Tensões normais na flexão

PEF 3208 - Fundamentos da mecânica das estruturas

Prof. Dr. Guilherme R. Franzini

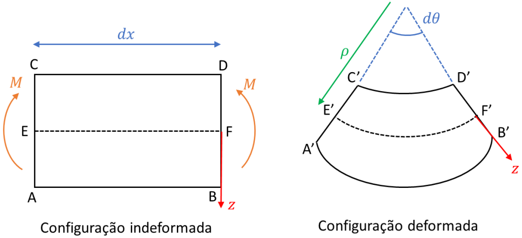
- Para estruturas em solicitação por força normal, vimos como relacionar a tensão normal σ com o esforço solicitante força normal N como $\sigma = N/A$, sendo A a área da seção transversal.
- No caso de materiais lineares-elásticos, vale:

$$\sigma = E\epsilon = E\frac{\Delta L}{L_0} \leftrightarrow \frac{N}{A} = E\frac{\Delta L}{L_0} \tag{1}$$

  sendo E o módulo de elasticidade (módulo de Young), ΔL a variação de comprimento da barra e L_0 seu comprimento indeformado.
- Nesta aula, relacionaremos a tensão normal com o esforço solicitante momento fletor;
- Esta aula discute a flexão normal, embora os conceitos possam ser facilmente traduzidos para o problema da flexão oblíqua.

- Flexão pura normal: Atua apenas o momento fletor na direção de um eixo central;
- Flexão simples normal: O momento fletor é na direção de um eixo central e também atua a força cortante;
- Flexão composta normal: O momento fletor é na direção de um eixo central e também atua a força normal;
- Flexão oblíqua: O momento fletor não é na direção de um eixo central. Deve-se decompô-lo nas direções dos eixos centrais.

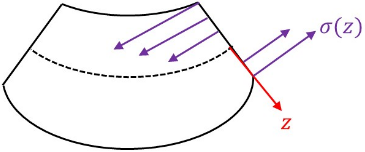
- Na flexão pura, não há força cortante, logo o momento fletor é constante ao longo da estrutura ($V = \frac{dM}{dx}$).
- Considere a figura abaixo, ilustrando os momentos fletores tomados no sentido positivo (na convenção de sinais usual) atuando em um elemento da estrutura de comprimento infinitesimal dx;
- Como só atua o momento fletor, é natural imaginar que as fibras longitudinais AB, CD e EF assumirão, na configuração deformada, arcos de circunferência.



- É intuitivo notar que a fibra AB tem, na configuração deformada, comprimento maior do que o inicial. Logo, essa fibra está sob tração. Já a fibra CD diminuiu seu comprimento, estando comprimida.

- Logo, existe uma fibra, identificada por EF que não teve seu comprimento alterado (ou seja, não se deformou) após a aplicação do esforço. Essa fibra é chamada de linha neutra. A origem do sistema está sob o ponto F.
- ρ é o raio de curvatura da fibra E'F'. A sua curvatura é $\kappa = 1/\rho$. Veja que $\rho d\theta = dx$;
- O comprimento deformado de uma fibra definida pela cota z é simplesmente $L_f = (\rho + z)d\theta$. A deformação dessa fibra é $\epsilon(z) = \frac{L_f - L_0}{L_0} = \frac{(\rho+z)d\theta - dx}{dx} = z\frac{d\theta}{dx} = z\kappa$ Veja a consistência de unidades.
- Concluímos, então, que a deformação varia linearmente ao longo da altura da seção transversal.
- Se o material tem comportamento linear-elástico, $\sigma(z) = E\epsilon(z) = E\kappa z$. Ou seja, a tensão normal também varia linearmente ao longo da altura da seção transversal.

- A figura abaixo ilustra a distribuição das tensões normais ao longo de uma seção transversal. Na outra seção transversal, a distribuição é análoga (fibras inferiores em tração, fibras superiores comprimidas), porém não foi representada para melhor visualização.



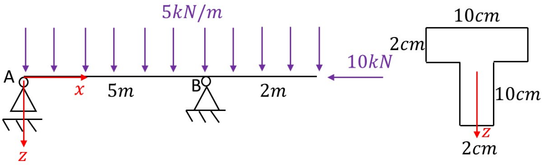
- Calcularemos os esforços solicitantes por meio de integrais das tensões normais ao longo da seção transversal. Admitiremos material homogêneo, ou seja, suas propriedades não variam ao longo da estrutura;
- $N = \iint_A \sigma(z) dA = \iint_A E\kappa z dA = E\kappa \iint_A z dA = 0$ (flexão pura). Logo $\iint_A z dA = 0$, ou seja, o momento estático com relação ao eixo y é nulo. Assim, afirma-se que, na flexão pura, a linha neutra passa pelo baricentro da seção transversal.

