Sobre possibilidades de ensino e aprendizagem dos números irracionais no 8º ano do Ensino Fundamental

Ronaldo Bezerra Nobre

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO NO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
ENSINO DE MATEMÁTICA

Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Iole de Freitas Druck

São Paulo, outubro de 2017

Sobre possibilidades de ensino e aprendizagem dos números irracionais no 8º ano do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Esta versão contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante defesa pública ocorrida em 11/12/2017.

Agradecimentos

A tela sobre a qual foram “pintadas” as palavras desta dissertação possui trama e textura de variados tipos, inconfundíveis, marcada por diferentes eventos e inúmeras histórias. Nela é possível encontrar regiões lisas onde a tinta se espalhou e aderiu com perfeição, mas também trechos ásperos e rugosos onde o acabamento não se apresentou dos melhores. Não há por que estranhar o uso de tons pastéis e cinzentos de aridez e desânimo, estes, por fim, acabaram mesclados às cores austeras e vibrantes da superação e da esperança.

Mas e o artista, quem é o artista? Quem seria capaz de trabalhar incansavelmente, em condições tão adversas e sob constantes intempéries, por tanto tempo? De certo não é este que vos escreve, mas sim, um Outro. Alguém que do início até o presente momento tudo fez, esteve sempre “oculto”, mas inexoravelmente presente. É dele este trabalho e é a Ele a quem dirijo o meu “Muito obrigado!”.

Agradeço também a toda minha família. Tenho certeza que esta conquista é também deles. Sou grato pelo carinho, pelas constantes orações, pelos inúmeros incentivos. Vocês conhecem bem toda a história que precede este resultado.

Agradeço de modo especial à professora Iole de Freitas Druck que nos últimos anos me acompanhou com imensa disponibilidade e cordialidade em todo o percurso de elaboração, aplicação e escrita do conteúdo desta dissertação. Foram inúmeros os aprendizados ao seu lado. Quisera eu expressar com palavras apropriadas a imensa gratidão de que sou investido.

Também agradeço a todos os professores do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP que com reconhecida nobreza se dispuseram ensinar àqueles que ensinam, permitindo que homens e mulheres, em outros tempos e espaços, recebam todo o ininterrupto fluxo de conhecimentos que os precederam.

Agradeço também a todos os amigos e amigas que de forma direta ou indireta me acompanharam em todo este percurso de aprendizagem. Em especial, dirijo o meu muito obrigado ao meu querido e grande amigo Pe. Giorgio Battifora, que com grande sabedoria me incentivou e reanimou ao longo da caminhada.

A todos os amigos da minha casa, pela companhia discreta, pelas dicas e pela amizade. Vocês foram coparticipantes desse feito. Obrigado a cada um em especial.

Aos meus amigos Marcos e Cleuza, da Associação Educar para a Vida, por me permitirem ver inúmeros exemplos de vida e superação que me ensinaram, incentivaram e fortaleceram desde que os conheci. Apesar da distância que este trabalho impôs à nossa convivência, reconheçam nele mais uma vitória da Associação.

Por fim, agradeço ao Colégio Marista Arquidiocesano de São Paulo, por abrir as portas e permitir que este trabalho se desenvolvesse entre seus estudantes. Obrigado por reconhecerem como consoantes o teor da presente pesquisa e a missão e propósitos norteadores dessa instituição.

[é preciso] mudar a ênfase do conteúdo e da quantidade de conhecimentos para uma ênfase na metodologia que desenvolva atitude, capacidade de matematizar situações reais, (…) que permita identificar o tipo de informação adequada… e encontrar os conteúdos e métodos adequados. (D'Ambrosio apud ABRANTES, 1995, p.63)

Resumo

Esta dissertação apresenta um trabalho didático desenvolvido com turmas de 8º ano do Ensino Fundamental visando uma introdução significativa aos números irracionais, tanto quanto ao enfrentamento de dificuldades conceituais inerentes ao tema, como quanto ao envolvimento ativo dos estudantes no seu próprio aprendizado. Para elaborar, aplicar e analisar as atividades didáticas foram utilizados como embasamentos teóricos principais: a tese de doutorado de Olga Corbo (CORBO, O., 2012) sobre os conhecimentos necessários para a exploração de noções relativas aos números irracionais na Educação Básica e textos sobre *investigações matemáticas* de pesquisadores portugueses, sob a coordenação de João Pedro da Ponte (PONTE, J. P., et al., 1998 e ABRANTES, P. et al., 1999). As atividades foram planejadas visando abordagens dos conteúdos ricas em significados e acessíveis à faixa etária alvo. Estudantes de 8º ano realizaram pesquisas e apresentações em grupos sobre o número de ouro e atividades investigativas para explorar propriedades características dos números racionais e irracionais: representação decimal, associação à medida de segmentos de reta, localização na reta numerada, infinidade e densidade nesta reta. Em 2017, novas turmas desenvolveram atividades investigativas ampliando os objetivos para incluir a noção de comensurabilidade de segmentos de forma a viabilizar um debate participativo sobre a demonstração da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado elaborada na Grécia antiga. Tudo isso contribuiu para que os estudantes concebessem, de maneira significativa para eles, a necessidade de uma infinidade de novos números para além dos racionais.

Palavras chave: Números Irracionais no Ensino Fundamental II, Investigações Matemáticas, Protagonismo dos Estudantes.

Abstract

This dissertation presents a didactical work developed with 8th grade classes of Elementary School aiming a significant introduction to the irrational numbers in the sense that it confronts the conceptual difficulties related to the theme, as well the observation of the stimulating involvement of students in their learning process. In order to elaborate, apply and analyze the didactical activities, we considered as the main theoretical basis the doctoral thesis of Olga Corbo (CORBO,O., 2012) about the fundamental knowledge necessary for the exploration of irrational numbers in Basic Education and texts on *mathematical investigations* written by portuguese researchers and coordinated by João Pedro da Ponte (PONTE, JP, et al., 1998 and ABRANTES, P. et al., 1999). The activities were planned aiming to make the content approaches meaningful and accessible to the target age group. Eighth-grade students conducted researches and group presentations on the golden number and investigative activities to assess specific characteristics of rational and irrational numbers as: decimal representation, association to the measurement of straight segments, location in the numbered line, infinity, and density in this line. In 2017, new groups developed researches broadening the objectives to include the notion of commensurability of segments, in order to enable a debate in classroom about the demonstration of the incommensurability between the side and the diagonal of a square elaborated in ancient Greece. All of these steps contributed to the students understanding of the need for a multitude of new numbers besides rational ones.

Key words: Irrational Numbers in Elementary Education II, Mathematical Investigations, Student Protagonism.

SUMÁRIO

Agradecimentos **5**

Resumo **9**

Abstract **10**

LISTA DE FIGURAS **15**

Introdução **17**

Capítulo 1 – Atividades investigativas na aula de Matemática e seus fundamentos **25**

1.1 As atividades investigativas **25**

1.1.1 A atividade matemática 28

1.1.2 As atividades escolares de investigação matemática 33

1.1.3 A preparação de aulas de investigação 37

1.1.4 A realização de aulas de investigação 41

1.2 Reflexões iniciais sobre dificuldades na introdução aos números irracionais no Ensino Fundamental **47**

Capítulo 2 – Fundamentos teóricos do ensino dos números irracionais e algumas dificuldades em nível do Ensino Fundamental **53**

2.1 Construção do retângulo áureo **55**

2.2 Reelaboração de noções concernentes aos números racionais **61**

2.3 A percepção da incomensurabilidade do lado com a diagonal de um quadrado na Grécia antiga **66**

Capítulo 3 – Planejamento e desenvolvimento de atividades didáticas sobre números racionais e irracionais **73**

3.1 Descrição do planejamento e da aplicação das atividades desenvolvidas no primeiro semestre de 2016 como parte da pesquisa prática em sala de aula para esta dissertação **76**

3.1.1 Planejamento 76

3.1.2 Aplicação e desenvolvimento 81

3.2 Descrição do planejamento e da aplicação das atividades desenvolvidas no segundo semestre de 2016 .... **84**

3.2.1 Planejamento 84

3.2.2 Aplicação e desenvolvimento ... 87
3.3 Descrição do planejamento e da aplicação das atividades desenvolvidas no primeiro semestre de 2017 ... 89
3.3.1 Planejamento ... 89
3.3.2 Aplicação e desenvolvimento ... 93
Capítulo 4 – Análise dos resultados das atividades didáticas desenvolvidas 103
4.1 Análise das atividades didáticas aplicadas no primeiro semestre de 2016 ... 104
4.2 Análise das atividades didáticas aplicadas no segundo semestre de 2016 ... 114
4.3 Análise das atividades didáticas aplicadas no primeiro semestre de 2017 ... 122
Capítulo 5 – Considerações Finais ... 141
Referências Bibliográficas ... 151
Apêndice 1 – Orientações para o trabalho em grupo sobre o número de ouro ... 153
Apêndice 2 – Planejamento de aulas ... 155
I. Apresentação do Teorema de Pitágoras ... 155
II. Cálculo de raiz quadrada explorando o Teorema de Pitágoras ... 159
III. Cálculo de raiz quadrada de números racionais não-negativos ... 163
IV. Revisão de definições dos conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros e Racionais ... 165
V. Revisão de potências com expoentes inteiros. ... 167
VI. Obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica ... 169
VII. Considerações Finais sobre os Números Irracionais ... 171
Apêndice 3 – Questionário avaliativo dos Trabalhos de Pesquisa ... 175
Apêndice 4 – Atividades Investigativas aplicadas ao final de 2016 ... 177
I. Folha 1: A representação decimal dos Racionais ... 177
II. Folha 2: Números Irracionais – outros temas ... 179
Apêndice 5 – Atividades Investigativas aplicadas no início de 2017 ... 181
I. Folha 1: A representação decimal dos Racionais ... 181

II. Folha 2: A representação decimal e o uso de calculadoras....................183
III. Folha 3: Comensurabilidade de segmentos 185
IV. Folha 4: Números Irracionais – outros temas 187

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – DIAGRAMA QUE ACOMPANHA A INVESTIGAÇÃO 35
FIGURA 2 – RETÂNGULO ÁUREO 56
FIGURA 3 – CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO (1º PASSO) 57
FIGURA 4 – CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO (2º PASSO) 58
FIGURA 5 – CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO (3º PASSO) 58
FIGURA 6 – CONSTRUÇÃO DA DIAGONAL AC 66
FIGURA 7 – DETERMINAÇÃO DO PONTO P SOBRE AC 67
FIGURA 8 – CONSTRUÇÃO DE $r \perp AC$ 67
FIGURA 9 – CONSTRUÇÃO DO SEGMENTO AE 68
FIGURA 10 – CONSTRUÇÃO DO QUADRADO $PEFC$ 69
FIGURA 11 – CONSTRUÇÃO DO QUADRADO $QGHC$ 70
FIGURA 12 – SOBRE A DEFINIÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS 107
FIGURA 13 – SOBRE A METODOLOGIA DE TRABALHO EM GRUPO 109
FIGURA 14 – VOCÊ ACHOU INTERESSANTE O TEMA PESQUISADO? 111
FIGURA 15 – TEMAS DAS ATIVIDADES INVESTIGATIVAS 124
FIGURA 16 – SOBRE A REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE UM NÚMERO RACIONAL (1) 126
FIGURA 17 – SOBRE A REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE UM NÚMERO RACIONAL (2) 126
FIGURA 18 – O USO DE CALCULADORA NA DECISÃO SOBRE O TIPO DE REPRESENTAÇÃO DECIMAL 130
FIGURA 19 – SOBRE A COMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS 132
FIGURA 20 – SOBRE A INCOMENSURABILIDADE ENTRE A DIAGONAL E O LADO (UNITÁRIO) DE UM QUADRADO 134
FIGURA 21 – SOBRE A CRIAÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS (1) 137
FIGURA 22 – SOBRE A CRIAÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS (2) 138
FIGURA 23 – A PROPRIEDADE DA DENSIDADE 139

Introdução

Após uma experiência de quinze anos como professor de Ensino Médio em escolas públicas e particulares, apareceu-nos no ano de 2012 uma nova proposta de trabalho para lecionar aulas de Matemática em turmas do Ensino Fundamental II, instigando-nos, pela primeira vez, a trabalhar com tal segmento de ensino.

Incialmente, a ideia de se trabalhar com um público mais novo não nos foi muito agradável. Era evidente nossa inexperiência e, por essa razão, não nos sentíamos preparado, tínhamos receio de não saber lidar com um público tão jovem.

