Geofísica Matemática
Lista de exercícios: 04/06/2020

1. Descreva sucintamente o significado físico do sinal de menos na expressão da lei de Fick:
$$\phi = -\alpha \frac{\partial u}{\partial x}$$
onde ϕ é a densidade de fluxo de uma substância com concentração u difundindo-se em um meio com difusividade α. Assuma que este problema é unidimensional, dependente da dimensão espacial x.

2. Considere a equação de difusão utilizada para estudar a condução de calor em uma barra de comprimento L:
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
onde $T = T(x,t)$ é a temperatura no interior da barra em função do tempo t e do espaço x. Assuma que a temperatura inicial da barra é dada por $T(x,0) = f(x)$ para todo $x \in [0, L]$ e as temperaturas nas extremidades da barra são fixas ao longo do tempo: $T(0,t) = f(0) = T_1$ e $T(L,t) = f(L) = T_2$.

   Determine a solução estacionária quando $t \to \infty$ e mostre que o resultado independe da difusividade α e da temperatura inicial $f(x)$.

3. Determine a série de Fourier que descreve a evolução temporal da equação de difusão
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
com a seguinte condição inicial
$$T(x,0) = \begin{cases} T_1 \frac{2x}{L} & \text{se } \; 0 \leq x < L/2 \\ 2T_1(1 - \frac{x}{L}) & \text{se } \; L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$
e condições de contorno: $T(0,t) = T(L,t) = 0$.

4. Encontre a transformada de Fourier de $f(x)$ (passo a passo):

   i) $f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{se} \quad x < 0 \quad (k > 0) \\ 0 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

   ii) $f(x) = \begin{cases} k & \text{se} \quad 0 < x < b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

   iii) $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

   iv) $f(x) = \begin{cases} k & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

v) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

vi) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

5. A equação de flexura de uma placa elástica fina representando a litosfera em 2D, em equilíbrio sobre um substrato não viscoso é dada por:

$$D\frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} + (\rho_m - \rho_c)gu(x) = \rho_c g h(x)$$

onde D é a rigidez flexural da litosfera, u é o deslocamento vertical da placa, ρ_m é a densidade do manto, ρ_x é a densidade da crosta, g é a gravidade e h é a topografia. Assumindo que D, ρ_m, ρ_c e g são constantes, escreva a transformada de Fourier do deslocamento vertical da placa $U(w)$ em função da transformada de Fourier da topografia $H(w)$.

6. Calcule a integral de Fourier da função $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| > 1 \end{cases}$

7. Usando a integral de Fourier do exercício anterior e o Teorema da Integral de Fourier que diz que em pontos onde $f(x)$ é descontínua, o valor da integral de Fourier é igual ao valor médio dos limites esquerdos e direitos de $f(x)$ nesses pontos, mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\sin w \cos w}{w} dw = \pi/4.$$