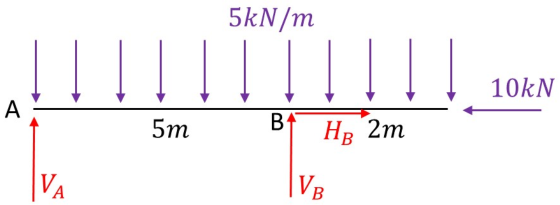
- $M = \iint_A z\sigma(z)dA = \iint_A E\kappa z^2 dA = EI_y\kappa \leftrightarrow \kappa = \frac{M}{EI_y}$, sendo I_y o momento de inércia com relação ao eixo y que passa pelo baricentro da seção transversal.
- Mas $\sigma(z) = E\kappa z \leftrightarrow \sigma(z) = \frac{Mz}{I_y}$. A última expressão calcula a tensão normal na flexão pura. Essa fórmula é uma das mais importantes na resistência dos materiais, dado que as tensões associadas à flexão (momento fletor) são predominantes em uma vasta gama de estruturas;
- Importante. A depender da referência, a expressão da tensão normal pode vir acompanhada de um sinal negativo. Isso decorre apenas das convenções adotadas pelos diversos autores. Uma forma de evitar confusão com a convenção de sinais é adotar o momento fletor M e a distância até a cota z em módulo (no caso $|z|$ representa a distância entre a fibra e a linha neutra) e você colocar o sinal indicando tração/compressão com base no senso físico.

- Na flexão simples, existe presença de força cortante e, portanto, de deformações associadas ao cisalhamento (distorção);
- Em teoria de barras, mostra-se que o efeito do cisalhamento é desprezível, de sorte que podemos considerar como boa aproximação a hipótese de que as seções planas e ortogonais ao eixo da viga assim permanecem após a aplicação dos esforços (**Hipótese de Navier**);
- Essa foi a hipótese cinemática adotada para o desenvolvimento da flexão pura, logo $\sigma(z) = \frac{Mz}{I_y}$ também na flexão simples de vigas.

- Para estruturas somente solicitadas por força normal vimos que $\sigma = \frac{N}{A}$, indicando que as tensões normais são constantes ao longo da seção transversal;
- Para flexão composta, tendo em vista a hipótese de linearidade geométrica adotada ao longo das discussões feitas, podemos sobrepor o efeito da força normal com aquele devido à flexão. Logo, a tensão normal em flexão composta é $\sigma(z) = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I_y}$;
- Notem que, na flexão composta, a linha neutra não coincide com o baricentro da seção transversal. Ela pode ser facilmente encontrada calculando a coordenada z ao longo da seção transversal que tem tensão normal nula;

A Figura abaixo mostra uma viga bi-apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído. A seção transversal da viga, suposta prismática, também está apresentada. São pedidos os seguintes itens. a) Determinar os diagramas de esforços solicitantes e o máximo momento fletor na estrutura. b) As máximas tensões normais de tração e de compressão (em módulo) obtidas para a seção transversal imediatamente à direita do apoio B.

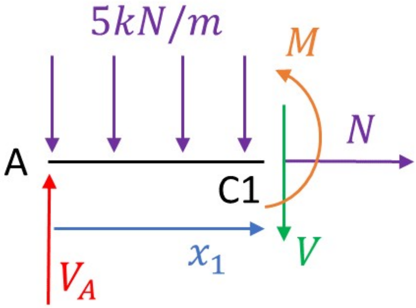




$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_B = 10\mathrm{kN}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow V_A + V_B = 7 \times 5$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -35 \times 3{,}5 + 5V_B = 0 \rightarrow V_B = 24{,}5\mathrm{kN},\ V_A = 10{,}5\mathrm{kN}$$

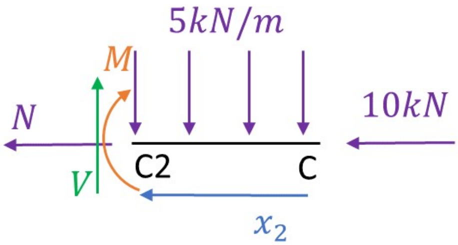


Expressões válidas para $0 \leq x_1 < 5$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N = 0\mathrm{kN}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -V_A + 5x_1 + V = 0 \rightarrow V = 10{,}5 - 5x_1$$

$$\sum M_{C1} = 0 \rightarrow -V_A x_1 + \frac{5}{2}x_1^2 + M = 0 \rightarrow M = 10{,}5x_1 - \frac{5}{2}x_1^2$$