Apesar da primeira impressão ter sido aparentemente contrária, o fato é que naquele ano começamos uma nova etapa de experiência profissional: lecionar aulas de Matemática a jovens na faixa etária de 13 anos – alunos de 8º ano do Ensino Fundamental II – em uma tradicional escola particular da cidade de São Paulo.

O público com o qual trabalhamos é proveniente de famílias com um poder aquisitivo bastante alto, composto em sua maioria por pais e mães que acompanham com proximidade o trabalho e a produção de seus filhos.

Trata-se de uma escola confessional católica, situada na zona sul da cidade de São Paulo. Em sua infraestrutura podemos encontrar, dentre outros: salas de aula providas de projetores, computadores, lousa branca, sistema de conexão para espelhamento de *tablets*; biblioteca com considerável acervo e salas de estudo individuais; laboratórios de Física, Química, Biologia e Informática amplamente aparelhados; quadras poliesportivas; auditórios e núcleo de atividades culturais.

A proposta de ensino que é praticada na escola, sobretudo no que diz respeito ao ensino de Matemática, é diferenciada segundo o nível de escolaridade em que os alunos se encontram. Por exemplo, nos anos iniciais – Ensino Fundamental I, 6º e 7º anos – ainda se nota, em certa medida, que os estudantes são estimulados por práticas de investigação, elaboração de conjecturas e realização de pesquisas nas aulas de Matemática. Passando-se aos anos finais – Ensino Fundamental II, 8º e 9º anos – percebe-se uma considerável redução na utilização de tais práticas, em decorrência de uma distribuição rígida dos conteúdos e de outras decisões curriculares tomadas pela própria escola. Em consequência disso, nesse segmento a abordagem adotada no ensino de Matemática costuma acabar restrita à tradicional transmissão de conteúdos, em aulas basicamente expositivas. Consequentemente, os estudantes deixam de ser vistos como protagonistas do processo de ensino-aprendizagem e passam a assumir, com certa frequência, uma atitude mais passiva, demonstrando paulatinamente menor interesse perante desafios e novas descobertas.

Refletindo sobre nossa própria prática pedagógica, pudemos perceber uma sistemática usual de ensino baseada, sobretudo, na exposição dos conteúdos da forma tradicional: o professor expondo os conteúdos na lousa e os alunos prestando atenção e copiando aqueles mesmos conteúdos no caderno.

Uma palestra de um renomado professor[1] de Matemática instigou-nos a buscar uma mudança em nossa prática em sala de aula: não mais fazer apenas exposições de conteúdos, mas sim propor situações problema, levar os estudantes a investigar, buscar favorecer o desenvolvimento neles de uma postura de protagonismo e não apenas de meros expectadores. Passamos a nos interessar em conseguir propor situações didáticas que provoquem os estudantes a: procurar propriedades, estabelecer relações, perceber regularidades; alargar sua capacidade de observação da própria realidade; a aprender a pesquisar, a formular hipóteses, que sejam capazes de conjecturar e de criar definições para determinados elementos relacionados ao seu estudo. Segundo aquele professor, é necessário gerar cidadãos “matematicamente sadios”, ou seja, pessoas para quem a Matemática além de não representar um trauma possa, principalmente, tornar-se uma contínua aliada nas mais diferentes situações da vida cotidiana.

Na era da informática e da comunicação vemos que a sociedade se alargou, não é só mais aquela do bairro ou país em que vivemos, é sim, aquela do mundo à nossa volta. Portanto, faz-se necessário procurar enfrentar a questão do como educar hoje, como desenvolver nos estudantes um entusiasmo, um interesse, não só para com a escola ou o próprio ensino, mas também frente aos problemas do mundo contemporâneo. Mais ainda, como levá-los a serem cidadãos conscientes, críticos,

---

[1] Trata-se do professor Antônio José Lopes [Bigode], em palestra proferida na disciplina de Matemática nos Currículos da Educação Básica, 1º semestre de 2015, IME-USP.

que possuam uma capacidade de autonomia, de reflexão, de pró-atividade diante da sociedade em que se vive.

Diante desse cenário, no qual tanto a Matemática quanto a própria escola se encontram, reconhecemos ser de grande valor os diferentes estudos que visam contribuir com melhorias para essa realidade. Parece-nos que tais melhorias, só poderão ser efetivadas mediante a apresentação de propostas realmente significativas e adequadas aos estudantes, que levem em conta o momento da vida em que estão inseridos; propostas que não deixem de fora a realidade dos educandos aos quais se destina.

Assim, a problemática com a qual nos deparamos e que nos pareceu pertinente como objeto de pesquisa para esta dissertação, pode ser resumida em dois aspectos. O primeiro está ligado aos estudantes: é fato que na faixa etária dos 13 para os 14 anos, de um modo geral, os jovens passam por inúmeras transformações em suas vidas. São transformações corporais, de maturidade, de visão do mundo, etc. Entretanto, é também nessa fase que, muitas vezes, se constata uma atitude mais burocrática frente aos estudos, uma certa dispersão, um certo desinteresse e passividade para com os mesmos. O segundo aspecto pode ser correlacionado à metodologia utilizada nas aulas de Matemática. Sobreveio-nos a pergunta sobre quais seriam as abordagens mais significativas para determinados conteúdos curriculares, dadas as atuais características dos estudantes, notadamente depois de termos começado a estudar com maior afinco questões sobre o ensino de Matemática no Mestrado.

Refletindo sobre os diferentes conteúdos usualmente trabalhados no 8º ano do Ensino Fundamental II, e levando em consideração todo o exposto acima, decidimos que o tema dessa dissertação versaria sobre os números irracionais. Com isso nos propusemos a enfrentar o desafio de se buscar abordagens em sala de aula para a introdução de tal conjunto numérico, de modo significativo e motivador para os estudantes, e envolvendo a participação efetiva dos mesmos na construção desse novo e importante conhecimento.

Uma das razões para tal escolha foi a percepção do quão raso se mostrava o aprendizado efetivamente assimilado pelos estudantes a respeito desse tema, resultante da experiência acumulada ao longo dos últimos quatro anos como professor daquele ano escolar. Associado a isso, existia também uma insatisfação própria para com o ensino desse conteúdo, pois percebíamos que, desde a época de nossa formação, havíamos apresentado os números irracionais aos estudantes sempre de um modo muito superficial. Também influenciaram na escolha do tema as discussões ocorridas no interior das aulas de “Análise com Aplicações” e de “Matemática nos Currículos da Educação Básica” – disciplinas oferecidas aos alunos do programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP. Tais aulas contribuíram para que formássemos um olhar mais amplo e aprofundado sobre determinadas questões conceituais sobre os números irracionais que, a nosso ver, não só poderiam, mas também mereceriam ser trabalhadas com os estudantes. Por fim, corroborando com a escolha feita do tema desta dissertação, a leitura inicial de artigos e dissertações sobre o ensino dos números irracionais de autores como Olga Corbo (2012) e Wagner M. Pommer (2012) nos trouxe a comprovação da extensão e da generalidade do problema, bem como da importância de atacá-lo. A partir dessas leituras decidimos voltar nossa reflexão e pesquisa a aspectos que consideramos fundamentais no ensino dos números irracionais: a complexidade do tema matemático em si e a questão das abordagens didáticas mais adequadas para uma aprendizagem significativa dos estudantes de final do Ensino Fundamental.

A complexidade se dá de inúmeras formas e é inerente ao assunto: a infinidade e a aleatoriedade na representação decimal desses números, isto é, o fato de existirem infinitas casas decimais não periódicas após a vírgula, por si só, já é uma característica intrigante, pois gera um sentimento de não controle sobre esses números; a origem da “descoberta” de sua necessidade, ligada ao problema da incomensurabilidade de segmentos; a “aparente” escassez de aplicações dos mesmos na vida prática; o problema de sua localização na reta numerada; as operações entre eles e, por fim, a questão da quantidade e densidade desse conjunto numérico em si e na reta numerada (ou no conjunto dos números reais).

Não é difícil imaginar que para abordar tal assunto de maneira significativa para alunos cuja maturidade intelectual ainda está em desenvolvimento, ou seja, em turmas de oitavo ou nono ano do Ensino Fundamental, é necessário uma série de cuidados quanto à metodologia de ensino e, também, ao domínio seguro desses conteúdos por parte do professor. E é nesse ponto que entra a questão da transposição didática e da formação do professor de Matemática, foco da tese de doutorado de Olga Corbo.

> Para o desenvolvimento deste estudo, tomamos como ponto de partida a ideia de que o desempenho do papel de mediador, entre o aluno e as noções relativas aos irracionais, requer do professor um repertório abrangente de conhecimentos, que permita fazer as adequações necessárias ao nível de compreensão dos alunos e favoreça articulações dessas noções com outros conteúdos já estudados. (CORBO, 2012, p.14)

O que acontece, em geral, é que dadas essas especificidades e exigências, o ensino dos números irracionais acaba sendo tratado de maneira muito superficial ou até mesmo equivocado, tanto pelos professores nas escolas, quanto por autores de livros didáticos. Como exemplo dessa superficialidade, citamos:

> No que concerne às definições e representações de números racionais, irracionais e reais, os conhecimentos acumulados pela maioria dos professores eram os mesmos indicados por currículos e livros didáticos, para o Ensino Fundamental [...] (CORBO, 2012, p.253)

Já dentre os equívocos mais frequentes nesse ensino está, por exemplo, a questão da circularidade: definir um número irracional como sendo aquele número real que não é racional. Ou então, afirmar que um número irracional é todo aquele que não pode ser escrito na forma de uma fração, sem a necessária discussão da equivalência entre as duas representações dos números racionais, expressa no teorema: *“Todo número é representável por uma fração se, e somente se, sua representação decimal for finita ou infinita periódica”*. Ou ainda, trabalhar de maneira errônea com a calculadora para tratar desse assunto, afirmando que se aparecer no visor um resultado cujas casas decimais não se repetem, tal número será irracional.

Pesquisas, como a de Corbo (2012), reiteram a necessidade de se introduzir o ensino dos números irracionais já desde o Ensino Fundamental de modo que este possa ser continuado, consolidado e aprofundado no Ensino Médio, conforme preconiza a Lei de Diretrizes e Bases para a educação nacional:

> Art. 35 O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
>
> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; (BRASIL, 1996)

Em resumo, apresentamos até aqui, as diferentes características do público alvo de nossa pesquisa, a realidade que o circunda, a caracterização da prática de ensino usualmente adotada pelo professor de Matemática perante o ensino dos números irracionais, a própria complexidade deste assunto e alguns dos equívocos mais comuns encontrados na abordagem desse tema. Acreditamos que estabelecer uma coesa relação entre diferentes conteúdos do currículo necessários para introduzir o ensino dos números irracionais em turmas de 8º ano do Ensino Fundamental, pode representar uma contribuição à pesquisa em ensino de Matemática, haja vista a forma prescritiva e pouco eficaz como muitas vezes tal assunto é abordado em livros didáticos e o escasso número de dissertações ou trabalhos de pesquisa relacionados ao ensino propriamente dito desses números a estudantes da faixa etária acima mencionada.

Por fim, identificamos as seguintes questões como norteadoras da presente dissertação junto ao Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP:

- Uma metodologia de ensino/aprendizagem baseada em investigações matemáticas pode despertar em estudantes de 8º ano do Ensino Fundamental uma atitude de protagonismo e maior envolvimento relativamente à sua própria aprendizagem de Matemática?
- Que tipos de atividades investigativas podem ser propostas a estudantes de 8º ano do Ensino Fundamental, a fim de desenvolver e aprofundar o estudo dos números irracionais, minimizando as mais frequentes dificuldades referentes ao aprendizado desse conteúdo?
- Como discutir a problemática dos conceitos complexos envolvidos no estudo dos irracionais para obter abordagens significativas e acessíveis para a introdução dessa temática com estudantes do Ensino Fundamental II? Em particular, como fazer com que estudantes de oitavo ano percebam que os números racionais não são suficientes para medir todos os segmentos de reta concebíveis?

Nesse sentido, delineamos como objetivos deste estudo:

- Pesquisar e aprofundar conhecimentos sobre a metodologia de ensino baseada em investigações matemáticas em sala de aula, particularmente nos trabalhos de autores portugueses como João Pedro da Ponte e Paulo Abrantes;

- Identificar dificuldades conceituais e analisá-las com vistas a: 1) melhor entender a natureza de tais dificuldades (como: ideia subjacente bastante abstrata ou complexa, necessidade de pré-requisitos avançados, uso excessivo de formalismo algébrico, etc.) e explicitar nossa compreensão sobre esse aspecto como contribuição à reflexão sobre as mesmas a eventuais professores/leitores desta dissertação; e 2) buscar abordagens que coloquem o foco nas ideias principais sem exageros de formalismos e contornem pré-requisitos matemáticos avançados para o ano escolar em questão;
- Planejar e aplicar sequências didáticas envolvendo investigações matemáticas visando a introdução do estudo sobre os números irracionais com estudantes de 8º ano do Ensino Fundamental que favoreçam uma aprendizagem mais significativa dos mesmos;
- Analisar qualitativamente os resultados obtidos com a aplicação das sequências didáticas à luz das questões norteadoras e da fundamentação teórica adotada.

No capítulo 1 desta dissertação apresentamos toda a fundamentação teórica sobre atividades matemáticas investigativas, apoiada nos trabalhos desenvolvidos por pesquisadores portugueses como João Pedro da Ponte e Paulo Abrantes (ABRANTES et al. 1999 e PONTE et al. 1998). Grande parte do trabalho desses investigadores é decorrente de desdobramentos gerados pela união de professores universitários e da escola básica no estudo das influências geradas pelo uso de atividades de cunho investigativo no ensino/aprendizagem de Matemática. Ao final do capítulo, são levantadas algumas reflexões visando possibilitar uma melhor compreensão da problemática relativa à introdução dos números irracionais ao final do Ensino Fundamental, principalmente a partir da tese de doutorado de Olga Corbo (CORBO, 2012).

No capítulo 2, apresentamos nossas próprias investigações sobre um embasamento matemático voltado a planejar as intervenções práticas em sala de aula que fizeram parte da pesquisa desta dissertação. Nele descrevemos nossas reflexões sobre algumas das dificuldades conceituais inerentes ao tema dos números irracionais e sobre possibilidades de abordagens de tais conceitos ou propriedades, adequadas para classes de Ensino Fundamental.

O capítulo 3 traz a descrição do planejamento das atividades didáticas que foram propostas e desenvolvidas em turmas de oitavo ano do Ensino Fundamental, em três momentos distintos: primeiro semestre de 2016 (por meio de trabalhos de pesquisa), segundo semestre de 2016 (com atividades investigativas) e primeiro semestre de 2017 (novamente por meio de atividades investigativas). Além disso, apresentamos a descrição detalhada das atividades efetivamente desenvolvidas pelos estudantes em cada um dos três momentos citados anteriormente.

Por fim, no capítulo 4 tecemos uma análise avaliativa da adequação das atividades aplicadas em sala de aula, tanto do ponto de vista da dinâmica das metodologias de ensino empregadas quanto do envolvimento e aprendizagem dos estudantes.

Capítulo 1 – Atividades investigativas na aula de Matemática e seus fundamentos

Na introdução apresentamos o panorama onde nasceu e se desenvolveu nosso interesse em abordar os números irracionais por meio de investigações matemáticas, em classes de 8º ano do Ensino Fundamental II.

O presente capítulo apresenta as principais características de uma aula com investigações matemáticas e levanta a problemática relativa ao ensino dos números irracionais para estudantes da faixa etária supracitada. A intenção não é esgotar inteiramente o assunto, mas mostrar uma visão geral que permita ao leitor apropriar-se das ideias fundamentais que norteiam o trabalho em sala de aula ao utilizarmos investigações matemáticas no ensino dos números irracionais.

Inicialmente no texto do capítulo buscamos responder às seguintes questões: O que realmente vem a ser, uma investigação matemática no contexto da sala de aula? Como se justifica o ensino por meio de investigações matemáticas? O que caracteriza as atividades de investigação, o planejamento e a estrutura da aula? Quais são as dificuldades e desafios em uma prática deste tipo? Que diferentes papéis professores e estudantes desempenham e como se dá e que importância tem, as diferentes interações existentes entre esses atores no âmbito de uma aula com investigações matemáticas?

Na sequência, são apresentados alguns aspectos das dificuldades conceituais inerentes ao ensino dos números irracionais e uma possível trajetória a ser seguida no enfrentamento de tal desafio.

1.1 As atividades investigativas

Nas últimas décadas, diversos documentos programáticos nacionais, internacionais e orientações provenientes das mais recentes reformas curriculares, vêm acenando para uma série de recomendações relacionadas ao ensino da Matemática, nas quais o desenvolvimento de capacidades de raciocínio e de resolução de problemas está entre os objetivos principais para todos os estudantes. Segundo estas perspectivas, os objetivos do ensino em geral e, em particular da Matemática, não devem se limitar à simples aquisição de conhecimentos, mas extrapolar tal dimensão na busca de desenvolver capacidades/aptidões e atitudes/valores. Assim, não só a escola, mas também todos aqueles envolvidos com o ensino de Matemática são chamados a se engajarem em uma missão mais desafiadora: colaborar para que o ensino de Matemática abranja aspectos típicos da construção do conhecimento nesta ciência, tais como a formulação e resolução de problemas ou a elaboração e teste de conjecturas por meio de atividades de cunho investigativo.

Nesse sentido, mostra-se necessária uma mudança significativa na forma de olhar para poder criticar a natureza das atividades que predominam nas aulas de Matemática elementar. O contínuo surgimento de novas situações de realidade, que demandam o uso de ferramentas matemáticas para serem entendidas, revela que o simples domínio de técnicas de cálculo, ou a mera assimilação de conhecimentos, já não apresentam reconhecida aplicabilidade no enfrentamento das mesmas. É preciso, portanto, ir além, e temos consciência de que as diferentes iniciativas metodológicas florescidas ao longo da história procuraram, e ainda procuram, oferecer contribuições para esse novo olhar sobre a atividade matemática.

Para o desenvolvimento desta dissertação nos debruçamos especialmente sobre a metodologia de ensino baseada em investigações matemáticas em sala de aula. Muitos foram os trabalhos, no cenário mundial, que apresentaram e desenvolveram a temática das investigações matemáticas. Sob diferentes aspectos esses trabalhos contribuíram na elucidação de questões relacionadas às investigações matemáticas, sobretudo no que diz respeito às perspectivas desta prática; suas ligações com outras temáticas de ensino como a resolução de problemas e a formulação de problemas; à incorporação de atividades de cunho investigativo no currículo de matemática; e, à compreensão do que é necessário para apoiar os professores no desenvolvimento de uma prática pedagógica baseada em investigações. Nesse sentido, foram nos trabalhos realizados por uma equipe de pesquisadores e professores portugueses onde encontramos abordagens de caráter prático, relativas às investigações matemáticas.

Essa equipe de pesquisadores e professores iniciou, em 1995, um projeto colaborativo, no âmbito do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da

Universidade de Lisboa, chamado “Matemática Para Todos: investigações na sala de aula – (MPT)”. O projeto, composto por 20 (vinte) pessoas – 11 (onze) professores/pesquisadores (que trabalhavam na formação de professores na própria universidade ou em escolas de ensino superior) e mais 9 (nove) professores (do segundo e terceiro ciclo do ensino básico e do ensino secundário das escolas de Lisboa) –, tinha como finalidade, produzir, experimentar e avaliar diferentes tarefas investigativas para a sala de aula e lidava com a natureza da atividade matemática dos próprios estudantes, possuindo como problemáticas centrais, o estudo da integração das investigações no currículo, das competências profissionais requeridas ao professor de matemática por estas atividades e, por fim, o estudo da dinâmica e das interações que tendem a estabelecer-se na sala de aula (PONTE[2] et al., 1998; FONSECA & ABRANTES[3], 1998 apud ABRANTES et al., 1999, p. 216).

O trabalho do projeto Matemática para Todos, organizado em três grupos principais, tratava de tópicos matemáticos específicos (funções, geometria e números e regularidades) e incidia em diferentes domínios: no desenvolvimento curricular, na aprendizagem dos alunos, na dinâmica da sala de aula e nos professores.

Em relação ao desenvolvimento curricular, aqueles pesquisadores se interessavam por questões como:

> As investigações matemáticas valem por si só ou devem constituir-se como suporte à aprendizagem de “conteúdos” matemáticos? As tarefas devem ser mais ou menos estruturadas? Devemos fornecer mais ou menos sugestões para os professores? Que tipo de sugestões?. (ABRANTES et al., 1999, p. 135)

Sobre a aprendizagem dos alunos, esses pesquisadores perguntavam-se:

> Qual é a influência destas atividades nas concepções dos alunos relativamente à Matemática escolar? E qual é a influência das concepções dos alunos na maneira como trabalham nas investigações matemáticas? Qual é a relação entre os conhecimentos elementares de Matemática e os processos complexos de raciocínio tais como conjecturar e provar? (ABRANTES et al., 1999, p. 135)

As indagações referentes à dinâmica da sala de aula eram:

---

[2] PONTE, J., FERREIRA, C., BRUNHEIRA, L. OLIVEIRA, H., VARANDAS, J. **Investigating mathematical Investigations.** In P. Abrantes, M. Baía & J. Porfírio (eds), *The interactions in the mathematics classroom* (proceedings of CIEAEM-49), p.3-14. Setúbal: Escola Superior de Educação, 1998.

[3] FONSECA, H., ABRANTES, P. **Geometrical Investigations developed by students.** In P. Abrantes, M. Baía & J. Porfírio (eds), *The interactions in the mathematics classroom* (proceedings of CIEAEM-49), p.360-364. Setúbal: Escola Superior de Educação, 1998.

> Que questões se levantam quando os alunos trabalham em grupo, em pares ou individualmente neste tipo de atividade? Que novos padrões de interação na sala de aula estão associados à realização de investigações matemáticas? Quais são as mudanças nos papéis do professor e dos alunos? (ABRANTES et al., 1999, p. 135)

Por fim, os professores não só eram considerados, como também, acompanhados de perto em suas tomadas de decisão:

> Como integrar essas tarefas no currículo? Quanto tempo usar na realização de investigações? Como apresentá-las aos alunos? Que tipo de apoio se lhes deve oferecer? Como promover as discussões na sala de aula? Como avaliar os alunos? Que outras competências são necessárias para conduzir este tipo de atividade? (ABRANTES et al., 1999, p. 136)

1.1.1 A atividade matemática

A fim de adentrarmos no tema central desta dissertação, uma importante premissa se faz necessária a respeito da natureza da atividade matemática. Em que consiste tal atividade e que aspectos a caracterizam?

Nas diferentes interações sociais que cotidianamente vivemos, é muito comum encontrarmos determinados posicionamentos ou pontos de vista que demonstram uma concepção reduzida e até mesmo equivocada do que seja a atividade matemática. Um olhar bastante restrito do que seja esta importante atividade é pensar que a mesma se restringe apenas aos trabalhos de pesquisa realizados pelos matemáticos nas diferentes universidades ou aos momentos em que efetuamos mecanicamente algum tipo de cálculo. Com efeito, traços dessa atividade são encontrados em muitos outros âmbitos das relações humanas.

Para além desse tipo de visão parcial e socialmente difundida, entendemos por atividade matemática uma série de outras ações que englobam diferentes aspectos, tais como:

- Um modo de pensar relacionado a ideias, como: objetividade, exatidão e logicidade;
- Um tipo específico de leitura do mundo que demanda uma linguagem própria;

- Uma capacidade de modelar matematicamente determinadas situações com a utilização de registros adequados, que possibilitem um estudo detalhado e amplo do fenômeno em questão;
- Uma capacidade de atenção, curiosidade e perspicácia na observação do espaço à sua volta;
- Certo domínio de conhecimentos e técnicas que permitam resolver, de maneira crítica, problemas reais do dia a dia;
- Uma habilidade em investigar, levantar hipóteses, formular perguntas que tratem de aspectos quantitativos ou geométricos da realidade;
- Uma capacidade de identificação de padrões e tendências, de análise da variabilidade de uma grandeza e consequente tomada de decisão;
- Uma capacidade de demonstrar resultados baseados em estudos prévios e em novas descobertas.

A título de exemplo, vejamos o quanto da atividade matemática está presente nas mais variadas práticas desenvolvidas por diferentes tipos de profissionais numa sociedade.

Comecemos pelas inúmeras e pequenas atividades que todos os dias realizamos como comprar o pão, receber o troco em uma determinada compra, na reforma da casa ou do apartamento, na elaboração de um planejamento para as despesas do mês, nas responsabilidades perante as dívidas assumidas, etc. Pensemos por um instante no trabalho desenvolvido pela atendente de caixa em um supermercado, ou no mestre de obras que faz o revestimento do piso em um escritório ou no cozinheiro que prepara uma receita em um restaurante. Constantemente, nas mais diferentes circunstâncias, desempenhamos ações repletas de aspectos da atividade matemática, sejam eles aritméticos, geométricos, algébricos ou estatísticos. Na maioria dos casos, tais aspectos não são nem percebidos, dado o caráter habitual em que tais circunstâncias acontecem.

Também no ofício desenvolvido pelos diferentes profissionais da área de saúde, como não reconhecer a presença da atividade matemática em suas práticas cotidianas? Ao realizar uma cirurgia, por exemplo, espera-se que o médico que a conduz possua, além das competências inerentes à sua função, outras habilidades necessárias ao bom desenvolvimento da mesma: uma capacidade de observação, de concentração, de decisão a respeito do melhor caminho a ser tomado; uma capacidade de análise das implicações que um ou outro tipo de tratamento pode gerar, sempre levando em consideração a totalidade dos fatores envolvidos para a cura de seu paciente. De certo modo, todas essas habilidades estão ligadas à atividade matemática e podem ser aperfeiçoadas e desenvolvidas ao longo do estudo dessa ciência.

Consideremos o vasto campo dos profissionais que atuam nas diferentes áreas técnicas, computacionais ou de engenharia. Quanto da atividade matemática é utilizada, desenvolvida e aprimorada por esse setor? Pensemos na elaboração de *softwares*, na estruturação lógica de seus algoritmos; no enorme número de hipóteses que são diariamente levantadas, comprovadas ou refutadas e nos distintos experimentos que cotidianamente são realizados. Consideremos ainda, os inúmeros cálculos e projeções realizados ao longo da implementação e criação de diferentes tipos de obras e equipamentos, os quais apresentam-se todos os dias com um grau cada vez mais elevado de complexidade, exigindo níveis de precisão mais apurados, sendo essas de grandes proporções ou não. Além disso, vemos acontecer todos os dias, no contexto mundial, um rápido desenvolvimento e uma crescente vinculação de distintas áreas, deixando claro o quanto a presença da Internet foi crucial para tais transformações. E em meio a todo esse emaranhado de relações vamos vendo a atividade Matemática, se afirmando, de forma discreta e consistente.

Outro campo de atuação onde podemos encontrar muitos aspectos da atividade matemática é aquele dos profissionais ligados às áreas de Economia, Comércio e Indústria. Basta pensarmos na questão das previsões de custos e de lucros, no estabelecimento de metas, na leitura e análise dos diferentes tipos de índices, nos investimentos, nas relações contratuais, nos pagamentos e dívidas. Quanto das decisões tomadas nos diferentes âmbitos desse setor ocasiona diversas consequências na vida pessoal e coletiva dos cidadãos. Por traz da maioria dessas decisões, são encontrados variados tipos de problemas envolvendo conhecimentos e conteúdos matemáticos específicos aplicados, de maneira crítica, na resolução de situações reais do dia a dia. Nessa direção, a resolução de problemas é o que melhor caracteriza a atividade matemática no sentido de buscar soluções otimizadas que maximizem vantagens e minimizem desvantagens, por exemplo. Em todas essas práticas, vemos traços implícitos da atividade matemática em ação.

Quanto desse tipo de pensamento também está presente na profissão daqueles que se dedicam aos esportes ou à Educação Física. O número de repetições necessárias, o tempo de duração de cada execução de um certo tipo de movimento, a amplitude de um ângulo em um certo movimento, a relação entre os diferentes coeficientes corporais e nutricionais, o gasto energético, etc. É grande a presença do raciocínio proporcional nesse tipo de prática.

Naqueles que estão ligados ao campo estético das artes e da música, também podemos ver aspectos da atividade matemática que tais profissionais utilizam. Os diferentes estudos das formas geométricas, da harmonia e beleza através de propriedades intrinsecamente matemáticas como a simetria, a reflexão, a rotação, etc. Na música, como também nas artes, o estudo das proporções, dos tempos, do ritmo, são todos aspectos que possuem algo daquilo que chamamos atividade matemática.

Por fim, não esgotando o rol de possibilidades, podemos também dizer que no campo das relações políticas há muito das atividades matemáticas. De fato, a análise das diferentes propostas, dos diferentes projetos, a compreensão de aspectos técnicos e a tomada de decisões, são apenas algumas das tarefas que rotineiramente os políticos e seus assessores desempenham. Sabemos da tamanha importância de tais análises, pois vemos suas implicações incidirem diretamente no modo de vida da população representada pelos mesmos. Certamente não podemos nos esquecer de toda a atividade matemática presente nos processos eleitorais. A Estatística, tão presente nas mais diferentes áreas do conhecimento, contribui com estudos de grande relevância para os dias atuais: identificando tendências, estudando a variabilidade de certos fenômenos e determinando intervalos de confiança, cuja finalidade baseia-se na tomada de decisões.

Convém esclarecermos que nem todas as atividades matemáticas descritas acima são do mesmo tipo. Aquelas que se destinam ao desenvolvimento de capacidades básicas como o fazer cálculos dos mais diferentes tipos são, por assim dizer, atividades de menor complexidade. Atividades matemáticas de maior complexidade como o levantamento de hipóteses e a proposição de conjecturas podem promover o desenvolvimento de capacidades intelectuais mais avançadas. Claramente a maior complexidade aqui não diz respeito ao fato de serem fáceis ou difíceis, mas sim, às atividades mentais exigidas, às relações a serem estabelecidas, à criatividade, à persistência, à observação, à criticidade e percepção dos diferentes vínculos que ligam um determinado problema. Por fim, tal complexidade tem a ver também com o levar em consideração todos os fatores envolvidos no problema.

Desta forma, vimos que a atividade matemática engloba diferentes aspectos por vezes despercebidos aos olhos de muitas pessoas. Ela é caracterizada por momentos de pesquisa e exploração, observação de padrões e regularidades, momentos de elaboração de conjecturas, levantamento de hipóteses e formulação de questões, momentos de estimativas, inferências, demonstração, generalização, descoberta e reproposição de novas questões. Percebemos, assim, o quanto a atividade matemática pode ir além do mero e simples fazer cálculos.

> O processo de construção específico de conhecimentos matemáticos sempre envolve (e promove), a partir de questões sociais, culturais ou tecnológicas, o desenvolvimento de atitudes como: formular perguntas; levantar e testar hipóteses; estabelecer analogias; buscar exemplos e contraexemplos; criar modelos; expressar ideias de forma organizada e coerente; verificar a adequação das soluções ao problema original; e aplicar processos de validação aos resultados obtidos. Ainda mais, a produção de conhecimentos matemáticos pressupõe intuições, ensaios, erros e validações. Historicamente, tais processos se beneficiaram muito da troca de pontos de vista entre os pesquisadores, tanto para o enriquecimento mútuo de ideias como para a identificação de erros e o aprimoramento de soluções. Também na escola, os processos de aquisição de conhecimento pelos estudantes ou de discussão e validação merecem ser permeados pelas trocas entre pares, com o debate ativo no grupo de alunos sobre justificativas e refutações de propriedades ou procedimentos, em uma aula de Matemática onde a interação social-afetiva-emocional seja uma das tônicas mais importantes da prática pedagógica.
> [...]
> Além disso, será também importante garantir espaço para que os estudantes vivenciem o fazer matemático [...]. Para isso serão necessárias abordagens metodológicas diferenciadas, como por exemplo, a resolução de problemas, o desenvolvimento de projetos, a prática de investigações matemáticas ou o emprego de tecnologias da informação e comunicação – que despertam tanto interesse nos jovens contemporâneos. Será importante a adoção dessas ou outras opções metodológicas que permitam o trabalho integrado com as demais áreas do conhecimento e uma participação ativa e responsável de cada estudante na construção do seu próprio conhecimento.
> (Druck, I.F., 2017, pp.150-151)

1.1.2 As atividades escolares de investigação matemática

Levando em consideração o tema escolhido para este estudo e a abordagem metodológica pretendida para o desenvolvimento do mesmo, daremos destaque, dentre as inúmeras iniciativas existentes, às atividades de exploração e investigação. São muitas as formulações a respeito do que se entende por “investigações matemáticas”, por isso, nos apoiaremos nas palavras de Ponte, para designar o sentido que assumiremos neste trabalho:

> As investigações matemáticas são parte do que alguns autores designam por “actividade matemática”, o que corresponde a identificar *aprender* Matemática com *fazer* Matemática. Nesta perspectiva, esta ciência é encarada mais como uma forma de gerar conhecimento do que como um corpo de conhecimentos. (PONTE et al., 1998, p. 15)

De fato, a depender da forma como ensinamos, podemos transmitir aos nossos estudantes, uma concepção da Matemática enquanto corpo de conhecimento, ou seja, algo já estruturado, no qual a pessoa deve “se enquadrar”, aprendendo a dominar regras pré-estabelecidas; ou então, podemos favorecer o despertar, nos estudantes, de uma visão da Matemática enquanto forma de conhecimento, instigando-os a adotarem uma atitude crítica perante a sua própria aprendizagem, procurando valorizar o que alguns autores têm chamado “pensar matematicamente” (Mason, Burton e Stacey[4], 1982; Schoenfeld[5], 1992, apud ABRANTES, 1998, p. 166).

Portanto, se quisermos desenvolver capacidades de raciocínio e difundir uma concepção da Matemática como forma de conhecimento por meio de um fazer Matemática, nos será de grande utilidade o ulterior esclarecimento que Love[6] (1988, apud PONTE, 1998, p. 103) nos dá, a respeito das investigações matemáticas, quando afirma que os estudantes precisam se envolver em atividades que lhes deem a oportunidade de:

> - Identificar e iniciar os seus próprios problemas para investigar;

---

[4] MASON, JOHN., BURTON, L., STACEY, K. **Thinking mathematically.** London: Addison-Wesley, 1982.

[5] SCHOENFELD, A. **Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics.** Em D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, 1992.

[6] LOVE, E. **Avaliando a Actividade Matemática.** Tradução do artigo do livro Mathematics, Teachers and Children: A reader, editado por D. Pimm e publicado em 1988 por Hodder &Stoughton (p. 249 - 282).

- Expressar as suas ideias e desenvolvê-las na resolução de problemas;
- Testar as suas ideias e hipóteses confrontando-as com experiências relevantes;
- Defender racionalmente as suas ideias e conclusões e submeter as ideias dos outros a uma crítica razoável.

Muito próximo ao conceito de investigação matemática, está o conceito de resolução de problemas. Com efeito, esses dois termos são usados em várias situações sem grandes diferenças. Ambos aludem a processos matemáticos complexos que envolvem um tipo de atividade de caráter problemático. A resolução de problemas abrange uma gama de tarefas que tanto podem estar relacionadas com situações exclusivamente matemáticas, como também, de caráter mais geral ligadas à vida comum das pessoas; podem tanto ser de cunho mais aberto ou mais fechado. Conforme citado por Ponte (1998), as "atividades matemáticas" ou "investigações matemáticas", designarão, no âmbito deste estudo,

> [...] um tipo de actividade que dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar. São atividades de cunho muito aberto, referentes a contextos variados (embora com predominância para os exclusivamente matemáticos) que podem ter como ponto de partida uma questão ou uma situação proposta quer pelo professor, quer pelos alunos. (PONTE et al., 1998, p. 15)

Com efeito, um dos aspectos que mais se destacam nas atividades de natureza investigativa, é o caráter de abertura que as questões propostas possuem. Em outras palavras, tais questões procuram instigar os estudantes, estimulando-os a colocarem suas próprias perguntas. Essa característica abre espaço para que outras situações, não necessariamente interrogativas, possam também ser apresentadas. Lerman[7] (1989, apud ABRANTES, 1998, p. 112) apresenta um exemplo desse tipo de situação investigativa aplicada a um grupo de estudantes de pós-graduação de uma área diferente da Matemática:

> "Considere triângulos cujos lados são números inteiros. Há 3 triângulos com perímetro igual a 12 unidades. Investigue"

Tendo em vista não ter sido feita nenhuma pergunta direta, o autor relata que diante de semelhante situação, veio à tona o desconcerto de alguns grupos de estudantes, verificando que estes não tinham ideia do que lhes estava sendo pedido fazer.

---

[7] LERMAN, S. **Investigações: Para Onde Vamos?** Tradução do capítulo 6 do livro Mathematics Teaching: The State of the Art., organizado por Paul Ernest e publicado em 1989 por The Falmer Press (p. 73-80).

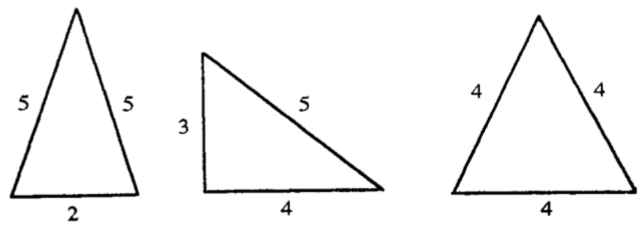


Figura 1 – Diagrama que acompanha a investigação
Fonte: SMILE (1981). Investigations. Londres: Smile Centre. Apud ABRANTES, (1998)

Podemos notar que o fato de abrir espaço para que os estudantes formulem e criem seus próprios problemas, recolocando ou reestruturando a questão inicial, caracteriza-se como uma desafiadora experiência de aprendizagem. Afirma ainda o autor: “Todos os alunos acharam que esta situação era bastante diferente de todas as investigações que tinham anteriormente feito, constituindo um grande desafio”.

> De um modo geral as investigações partem de enunciados pouco precisos e estruturados e exigem que sejam os próprios alunos a definir os objetivos, a conduzir experiências, a formular e testar conjecturas. Uma investigação tem um caráter necessariamente problemático, mas permite a formulação de diversos tipos de questões, estimulando a realização de explorações em direções, por vezes, muito diversas. Numa investigação o interesse reside sobretudo nas ideias matemáticas e nas suas relações, cabendo ao aluno um papel essencial na definição das questões a investigar. (ABRANTES et al., 1999, p.5)

Um quesito de grande importância que distingue as atividades de investigação da resolução de problemas tem a ver com a natureza da questão que se pretende estudar, que não necessariamente relaciona-se com grau de dificuldade, mas sim, com a objetividade e clareza do que se pretende com a questão. Na resolução de problemas o que se espera ser feito em cada questão, vem geralmente, bem especificado para os estudantes, com perguntas precisas, do tipo: Determine..., Encontre...; Por que...; etc. O que está em jogo na resolução de problemas, mais do que os enunciados das questões, e que a diferencia da solução de exercícios rotineiros de aplicação direta de conteúdos trabalhados, são as estratégias para se determinar uma solução, que não são mecânicas, demandando eventualmente a combinação de noções de diferentes domínios do conhecimento matemático. Por outro lado, nas questões presentes em atividades de investigação, os enunciados geralmente apresentam comandos pouco precisos. Caberá aos próprios estudantes trabalharem sobre tais enunciados, procurando extrair dos mesmos, questões potencialmente mais claras, a fim de que estas possam, em seguida, ser transformadas em problemas mais concretos. Por essa razão, dizemos que as investigações matemáticas possuem também uma componente de formulação de problemas, etapa normalmente ausente na resolução de problemas porque já realizada previamente pelo professor.

Outra diferença, não menos importante, se refere às estratégias usadas por esses dois métodos de ensino. Na resolução de problemas o objetivo é encontrar um caminho que conduza à solução ou soluções. No processo investigativo, o objetivo é a compreensão de uma situação, de um contexto problemático. Observe o que Ernest[8] (1991, apud ABRANTES, 1998, p. 30) nos diz a esse respeito:

> A metáfora geográfica é também aplicada ao processo de investigação matemática. "A ênfase está em explorar uma questão da matemática em todas as direcções. O objetivo é a viagem, não o destino." (Pirie, 1987, p.2). Aqui a ênfase está em explorar um terreno desconhecido, mais do que uma viagem com um objetivo específico. Assim, enquanto o processo de resolução de problemas em matemática é descrito como convergente, as investigações matemáticas são divergentes (HMI, 1985).

Além disso, para constituir-se como atividade de investigação, semelhante "*viagem"* deve apresentar-se aos olhos dos estudantes como motivadora e desafiadora. Quer dizer, nem a solução das questões nem o processo de resolução das mesmas estão imediatamente acessíveis aos estudantes. Diferentemente das tarefas propostas pelo modo habitual de ensino-aprendizagem, que possuem um caráter fechado e estruturado, as atividades de investigação trazem questões muito mais abertas, dando liberdade aos estudantes de colocarem suas próprias questões e de estabelecerem o caminho a seguir, dando origem a um processo cíclico de estudo.

> Numa investigação parte-se de uma situação que é preciso compreender ou de um conjunto de dados que é preciso organizar e interpretar. A partir daí formulam-se questões, para as quais se procura fazer conjecturas. O teste dessas conjecturas e a recolha de mais dados pode levar à formulação de novas conjecturas ou à confirmação das conjecturas iniciais. Neste processo podem surgir também novas questões a investigar. (PONTE et al., 1998, p. 16)

Outra característica exclusiva das investigações matemáticas é que, no transcorrer de uma atividade investigativa, os estudantes são continuamente estimulados a justificar e a provar suas afirmações. Nesse processo, surgem duas relevantes

---

[8] ERNEST, P. **Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia.** Tradução do último capítulo (cap. 13) do livro The Philosophy of Mathematics Education, da autoria de Paul Ernest e publicado pela primeira vez em 1991 por The Falmer Press.

conquistas para o ensino de Matemática: a apresentação, por meio de uma linguagem matemática própria, das descobertas iniciais feitas pelos estudantes; e, perante professor e colegas, os mesmos vão desenvolvendo capacidades de argumentação e prova, as quais, segundo o NCTM[9] (Apud ABRANTES, 1999, p.191), constituem *"um dos grandes objetivos educacionais do ensino de Matemática"*. Além disso, ao confrontarem conjecturas e justificativas, no debate com o professor e com os colegas, o trabalho de cada estudante, mesmo possuindo ainda um reduzido grau de complexidade em proporção aos seus conhecimentos, assemelha-se ao trabalho de um matemático e, os integrantes da turma, por sua vez, acabam formando uma pequena comunidade matemática, onde o conhecimento e produções matemáticas se desenvolvem em conjunto.

1.1.3 A preparação de aulas de investigação

Vimos anteriormente, que é característica inerente das atividades investigativas ter por objetivo o desenvolvimento de capacidades intelectuais mais avançadas nos estudantes (como procurar regularidades, formular, testar, provar conjecturas, etc.). Consequentemente, os processos intrínsecos da atividade matemática passam a constituir um dos focos importantes do ensino/aprendizagem. Em decorrência desses fatos podemos perceber que a importância do cumprimento de uma lista estrita e prefixada de conteúdos curriculares passa a ser naturalmente relativizada. Como afirma Lerman, *"A Matemática identifica-se através das formas particulares de raciocínio, da conjecturação, da procura das contradições informais e formais, etc., e não por um 'conteúdo' específico"*. (LERMAN, 1989, apud ABRANTES, 1998, p. 111). Se os programas vigentes na escola forem fortemente centrados nos conteúdos, cabe ao professor achar meios de incluir atividades investigativas que contemplem tal programação. Nem todo tipo de conteúdo poderá ser abordado utilizando-se tal metodologia. A esse respeito comenta Goldenberg[10] (1998, apud ABRANTES et al., 1999, p. 35):

---

[9] NCTM. **Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar (tradução portuguesa da APM do original em inglês de 1989).** Lisboa: APM e IIE, 1991.

[10] GOLDENBERG, E. P. **Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática.** Este texto corresponde à tradução da conferência de Paul Goldenberg, apresentada no Seminário "Investigações na sala de aula", intitulada "Four roles for investigation in the Mathematics classroom".

> Uma coisa em que simplesmente não acredito é que a aprendizagem só se faça através de actividades de investigação e nem sequer me parece que a aprendizagem seja necessariamente e sempre melhor nesse caso do que noutros.

Ao iniciar uma atividade investigativa, o professor tem liberdade para relacioná-la direta ou indiretamente com algum conteúdo do currículo. É sobre ele que recai a decisão de utilizar tarefas de investigação no processo de ensino/aprendizagem. A questão é que a atividade realizada pelo estudante possui um caráter único e particular, e por isso mesmo pode dar origem a outras questões, fazendo-o enveredar por temas diferentes daqueles que o professor inicialmente havia pensado. Como sugere Abrantes et al. (1999, p. 192) *“Não é razoável supor que as questões propostas ao aluno o levarão, necessariamente, a percorrer os mesmos caminhos de quem as gerou”*. Nessa perspectiva, se faz necessário equilibrar o gradativo percurso dos conteúdos previstos no currículo com a aplicação de atividades investigativas. Se por um lado é importante garantir que os estudantes assimilem os conhecimentos fundamentais, por outro, as investigações matemáticas podem propiciar ocasiões significativas para o desenvolvimento da autonomia de pensamento e de questionamentos matemáticos dos estudantes, devido à sua natureza de abertura. E, dessa maneira, os próprios estudantes desenvolverão capacidades para, por si mesmos, complementarem eventuais lacunas de conteúdos que lhes venham a ser necessários posteriormente.

O planejamento de atividades de investigação na sala de aula demanda especial cuidado por parte do professor. Ao se “aventurar” na proposição de atividades investigativas, ele precisa ter consciência que durante a aplicação das atividades lhe será necessária, continuamente, uma postura de abertura frente às mais diferentes solicitações da realidade que está à sua volta (estudantes, exigências curriculares, demandas institucionais, etc.). Começará por ter de selecionar propostas e estabelecer objetivos que levem em consideração as especificidades da turma, bem como, o contexto escolar em que tal proposta surge. Esses objetivos, claramente, deverão estar em conformidade com a faixa etária e o desenvolvimento matemático dos alunos, sabendo que a familiaridade dos estudantes com este tipo de proposta é altamente relevante.

Um dos dilemas frequentemente enfrentados pelos professores de Matemática, ao proporem atividades investigativas, diz respeito ao tempo escolar. Inúmeros fatores podem impor restrições de tempo à realização de tais atividades: o nível de ligação destas com os conteúdos do currículo, o peso relativo que se espera dar perante as demais atividades da classe, a quantidade e a frequência com que estas serão propostas, espaçadamente no decorrer do ano ou com certa proximidade, em pequeno ou grande número. São decisões de certa forma difíceis se considerarmos que a autonomia do professor depende fortemente do contexto escolar no qual está inserido.

> Uma das características da abordagem investigativa, a possibilidade de se seguirem caminhos divergentes, pode levar o professor a seguir pistas que entretanto surgiram e que poderão conduzir à exploração de aspectos que anteriormente não tinha previsto. Numa situação deste tipo, o professor enfrenta o dilema de proporcionar ou não a oportunidade de explorar as várias ideias que foram surgindo. As limitações de tempo e a extensão dos conteúdos curriculares, poderão influenciar uma decisão que entra em contradição com o significado de investigar. De facto, a exploração de uma tarefa, prevista inicialmente para durar uma ou duas aulas, poderá prolongar-se por bastante mais tempo de forma a seguir as várias pistas que foram surgindo. Caberá ao professor decidir sobre a opção que, perante cada situação concreta, considera mais adequada. (ABRANTES et al., 1999, p. 117)

Outra questão frequente é sobre o momento em que tais atividades devem ser propostas aos estudantes, se no início, no decorrer ou ao final de um assunto. A tomada de decisão sobre o momento mais propício dependerá das possíveis articulações a serem estabelecidas com o trabalho já desenvolvido. Mais ainda, é importante preparar-se para a possibilidade de que uma tarefa investigativa possa seguir uma direção imprevista para poder decidir sobre a conveniência de prosseguir com ela ou não, avaliando o grau de pertinência ou dispersão para com os objetivos pretendidos.

Não se pode esquecer que criar ou mesmo reformular uma proposta de investigação demanda tempo e requer do professor uma atitude também investigativa. Naturalmente, por falta de experiência, por estar diante de algo novo, até mesmo por lhe faltarem os materiais necessários para a execução da tarefa, este pode ser acometido por momentos de grande insegurança frente a tais atividades. Se tais inseguranças não forem administradas, elas poderão, segundo Ponte et al. (1998, p. 18), *"[...] constituir obstáculos senão intransponíveis, pelo menos limitantes ao desenvolvimento deste tipo de actividade".*

Na intenção de oferecer uma contribuição aos diferentes aspectos acerca da criação/elaboração de atividades de investigação até aqui levantados, e levando em conta que embora isso possa iniciar-se mediante condições muito distintas, existem situações evidentemente mais ricas e potencialmente mais favoráveis de serem propostas. Apresentamos, a seguir, uma seleção de cuidados a se ter em conta na escolha de tarefas investigativas, explicitados por Ollerton[11] (apud PONTE et al., 1998).

> Uma parte importante da minha planificação tem a ver com o encontrar tarefas que:
>
> - sejam um começo apropriado para todos na aula trabalharem;
> - forneçam oportunidades ricas para muitos desenvolvimentos;
> - possibilitem que sejam trabalhadas uma variedade de competências de conteúdo;
> - criem oportunidades para os alunos explorarem ideias e colocarem questões;
> - apoiem diferentes tipos de intervenções do professor desde o colocar questões ao explicar e expor;
> - permitam aos alunos tomar a maior parte da responsabilidade no seu desenvolvimento;
> - tenham uma variedade de resultados, alguns dos quais podem ser inesperados;
> - permitam que o conteúdo seja processado;
> - extraiam contextos transcurriculares “reais”, tais como usar de informação de um jornal, ou contextos de resolução de problemas;
> - sempre que possível tenham um começo prático de forma a prover experiências concretas a partir das quais abstracções possam ser feitas. (p. 64) (PONTE et al., 1998, p. 18)

Vale destacar o cuidado sugerido pelo autor a respeito da adequação das questões iniciais a serem propostas, no sentido de se estabelecer um cenário favorável não só ao desenvolvimento de múltiplas abordagens por parte dos estudantes, como também, à colocação de diferentes questões pelos mesmos. Corroborando com esta posição, Lampert[12] (1990, apud PONTE et al., 1998, p. 19) comenta que dentre os critérios mais relevantes para a seleção de um problema, está o fato deste levar todos os estudantes a elaborarem e testarem conjecturas, as quais, por sua vez, deverão ser posteriormente discutidas com toda a turma para a verificação de sua validade, completando-se com uma generalização dedutiva o que tenha sido observado indutivamente pelos estudantes.

---

[11] OLLERTON, M. **Contexts and strategies for learning mathematics.** In M. Selinger (Ed.), *Teaching mathematics* (pp. 63-72). London: The Open University, 1994.

[12] LAMPERT, M. **When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and Teaching.** American Educational Research Journal, Vol. 27, Nº 1, pp. 29-63, 1990.

1.1.4 A realização de aulas de investigação

Concluída a etapa de seleção e identificação da situação a ser proposta aos estudantes, seguimos ao planejamento propriamente dito da aula. Nesta etapa, não menos importante que a anterior, são enfrentadas questões relacionadas à organização e gestão da aula.

A natureza da tarefa a ser proposta e os objetivos traçados pelo professor para a mesma, certamente influenciarão decisões relativas ao modo de trabalho a ser escolhido. Os estudantes trabalharão individualmente ou em grupos? Se forem em grupos, qual a melhor maneira para criá-los? Em duplas, trios, etc.? Haverá momentos de trabalho com toda a turma junta? Tais decisões são relevantes tendo em vista influenciarem um outro ponto de extrema importância numa atividade investigativa, a previsão do tempo de duração da atividade. Em uma única aula é possível realizar a investigação? Serão necessárias aulas duplas? Levando-se em conta uma determinada tarefa, os estudantes conseguiriam ficar interessados por essa por quanto tempo? Tais decisões adquirirão tanto mais importância quanto menor for a experiência do professor para com atividades desta natureza.

Segundo a proposta de trabalho desenvolvida pela equipe do projeto MPT, a estrutura de uma aula onde são utilizadas investigações matemáticas é, basicamente, composta por três etapas.

- Um primeiro momento de motivação e introdução da tarefa pelo professor, que pode ser um esclarecimento ou uma orientação ou uma apresentação de regras a respeito do trabalho a iniciar, seguido dos primeiros enfrentamentos, por parte dos estudantes, da situação proposta (interpretação e determinação do caminho a seguir);
- Em seguida, acontece a realização da tarefa em si. Neste momento, o professor procura interagir individualmente ou em pequenos grupos, acompanhando o trabalho que está sendo realizado;
- Em último lugar, encontra-se a discussão final. Momento no qual os estudantes apresentam os resultados obtidos, as diferentes estratégias utilizadas e faz-se uma comparação das distintas interpretações dadas à

tarefa. É bastante provável que, neste momento, surjam ainda novas questões, as quais poderão constituir objeto para futuras investigações.

A seguir, são apresentados os detalhes de cada uma dessas etapas.

A primeira delas, de responsabilidade do professor, é a introdução da tarefa aos estudantes. Trata-se do momento onde o professor fala com a turma a respeito das atividades a serem desenvolvidas. Certamente, é uma das fases mais importantes da aula, pois a depender da maneira como tudo começa, pode influenciar decisivamente o sucesso de todo trabalho. Nesta fase, são comunicados os objetivos da investigação, procurando esclarecer detalhes da tarefa e explicitar o tipo de trabalho a ser desenvolvido. Também é o momento em que se deve procurar instaurar um ambiente propício ao trabalho investigativo, criando um clima favorável, motivador ao desenvolvimento do trabalho dos estudantes. Além disso, é apresentado o que se espera do andamento da mesma no que diz respeito às regras e condições que os estudantes deverão cumprir ao longo de todo o desenvolvimento da aula. Se o momento de introdução da tarefa não for bem cuidado, feito de maneira clara, com informações essenciais, é possível que o andamento da mesma não seja condizente com aquele esperado.

A apresentação da proposta aos estudantes pode acontecer de modos distintos, por meio de uma apresentação oral, ou a partir da entrega de uma folha contendo as diretrizes da tarefa a ser desenvolvida, ou até mesmo de um modo misto, utilizando-se as duas formas anteriores. É importante observar que se, nessa fase, o professor tecer muitos comentários, muitas explicações, aspectos essenciais do trabalho investigativo poderão ser perdidos. Em contrapartida, se o mesmo apresentar poucas considerações a respeito da tarefa proposta, potenciais obstáculos ou dificuldades poderão aparecer, influenciando o andamento e a conquista da meta inicialmente traçada.

Se o professor optar por entregar, no início da aula, apenas uma folha contendo as instruções da tarefa a ser desenvolvida, isso poderá demandar do mesmo um maior acompanhamento dos diferentes grupos no intuito de esclarecer o que se pretende investigar. Neste caso, o nível de autonomia de cada grupo será tanto maior, quanto mais claras e melhor escritas forem os comandos propostos nas atividades. Não obstante, uma maior independência dos estudantes em relação ao professor e uma maior facilidade na interpretação dos diferentes enunciados naturalmente surgem à medida que tais experiências são repetidas e repropostas.

É ainda nesta fase, que o professor escolhe as questões às quais pode dar uma ajuda, no sentido de um esclarecimento, e aquelas cuja realização, primordialmente, fica ao encargo de cada grupo de trabalho.

Tendo sido feita a introdução da tarefa, a segunda fase da aula com investigações é a realização propriamente dita da aula, o seu desenvolvimento. O ponto crucial desta fase está na atividade a ser desenvolvida pelos estudantes, na valorização, acompanhamento e verificação de suas ideias e pesquisas. Deve-se, portanto, propiciar no transcorrer dessa fase, o desenvolvimento de uma atitude investigativa em todos os estudantes.

> [...] num ambiente de uma aula com investigações, deve privilegiar-se o desenvolvimento de atitudes questionadoras, a observação e análise de situações, a formulação de conjecturas, a procura de explicações e de argumentações, onde a criatividade e o desenvolvimento de ideias próprias têm um papel muito importante. (ABRANTES et al., 1999, p. 90)

Um aspecto de grande relevância nessa fase são as diferentes interações existentes entre professor e estudante e entre estudante e estudante. Diferentemente do que se vê em uma aula tradicional, o diálogo que na maior parte das vezes é conduzido estritamente pelo professor e caracterizado por uma dinâmica de respostas imediatas a perguntas fechadas, é substituído numa aula com investigações matemáticas por uma nova dinâmica de interações. De fato, mediante propostas que se limitam à resolução de exercícios rotineiros da matéria dada, aquele tipo de interação é de certo modo natural, mas quando se oferecem aos estudantes experiências matemáticas mais interessantes, outro ambiente de aprendizagem e uma nova concepção do ensino são necessários.

Interações professor – aluno

O bom desenvolvimento de uma aula com investigações matemáticas está estritamente ligado à atuação do professor perante seus estudantes. Por meio de diferentes intervenções, o professor fornece indicações e certo apoio sobre o trabalho que está sendo desempenhado pelos estudantes.

Um ponto de extrema importância durante essas atividades é o ambiente de aprendizagem fomentado pelo professor através das suas intervenções. Se durante o desenvolvimento de uma aula com investigações, o professor tiver o hábito de confirmar soluções encontradas pelos estudantes, ou deixar transparecer para os mesmos que ele já sabe o que irá acontecer nas etapas sucessivas e, por isso mesmo, deixar transparecer a intenção de chegar a um determinado ponto do trabalho, pode acontecer dos estudantes pensarem que o “saber”, ao invés de estar sendo descoberto e construído por eles, ainda se encontre centrado no professor.

Não estamos aqui insinuando uma posição contrária às intervenções do professor, mas a questão de fundo que se coloca é o modo sutil ou discreto com o qual tais intervenções podem ser feitas. Por exemplo, ao invés de serem dadas indicações diretas, um sorriso, um comentário feito em um tom mais entusiástico ou até mesmo uma hesitação diante de uma resposta, podem passar mensagens implícitas como “muito bem”, “é isso mesmo”, “pode continuar, é por aí mesmo” ou mesmo, “não, acho que não é por aí...”. Importante, nesse ponto do trabalho, é compreender que justamente por meio das diferentes intervenções do professor os estudantes vão aprendendo o que realmente são as atividades investigativas ao mesmo tempo em que vai se configurando uma nova imagem do papel do professor em suas cabeças.

A depender dos diferentes grupos formados durante a aula, as interações entre o professor e os mesmos acontecerão também de forma diferente. O professor pode se deparar com grupos que possuam dificuldades no momento inicial, ou grupos cujo espírito investigativo os faça enveredar por caminhos ainda impróprios para os seus conhecimentos matemáticos.

Em síntese, com base nos autores estudados, apresentamos a seguir alguns exemplos de como as interações professor-aluno podem se dar na prática, bem como, a relevância de cada uma.

- Estímulo ao confronto de opiniões

O confronto de opiniões é de extrema importância em um trabalho investigativo. A partir desse confronto é que vem à tona uma maior maturidade matemática nos estudantes. É o momento de rever ou confirmar determinadas conclusões a que se chegou no desenrolar da atividade. Características desse tipo de confronto se dão a partir de estímulos como: *"O que te leva a pensar isso?"; "Por que não concordas com a ideia do teu colega?"; "Discutam as duas hipóteses, a tua e a dela pela ordem que vocês quiserem"*. (ABRANTES et al., 1999, p. 91)

- Incentivo ao senso crítico, à reflexão e à argumentação

O confronto de opiniões faz desencadear uma série de reflexões e reconsiderações a respeito do próprio pensamento ou argumento. O estudante é levado a amadurecer sua capacidade crítica frente aos problemas que lhes aparecem. O professor deve estar atento, pois é muito comum aparecerem perguntas do tipo 'Professor, está certo?' ou 'Professor, é assim?', e é justamente nesse momento que os estudantes são chamados a adquirir uma capacidade crítica que os permita, por si só, decidir sobre a validade de suas ideias. Por isso, ao invés de dar respostas a essas questões, estimularão muito mais fortemente à reflexão e à capacidade argumentativa, perguntas como: *"O que te leva a crer que isso é verdade?"*; *"Porque pensas que esse é um bom caminho"*, além de ser uma maneira implícita de fazer os estudantes se acostumarem com a ideia de que o trabalho investigativo é dele. (ABRANTES et al., 1999, p. 91)

- Informações pertinentes

Durante o desenvolvimento do trabalho realizado pelos estudantes, alguns comentários, a título de informação e esclarecimento, que venham dar suporte a um melhor encaminhamento do trabalho, podem ser de grande relevância. Por exemplo: *"Experimenta para ver o que dá"*; *"Bom, não quer dizer que seja assim tão aleatoriamente, se calhar há aí uma maneira de descobrir... mas assim como está é difícil."*; *"Isso que estavas a dizer, não, mas continuem a ver o que é que se passa nas diagonais como estavam a ver. Depois parece-me que há aí umas diagonais especiais, parece-me, mas..."*; *"Será que é sempre assim?"*; *"Não sei. Nunca experimentei dessa forma. Tens de averiguar."* (ABRANTES et al., 1999, p. 91)

- Aproveitamento do erro e motivação

É muito comum ao longo de uma atividade investigativa, os estudantes caírem em caminhos que não os levarão a lugar algum dentro da tarefa. Porém, antes de mencionar uma ou outra pista de que estão errados, é importante que o professor espere certo tempo a fim de que os próprios estudantes possam entender que estão errados. Contudo, não é bom que o professor espere tempo demais sem dar nenhuma indicação direta, pois a dificuldade pode se tornar um fator desestimulante para os estudantes.

Dentre as várias interações que podem ocorrer no interior de uma aula com investigações matemáticas, boa parte delas pode ser de iniciativa do próprio professor sendo, na maior parte das vezes, com o objetivo de solicitar esclarecimentos ou explicações dos estudantes sobre suas ações, o restante surge por iniciativa dos estudantes. Estes, em muitos momentos, solicitam a presença do professor para esclarecer dúvidas ligadas ao conteúdo, para que valide o trabalho até o momento realizado, para que apoie ideias e administre determinados conflitos que venham aparecer.

Nesse emaranhado de interações, é fundamental que o professor mantenha uma atitude questionadora, que não aceite respostas simplórias, sem qualificação alguma, que estimule nos estudantes uma posição crítica, levando-os a uma habitual posição de questionamento, de procura de razões, de estabelecimento de relações com outros assuntos, que seja exigente solicitando sempre o "porque" das argumentações e provocando assim, o raciocínio dos mesmos. Nesse sentido, outras questões a compor esse conjunto de interações podem se apresentar da seguinte forma: *"Como explicam isso?; O que há de semelhante nessas situações?; Qual a relação entre essas ideias?; O que isso quer dizer?; Qual o significado desse resultado?; Porque é que dizes que não poderá ser...?"*. (ABRANTES et al., 1999, p. 91)

Interações aluno-aluno

Também são importantes as diferentes interações ocorridas entre os próprios estudantes. A defesa de seus argumentos, a discussão dentro do grupo, são todas ações que os levam a reverem os seus conhecimentos e a clarificarem suas impressões. Com efeito, é no confronto de ideias e no contínuo exercício de se colocar e ouvir que vão sendo reformulados, corrigidos e confirmados os diferentes posicionamentos, impressões e as certezas surgidas ao longo do trabalho investigativo.

> A interacção aluno-aluno, tende a ser muito mais forte numa aula com investigações. Esta interacção estimula os alunos a descobrir novas relações entre conceitos, proporcionando-lhes mais segurança nas suas ideias matemáticas. Por outro lado, estimula o raciocínio, a criatividade e o poder de argumentação. (ABRANTES et al., 1999, p. 93)

A terceira e última etapa de uma aula com investigações é a discussão final feita pelos estudantes e com os estudantes.

Esse é o momento onde os diferentes grupos de trabalho terão a oportunidade de mostrarem suas conclusões aos demais integrantes da classe, submetendo as próprias conclusões ao parecer de outros e dispostos a se deparar com pontos de vista que venham a corroborar com aqueles encontrados durantes as investigações ou até mesmo complementá-los ou refutá-los.

O momento da discussão final é de suma importância em um trabalho investigativo, pois é nesse momento em que sistematizações e consolidações do aprendizado podem ocorrer.

De preferência, esse momento de discussão, é mais bem aproveitado e surte maiores efeitos quando são inseridos logo após as atividades investigativas acontecerem. De preferência, na aula seguinte àquela em que aconteceram as investigações. Se ficar muito distante é muito provável que os próprios estudantes tenham já esquecido conclusões ou aspectos discutidos durante os trabalhos em grupo.

Ensinar a escutar o outro que se coloca também faz parte desse momento. Geralmente os estudantes querem falar todos ao mesmo tempo não permitindo, portanto, que se instaure uma discussão sadia e construtora dentro da aula.

1.2 Reflexões iniciais sobre dificuldades na introdução aos números irracionais no Ensino Fundamental

No presente tópico, são levantadas algumas reflexões visando possibilitar uma melhor compreensão da problemática relativa à introdução dos números irracionais ao final do Ensino Fundamental. Convém perguntarmo-nos: ‘De que modo poderia se iniciar uma abordagem significativa sobre os números irracionais?’ ou ‘Por onde começar?', 'Que aspectos dos números irracionais são pertinentes e possíveis de serem tratados em turmas de Ensino Fundamental?'.

Uma maneira interessante de iniciar essa abordagem seria levar os estudantes a "sentirem" a necessidade de um novo número, perceberem que os números racionais são insuficientes para solucionar determinados problemas. Como diz Corbo:

> Esse é o desafio: como proporcionar, ou, como oferecer aos alunos a oportunidade do impasse que provoca a percepção da insuficiência dos números racionais para resolver certos problemas, havendo, pois, necessidade de alargar esses conhecimentos, pelo acréscimo de um novo conceito – neste caso, um novo tipo de número – o irracional? (CORBO, 2012, p.15)

Um clássico exemplo de onde aparece esse *impasse* é no cálculo da medida da diagonal de um quadrado de lado unitário. Para obter-se tal medida bastam o conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras e sobre a extração de raízes quadradas de números racionais não negativos – temas próprios dos anos finais do Ensino Fundamental. Contudo, chegar ao impasse desejado nesse nível de escolaridade, ou seja, que os estudantes compreendam que a medida da referida diagonal ($\sqrt{2}$) é um novo tipo de número, constitui-se um desafio didático não elementar. Tradicionalmente, para resolver esse problema utiliza-se o Teorema Fundamental da Aritmética (sobre a fatoração em primos dos números naturais) e um raciocínio por absurdo. Contudo, a existência e unicidade da fatoração dos números naturais em fatores primos (a menos da ordem dos fatores) não constitui, a nosso ver, conhecimento acessível a essa faixa etária. Trata-se de uma prova cuja apropriação significativa é esperada para estudantes de Ensino Médio.

Historicamente, o impasse sobre a medida da diagonal de um quadrado surgiu na Grécia Antiga, com a constatação da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do mesmo. A discussão dedutiva rigorosa da prova feita pelos gregos é demasiadamente avançada para o Ensino Fundamental, ou até mesmo no Ensino Médio, por envolver um uso muito avançado de linguagem algébrica, noções sobre congruência de triângulos e limites de sequências numéricas. Porém, uma discussão geométrica indutiva, não formal, nos moldes do pensamento desenvolvido pelos gregos, pode permitir a estudantes de 8º ano a percepção da mencionada incomensurabilidade. Para tanto, é necessário que se discuta e se trabalhe previamente certas propriedades envolvendo o Teorema de Pitágoras, a soma dos ângulos internos de um triângulo, propriedades dos retângulos e propriedades de simetria de reflexão de uma figura geométrica. No capítulo 2, tópico 2.3, apresentamos uma possível abordagem para esse tema.

Outra forma de propiciar tal *impasse* é pela proposta de situações que envolvam o número de ouro, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618\ldots$. Sabe-se que tal número é utilizado na modelagem de várias situações da natureza e que aproximações do mesmo são encontradas em obras de arte e na arquitetura, fornecendo contextos interessantes, variados e significativos para a sua introdução em âmbito escolar. Foi justamente por esse caminho que começamos nossa pesquisa (ver mais detalhes no capítulo 2, tópico 2.1). Ao buscarmos modos de introduzir o número de ouro no oitavo ano vimos que a abordagem usual do mesmo exige o conhecimento de alguns assuntos ainda não vistos pelos estudantes, como é o caso da semelhança de polígonos, da resolução de uma equação do segundo grau e produtos notáveis, por exemplo. Vale ainda ressaltar que mesmo contornando as dificuldades apontadas, a prova da irracionalidade deste número recai sobre a mesma problemática já descrita para $\sqrt{2}$.

A proposição de situações, como as expostas acima, certamente conduziria a uma aproximação mais amigável dos estudantes aos números irracionais. Entretanto, tendo em vista todo o aparato teórico necessário, esse caminho, embora interessante, não se mostra muito factível na prática. Assim, não diminuindo o valor de uma abordagem mais história e contextualizada, partilhamos da posição de Corbo (2012) que um bom caminho a ser trilhado para se iniciar o ensino dos números irracionais seja por meio de um estudo detalhado envolvendo os números racionais.

> [...] a compreensão e apropriação do conceito de número irracional constitui etapa essencial para a ampliação da ideia de número, pois propicia – senão exige – a retomada e, de certa forma, em alguns casos, a reelaboração de noções concernentes ao número racional, como processo indispensável à construção do conceito de número real. (CORBO, 2012, p.14)

Com efeito, no âmbito dessa abordagem, onde uma *retomada* e uma *reelaboração* são exigidas, a atenção deve voltar-se à demonstração do seguinte fato sobre os números racionais: *“Todo número é representável por uma fração se, e somente se,* *sua representação decimal for finita ou infinita periódica".* É possível propor uma forma acessível que leve os estudantes a se convencerem desta afirmação, recuperando-se o conceito de fração e de representação decimal de um número, bem como o algoritmo da divisão para observar os possíveis restos nas divisões de um número inteiro por outro, não nulo. Obtém-se, portanto, a deixa para afirmar que "números" (no sentido de serem medidas de segmentos, por exemplo) que não admitem representação decimal finita ou infinita e periódica, por não serem representáveis por frações (razões), serem chamados de números irracionais (não razões). Restam assim, as questões da necessidade e da existência de tais números.

Portanto, nesse momento, cabe perguntar aos estudantes o que se pode dizer de números como: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ e π. Uma atividade investigativa interessante é fazer os estudantes buscarem determinar o valor dessas raízes com o uso de uma calculadora simples para que, com isso, eles tenham indícios de que não aparece período algum até o limite da paciência deles e do visor da calculadora. Sem deixar de apontar que tal atividade não comprova que a representação decimal desses números não é finita ou infinita periódica e, portanto, que eles não podem ser representados por frações. Demonstrar isso no Ensino Fundamental é algo mais difícil e pode ser deixado para o Ensino Médio pois, provar que a representação decimal de alguns números é efetivamente infinita e não periódica depende de conseguir demonstrar a incomensurabilidade de segmentos ou usar o Teorema Fundamental da Aritmética em provas por absurdo.

Apresentamos, por fim, um elenco de outros aspectos que julgamos extremamente importantes e pertinentes no ensino dos números irracionais e que demonstram, ainda com maior razão, a não trivialidade da abordagem deste assunto: garantir a eles o caráter efetivo de número pelo fato de poderem ser associados a medidas de segmentos; mostrar que todos eles possuem uma localização precisa na reta numerada; discutir a biunivocidade entre os pontos de uma reta e os números reais; vivenciar a infinidade e a questão da densidade de tais números.

Pommer, também sugere a necessidade de um trabalho investigativo para o ensino dos números irracionais, pois reconhece a não trivialidade desse assunto tanto para professores quanto para alunos.

> Vale relembrar que os números irracionais, tema desta pesquisa, representam uma ideia matemática sofisticada, não trivial e pouco intuitiva, dificultando a abordagem deste assunto em sala de aula. Esta intrínseca característica teórica remete a uma necessária busca de recursos didáticos e epistemológicos para discutir a problemática de introduzir esse campo numérico de modo significativo, no ensino básico. (POMMER, 2012, p.24)

Assim, concluímos com este trecho de D'Ambrósio (1986) que, a nosso ver, sintetiza de forma exemplar, o cerne da questão metodológica:

> [é preciso] mudar a ênfase do conteúdo e da quantidade de conhecimentos para uma ênfase na metodologia que desenvolva atitude, capacidade de matematizar situações reais, (…) que permita identificar o tipo de informação adequada… e encontrar os conteúdos e métodos adequados. (D'Ambrosio apud ABRANTES, 1995, p.63)

Capítulo 2 – Fundamentos teóricos do ensino dos números irracionais e algumas dificuldades em nível do Ensino Fundamental

Em concordância com a dinâmica de trabalho realizada por pesquisadores e professores ligados ao Projeto Matemática Para Todos – MPT, citada no início do capítulo anterior, apresentamos neste capítulo os diferentes aspectos do percurso trilhado ao longo do planejamento e da elaboração das atividades propostas aos estudantes nas diferentes etapas do trabalho de pesquisa realizado. Nosso objetivo foi buscar não só abordagens adequadas do ponto de vista matemático, mas também acessíveis ao nível de escolaridade dos estudantes. Convém destacar o quanto tal planejamento e elaboração foram permeados por contínuos diálogos, com a professora orientadora, acompanhados de constantes ajustes em cada etapa de seu desenvolvimento.

Ao pensarmos em abordar os números irracionais utilizando investigações matemáticas, tivemos de enfrentar desde o início, problemas relacionados à programação prevista pela escola para a área de Matemática no oitavo ano. Deparamo-nos com passagens delicadas que demandavam o domínio de conhecimentos prévios não trabalhados no sétimo ano e não necessariamente óbvios aos professores. Nosso intuito foi encontrar abordagens matematicamente corretas de tópicos “difíceis”, que garantissem a vivência dos estudantes com as ideias fundamentais envolvidas, mesmo que de maneira informal sempre que julgamos necessário para favorecer a percepção das mesmas por estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental. Com isso, visamos tratar – de um modo sugestivo, significativo e mais completo – diferentes passagens envolvidas no ensino dos números irracionais naquele nível escolar, cujo tratamento usual costuma ser incompleto e superficial podendo até, em muitos casos, induzir a concepções errôneas sobre os mesmos. Dessa forma, pareceu-nos pertinente apresentar neste capítulo não só os diferentes tópicos de conteúdo que necessitaram ser enfrentados, dadas suas complexidades, mas também aqueles acessíveis que, em geral, não são abordados em nos livros didáticos ou mesmo nas escolas.

