Monitonia:

$(x-1)(x-2)$

Ex 12) $r(x) = ax + b \Rightarrow r(1) = 3$ e $r(2) = 3$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2a} - 2b = -6 \\ \cancel{2a} + b = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$-b = -3 \Rightarrow \underline{b = 3}$

$a = 3 - 3 = 0$

Ex 14b) Dem:

Suponha que existam dois máximos divisores comuns de f e g, a saber d_1 e d_2. Note que esses polinômios satisfazem (i), (ii). Pelo item (a), temos que $d_1 = \alpha d_2$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$. (Associados)

Logo, $gr(d_1) = gr(d_2)$. Assim, considere

$$d_1 = a_n x^n + \cdots + a_0 \quad e \quad d_2 = b_n x^n + \cdots + b_0$$

Como estamos considerando d_1, d_2 mônicos, temos que $a_n = b_n = 1$.

Portanto, basta usar igualdade entre os polinômios d_1 e αd_2 para concluir que $d_1 = d_2$ (<u>façam</u> <u>vocês</u>)!

Ex 14 (item a)

Dem: Como d_1 e d_2 são máximos div. comuns de f e g, $d_i | f$ e $d_i | g$, $i = 1, 2$. Pelo item(ii), $d_1 | d_2$ e $d_2 | d_1$. Logo, $d_1 = r d_2$ e $d_2 = q d_1$, $r, q \in \mathbb{K}[x]$. Assim,

$$d_1 = r q d_1 \Rightarrow d_1 - rq d_1 = 0 \Rightarrow$$

$d_1 (1 - rq) = 0$. Usando que $\mathbb{K}[x]$ é um domínio de integridade (se convencem disso!) temos que

$$d_1(1-qr) = 0 \Rightarrow (1-qr) = 0 \Rightarrow$$

$qr = 1$.

obs: Relembre que $U(\mathbb{K}[x]) = \mathbb{K}$ (ex. 6)

Portanto, $q, r \in \mathbb{K}$. Com isso,

d_1 e d_2 são associados.

Ex 11 (Dica)

$$f = 3m^2 x^4 - 11 m x^3 - (m^2 - 10) x^2 + (6 m^2 + 5m) x$$

$$g = 3m x^3 - 5x^2 - mx + (6m+3)$$

$$\begin{array}{l|l} 3m^2 x^4 - 11 m x^3 - (m^2 - 10) x^2 + (6m^2 - 5m) x & g \\ \hline & mx - 2 \end{array}$$

$$\underbrace{2(6m+3)}_{=0}$$