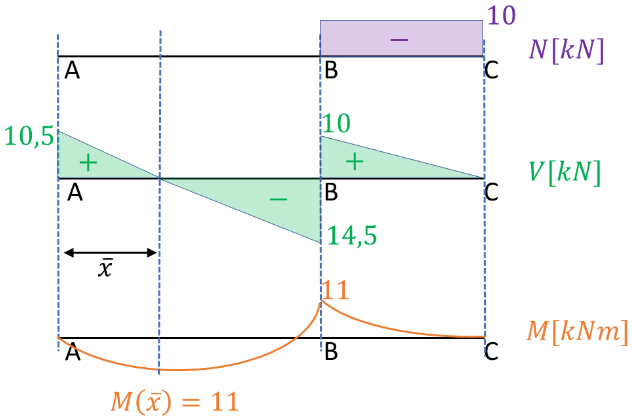


Expressões válidas para $0 \leq x_2 < 2$

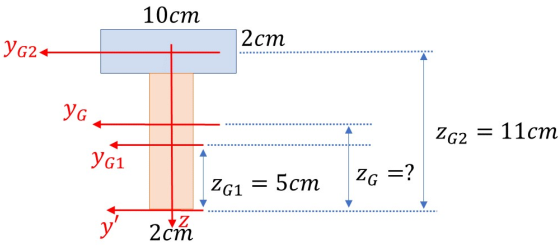
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N = -10\mathrm{kN}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -V + 5x_2 = 0 \rightarrow V = 5x_2$$

$$\sum M_{C2} = 0 \rightarrow -M - \frac{5}{2}x_2^2 = 0 \rightarrow M = \frac{5}{2}x_2^2$$



Cálculo de $\bar{x}$. $V(\bar{x}) = 0 \rightarrow \bar{x} = \frac{10{,}5}{5} = 2{,}1\mathrm{m}$. Logo $M(\bar{x}) = 11\mathrm{kNm}$.



Posso dividir a seção transversal no retângulo 1 e no retângulo 2.

$$z_{G1} = 5\mathrm{cm}, A_1 = 2 \times 5\mathrm{cm}^2, I_{y_{G1}} = \frac{2 \times 10^3}{12}\mathrm{cm}^4$$

$$z_{G2} = 11\mathrm{cm}, A_2 = 2 \times 5\mathrm{cm}^2, I_{y_{G2}} = \frac{10 \times 2^3}{12}\mathrm{cm}^4$$

$$z_G = \frac{A_1 z_{G1} + A_2 z_{G2}}{A_1 + A_2} = 8\mathrm{cm}$$

$$I_{y_G} = I_{y_{G1}} + A_1 \times (z_{G1} - z_G)^2 + I_{y_{G2}} + A_2 \times (z_{G2} - z_G)^2 = 533,33\mathrm{cm}^4$$

- Na seção transversal imediatamente à direita de B, a força normal é 10 kN (compressão) e o momento fletor é 10 kNm, tracionando as fibras superiores. Como o momento de inércia e o momento fletor estão escritos em unidades não compatíveis, é necessário um acerto dimensional. Escreverei o momento fletor como $10 \times 10^2 = 1000$ kNcm;
- Usarei a expressão deduzida com os sinais devidos. Recomendo que você tente fazer usando os valores em módulo e colocando o sinal depois. Veja com qual das duas formas você se adapta melhor.
- Máxima tensão de tração (fibra superior):

$$\sigma_t^{max} = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I_{yG}} = -\frac{10}{20+20} + \frac{(-1000)(-4)}{533{,}33} = 7{,}25 \mathrm{kN/cm^2}$$

- Máxima tensão de compressão (fibra inferior):

$$\sigma_c^{max} = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I_{yG}} = -\frac{10}{20+20} + \frac{(-1000)(8)}{533{,}33} = -15{,}25 \mathrm{kN/cm^2}$$

- A posição da linha neutra é dada pela cota z de tensão normal nula. Logo:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Mz_{LN}}{I_{yG}} = 0 \rightarrow z_{LN} = -0{,}133\mathrm{cm}$$

A distribuição das tensões normais na seção transversal em estudo é: