Monitoria:

Ex 12) Dem: (Dica)

(*) $(x-2)^{10n} + (x-1)^{n} + 2 = (x-1)(x-2) \cdot f(x) + r(x)$, onde $0 \leq gr(r) < 2$

Assim, $r(x) = ax + b$. $\leftarrow$

Em (*), se $x = 1$, $r(1) = 3$ e se $x = 2$, $r(2) = 3$

Agora, basta montar o sistema (...)

Ex 23: Suponha que o conj dos polinômios irredutíveis em $\mathbb{K}[x]$ seja finito,

$$P = \{p_1, \dots, p_k\}$$

Considere

$$S = p_1 \cdots p_k + 1$$

Note que $S \in \mathbb{K}[x]$. Pelo ex 22b, algum p_i, $i = 1, \dots, k$ divide S. Como, $p_i \mid p_1 \cdots p_k$

e $p_i \mid s$, segue que $p_i \mid 1$, contradição pois $gr(1) = 0$ e $gr(p_i) \geq 1$.

$\blacksquare$

Ex 22 d) Dica:

$f = \alpha_1 f_1 \cdots f_t$, $f = \alpha_2 g_1 \cdots g_s$, com

f_i, g_j irredutíveis. Note $f_1 \mid \alpha_1 f_1 \cdots f_t \Rightarrow$

$f_1 \mid \alpha_2 g_1 \cdots g_s$. Pelo ex 21 (generalização)

$f_1 \mid g_i$. Vamos supor S.P.G que $f_1 \mid g_1$

(basta renomear os polinômios g_i).

Como g_1 é irredutível, temos que $f_1 = c_1 g_1$

Então,

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1 \cdots f_t = \alpha_2 g_1 \cdots g_s \Rightarrow \\ \alpha_1 \cancel{f_1} \cdots f_t = \alpha_2 c_1 \cancel{f_1} \cdots g_s \Rightarrow \\ \alpha_1 f_2 \cdots f_t = \alpha_2 c_1 g_2 \cdots g_s \end{cases}$$

Vamos considerar $t < s$. Usando o raciocínio anterior, vamos chegar à:

$\alpha_1 = \alpha_2 c_1 \cdots c_t g_{t+1} \cdots g_s \Rightarrow 1 = \alpha_1^{-1} \alpha_2 c_1 \cdots c_t \cdot g_{t+1} \cdots g_s$ (terminem).