^2}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen }x^2}{x^2}\cdot x\cos\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(x\,\text{sen }\frac{1}{x}\cdot\frac{\text{sen }^2x}{x^2}\right)\\&=1\cdot 0+0\cdot 1=0.\end{aligned}$$

(k) Para todo $x \neq 0$,

$$\frac{x + \text{ sen } x}{x^2 - \text{ sen } x} = \frac{x}{x} \cdot \frac{1 + \dfrac{\text{sen } x}{x}}{x - \dfrac{\text{sen } x}{x}} = \frac{1 + \dfrac{\text{sen } x}{x}}{x - \dfrac{\text{sen } x}{x}}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \text{ sen } x}{x^2 - \text{ sen } x} = \frac{\lim_{x \to 0}(1 + \dfrac{\text{sen } x}{x})}{\lim_{x \to 0}(x - \dfrac{\text{sen } x}{x})} = \frac{1+1}{0-1} = -2.$$

Observação: Valem versões dos Teoremas 1 e 2 enunciados anteriormente também para limites no infinito. Ou seja, podemos substituir p por $+\infty$ ou $-\infty$ naqueles resultados. Também são verdadeiras versões das propriedades operatórias de limites (como aquelas descritas na primeira página do capítulo 10 do pdf do curso) para limites no infinito. Usaremos esses fatos nos exercícios seguintes.

Exercício 8:

(b)

$$\lim_{x \to -\infty} [5 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}] = \lim_{x \to -\infty} 5 + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^2} = 5 + 0 + 0 = 5.$$

(e) Para x suficientemente grande (de modo que o denominador não se anule), podemos escrever:

$$\frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2} = \frac{x^4}{x^4} \cdot \frac{5 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}}{4 + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{2}{x^4}} = \frac{5 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}}{4 + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{2}{x^4}}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}}{4 + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{2}{x^4}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(5 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(4 + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{2}{x^4}\right)} = \frac{5}{4}.$$

(g) Seja $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ e $g(u) = \sqrt[3]{u}$. Temos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{3}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Como g é contínua em $\mathbf{R}$ (e em particular em 0),

$$\lim_{x\to-\infty} g(f(x)) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2+3}} = \lim_{u\to0} g(u) = \lim_{u\to0} \sqrt[3]{u} = 0.$$

(i) Para todo $x > 0$,

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}.$$

Agora, como

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = 1$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = 1,$$

conclui-se que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

(j) Para todo $x > 0$,

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^3+3} = \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}}{1+\dfrac{3}{x^2}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}}{1+\dfrac{3}{x^2}}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}}{1+\dfrac{3}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

(m) Para todo $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3} &= \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3})} \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}) \\
&= \frac{(x+1) - (x+3)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3})} \\
&= \frac{-2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3})} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\frac{-2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{\frac{-2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{3}{x}}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{0}{1+1} = 0.$$

Exercício 9:

(a) Para todo $x > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} (x^4 - 3x + 2) = \lim_{x\to\infty} x^4 \cdot (1 - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}).$$

Como $\lim\limits_{x\to\infty} x^4 = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} (1 - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}) = 1 - 0 + 0 = 1$, segue que

$$\lim_{x\to\infty} (x^4 - 3x + 2) = \infty.$$

(e) Para todo $x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{2+x}{3+x^2} = \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2} + 1} = \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2} + 1}.$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = 0 + 0 = 0$$

e

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}+1\right)=0+1=1,$$

segue que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+x}{3+x^2}=\frac{0}{1}=0.$$

Exercício 10:

(d) Para todo $x>1$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1} &= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-1}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1}\\
&= \frac{(x+\sqrt{x})-(x-1))}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-1}}\\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-1}}\\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}\\
&= \frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1+0=1.$$

e

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=1+1=2,$$

temos que

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1})=\frac{1}{2}.$$

(e) Lembre-se de que a fatoração de uma diferença de cubos é a seguinte:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Colocando $a = x$ e $b = \sqrt[3]{2+3x^3}$, para todo $x \in \mathbf{R}$, temos que

$$x^3 - (2+3x^3) = -2x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2+3x^3})(x^2 + x\sqrt[3]{2+3x^3} + \sqrt[3]{(2+3x^3)^2}\ ).$$

Assim, para todo $x \in \mathbf{R}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
x - \sqrt[3]{2+3x^3} &= \frac{x^2 + x\sqrt[3]{2+3x^3} + \sqrt[3]{(2+3x^3)^2}}{x^2 + x\sqrt[3]{2+3x^3} + \sqrt[3]{(2+3x^3)^2}} \cdot (x - \sqrt[3]{2+3x^3}) \\
&= \frac{-2x^3 - 2}{x^2 + x\sqrt[3]{2+3x^3} + \sqrt[3]{4+12x^3+9x^6}} \\
&= \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{-2x - \dfrac{2}{x^2}}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{2}{x^3} + 3} + \sqrt[3]{\dfrac{4}{x^6} + \dfrac{12}{x^3} + 9}} \\
&= \left(-2x - \frac{2}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{2}{x^3} + 3} + \sqrt[3]{\dfrac{4}{x^6} + \dfrac{12}{x^3} + 9}}
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} \left(-2x - \frac{2}{x^2}\right) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{2}{x^3} + 3} + \sqrt[3]{\dfrac{4}{x^6} + \dfrac{12}{x^3} + 9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}} > 0,$$

segue que

$$\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt[3]{2+3x^3}) = -\infty.$$

Usaremos no exercício 11 os seguintes resultados:

Teorema 4. *Se* $\lim_{x\to p^+} f(x) = 0$ *e existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para* $p < x < p + r$, *então*

$$\lim_{x\to p^+} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

Teorema 5. *Se* $\lim_{x \to p^+} f(x) = 0$ *e existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) < 0$ *para* $p < x < p + r$, *então*

$$\lim_{x \to p^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Teorema 6. *Se* $\lim_{x \to p^-} f(x) = 0$ *e existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para* $p - r < x < p$, *então*

$$\lim_{x \to p^-} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

Teorema 7. *Se* $\lim_{x \to p^-} f(x) = 0$ *e existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) < 0$ *para* $p - r < x < p$, *então*

$$\lim_{x \to p^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Exercício 11:

(e) Temos que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x^2} \cdot (x-3) \right).$$

Como $x^2 > 0$ quando $x < 0$, pelo Teorema 6, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$. Como também $\lim_{x \to 0^-} (x-3) = -3 < 0$, segue que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x^2} = -\infty.$$

(h) Para todo $x \neq 3$,

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{x}{(x-3)}.$$

Como $x - 3 > 0$ para $x > 3$, segue que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x}{x-3} = \infty.$$

(j)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x+1}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{2x+1}{x-1} \right) = \infty \cdot (-1) = -\infty.$$

Obervação: Acima foi escrito $\infty \cdot (-1)$ apenas como notação para significar que a função $\dfrac{1}{x}$ tende a ∞ e $\dfrac{2x+1}{x-1}$ tende a -1, de modo que o produto das duas tende a $-\infty$.

(l)

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{3x^2-4}{1-x^2} = \lim_{x \to -1^+} \left(\frac{1}{1+x} \cdot \frac{3x^2-4}{1-x} \right) = \infty \cdot \frac{-1}{2} = -\infty.$$

(m)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = \infty \cdot 1 \cdot -1 = -\infty.$$

Exercício 12:

Tome $f(x) = 2x$ e $g(x) = x$, para $x \in \mathbf{R}$. Então $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$, e $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$.

Exercício 13:

Tome $f(x) = 2x$ e $g(x) = x$, para $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Então $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$, e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} 2 = 2$.