Na primeira etapa desta pesquisa, durante o planejamento das atividades a serem propostas aos estudantes, tínhamos pensado em introduzir os números irracionais apresentando um número específico, a saber, o número de ouro. Já era de nosso conhecimento que tal número é associado de forma recorrente a diversos trabalhos arquitetônicos e artísticos desde a antiguidade, além de ser associado, em estudos mais atuais, a fenômenos da natureza. Nesse sentido, procuramos aprofundar nossos estudos sobre o retângulo áureo, supondo que esse elemento geométrico contribuiria com os fins esperados para a atividade e, notadamente, para a motivação de introdução dos irracionais. Vimos que partindo da definição de retângulo áureo poderíamos chegar ao número de ouro, mas para isso, deveríamos resolver uma equação do segundo grau, a qual é geralmente estudada no nono ano do Ensino Fundamental. Para contornar esse primeiro obstáculo, buscamos outro caminho que possibilitasse chegar àquele número sem envolver uma equação de segundo grau. No tópico 2.1, a seguir, apresentamos de que maneira isso foi conseguido.

No tópico 2.2, referente à segunda etapa do planejamento, discorremos sobre questões que tivemos de enfrentar relacionadas à abordagem dos números racionais. Inicialmente tratamos das dificuldades geralmente ocultas no trato usual da determinação da fração geratriz de uma dízima periódica e de números com finitas casas decimais após a vírgula. Nossa investigação nos levou a identificar como omissões, nas abordagens escolares usuais dessa questão, a retomada ou a fixação da "notação polinomial" dos números decimais (ou seja, a representação do número como uma soma de potências de 10 com expoentes inteiros multiplicadas por algarismos de 0 a 9) e a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, necessárias para a determinação da fração geratriz de uma dízima periódica. Em seguida, tratamos de algumas questões conceituais acessíveis, mas que, geralmente, não são trabalhadas durante o estudo dos números racionais, dentre as quais destacamos: o fato de que toda fração possui uma representação decimal finita ou infinita e periódica e um resultado relativo à comensurabilidade entre segmentos, a saber, que dados um segmento $\overline{AB}$ qualquer e um segmento unitário $\overline{CD}$ ($CD = 1$), teremos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ comensuráveis se, e somente se, a medida AB puder ser representada por uma fração. (Ao longo de toda esta dissertação adotamos a notação: $AB = med(\overline{AB})$).

Finalizando este capítulo, no item 2.3, mostramos o resultado de nossa investigação sobre a possibilidade de abordar em sala de aula a questão da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado. Formulamos uma prova que contempla as ideias fundamentais presentes na demonstração herdada dos gregos e que, a nosso ver, é acessível a estudantes de oitavo ano, por não enfatizar uma técnica formal e utilizar apenas conhecimentos em princípio já assimilados pelos mesmos. Ou seja, conseguimos contornar o uso de pré-requisitos avançados e algumas dificuldades usualmente presentes na demonstração, tais como: o uso excessivo de notação algébrica, os casos de congruência de triângulos e o uso da definição de limite. Uma demonstração formal desta prova pode ser encontrada em CORBO (2012, pp. 129 a 132) onde a autora apresenta dois tipos de demonstrações para este fato, ambas baseadas em raciocínios por absurdo, sendo que na primeira prevalecem os aspectos algébricos e na outra são priorizados argumentos geométricos.

2.1 Construção do retângulo áureo

Inicialmente, a questão que nos acompanhou durante muito tempo foi a de encontrar uma “boa” provocação que despertasse nos estudantes a necessidade de um novo tipo de número. Quando falamos “boa” provocação, entendemos uma atividade que fosse capaz não só de instigar a curiosidade dos estudantes, como também de tornar pertinente e significativo aquele objeto de estudo aos seus olhos.

Foi assim que surgiu a ideia de trabalharmos com o número de ouro. Pensando nas inúmeras aproximações do mesmo encontradas na natureza, em obras de arte e na arquitetura, imaginamos que fosse mais motivador aos estudantes entrar em contato com os números irracionais a partir desse número.

É interessante notar que, apenas ter a ideia de se trabalhar com o número de ouro, por si só, não nos dava os subsídios necessários para criar as referidas atividades. Como proceder? Que atividades criar? Por onde começar? Depois de um considerável tempo de levantamento de hipóteses, e de busca de situações reais, tradicionalmente modeladas pelo número de ouro, acabamos decidindo apresentar esse número a partir do estudo do retângulo áureo, retângulo este comumente associado a diversas obras arquitetônicas e de arte por se considerar que possua uma harmonia especial.

De certa forma, a escolha deste caminho metodológico, inevitavelmente solicitou-nos enfrentar alguns problemas iniciais como veremos a seguir.

Dizemos que um retângulo é áureo se seus lados não paralelos não forem congruentes e se, sempre que o decompomos na união de um quadrado com um retângulo, este último for semelhante ao retângulo original. Chamamos de razão áurea à razão de semelhança entre esses retângulos.

Em outros termos, iniciamos com um retângulo $ABCD$ e o decompomos em um quadrado $ABFE$ e em um retângulo $EFCD$, como na figura abaixo. O retângulo $ABCD$ será áureo se:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{FC}$$

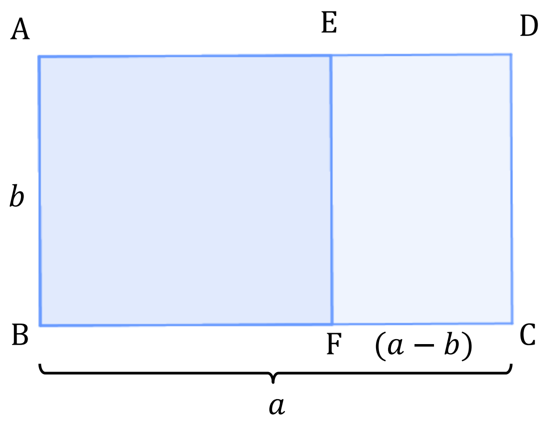


Figura 2 – Retângulo áureo

Substituindo-se as medidas $AB = CD = b$ e $BC = a$, dos respectivos segmentos, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

E disso, segue-se que:

$$a^2 - ab = b^2$$

Agrupando-se todos os termos no primeiro membro da equação acima e, dividindo-se ambos os membros, por b^2 (observe que $b \neq 0$), teremos a equação:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

cuja solução é:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Dessa forma, observamos que a razão áurea procurada, entre a medida do lado maior do retângulo $ABCD$ e a medida do lado menor do mesmo, é a raiz de uma equação do 2º grau, cuja abordagem não costuma ser feita em turmas de oitavo ano.

Com isso, tivemos que procurar uma outra estratégia a fim de obter a razão áurea sem passar pela resolução da referida equação do 2º grau.

Após algum tempo de discussões e pesquisas, percebemos uma possibilidade de chegar à razão áurea por meio da construção do retângulo áureo com régua e compasso.

Nessa segunda abordagem, tal construção inicia-se com um quadrado $ABCD$ cujo lado mede b.

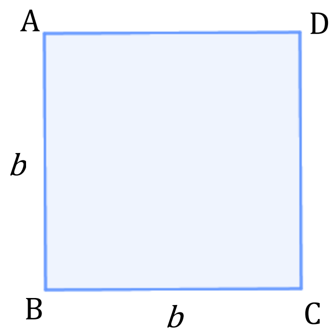


Figura 3 – Construção do Retângulo Áureo (1º passo)

Em seguida, toma-se o ponto médio M, do lado $\overline{BC}$ e, a partir deste ponto, traça-se o segmento $\overline{MD}$. Com um compasso centrado em M e abertura MD, descreve-se um arco de circunferência que encontrará o prolongamento do lado $\overline{BC}$ no ponto P. Vide figura a seguir.

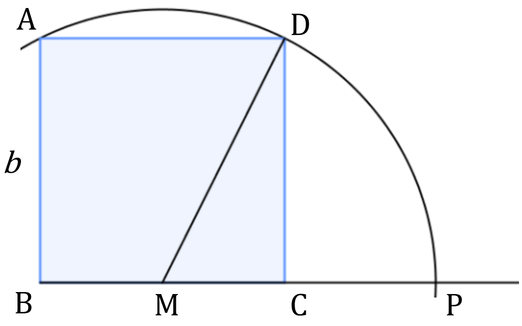


Figura 4 – Construção do Retângulo Áureo (2º passo)

Em seguida, traça-se por P uma reta r perpendicular à reta que passa pelos pontos B e C. Feito isso, traçamos por A (e por D) a reta s, paralela à reta determinada pelos pontos B e C, como na figura 5. Chamando-se de Q o ponto de intersecção das retas r e s, determina-se, o retângulo $ABPQ$, que é áureo como será visto em seguida.

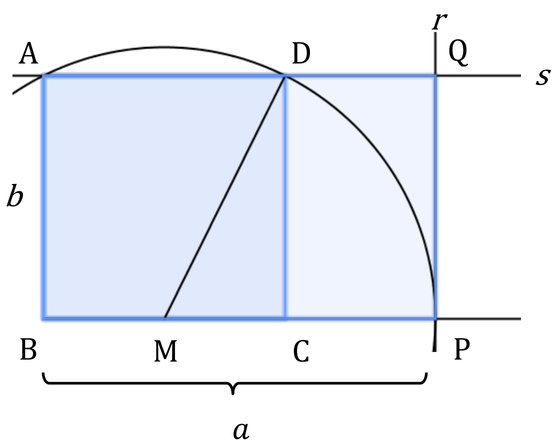


Figura 5 – Construção do Retângulo Áureo (3º passo)

Observando-se o triângulo CDM, vemos que o mesmo é retângulo em C e, portanto, utilizando-se o teorema de Pitágoras, temos:

$$(MD)^2 = (MC)^2 + (CD)^2$$

Substituindo-se os valores das respectivas medidas nos segmentos acima, obtemos:

$$(MD)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{4b^2}{4} = \frac{(1+4)b^2}{4} = \frac{5b^2}{4}$$

Donde segue-se que: $MD = \frac{b\sqrt{5}}{2}$.

Ora, sendo $MP = MD$, e chamando-se a medida da base BP de a, temos:

$$BP = BM + MP,$$

o que nos leva a:

$$a = \frac{b}{2} + \frac{b\sqrt{5}}{2}$$

ou seja,

$$a = \frac{b\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

E dividindo-se os dois termos dessa última equação por b, concluímos que:

$$\frac{BP}{AB} = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (1)$$

Com isso, vemos que o quociente entre a medida da base e a medida da altura do retângulo $ABPQ$, resulta na razão áurea. Além disso, não foi necessária a resolução de qualquer equação do 2º grau neste desenvolvimento.

Por fim, resta-nos ainda mostrar que o retângulo menor é semelhante ao maior. Para tanto, calcularemos o valor da razão entre os comprimentos do maior lado e do menor lado no retângulo $CPQD$. Vide Figura 5.

Sendo $PQ = b$ e $CP = a - b$, temos:

$$\frac{PQ}{CP} = \frac{b}{a-b}$$

Dividindo-se por b (observe que $b \neq 0$), o segundo membro dessa última equação, chegamos ao seguinte:

$$\frac{PQ}{CP} = \frac{b}{a-b} = \frac{1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (2)$$

Assim, com base nas equações (1) e (2), podemos perceber que a construção feita efetivamente gera um retângulo áureo. Logo,

$$\frac{BP}{PQ} = \frac{PQ}{CP}$$

Com este resultado pudemos perceber que utilizando apenas o Teorema de Pitágoras, a extração de raízes quadradas de números naturais, operações com frações e a propriedade distributiva entre números reais, é possível obter a razão áurea sem a necessidade de resolver quaisquer equações de 2º grau, como na primeira abordagem.

Essa descoberta levou-nos a buscar uma sequência de atividades prévias ao trabalho com o número áureo, onde as noções apontadas no parágrafo anterior fossem discutidas, de maneira a favorecer aos estudantes o domínio desses pré-requisitos.

Entretanto, a determinação do tipo de atividade que deveríamos propor aos estudantes mostrou ser um desafio não trivial desde o início. De fato, criar uma situação de impasse, capaz de desencadear nos estudantes a necessidade de um novo número, não é tarefa simples. Na tentativa de buscar experiências práticas relacionadas ao número de ouro com tal intuito, vimos que todas as atividades experimentais que conseguíamos imaginar envolviam comparações de medidas obtidas em, por exemplo, obras de arte, partes do corpo humano, reproduções de obras arquitetônicas ou na natureza. Assim, necessariamente, todas as razões obtidas seriam sempre resultados de medidas concretas e, portanto, apenas aproximações dadas por números racionais. Percebemos, com isso, que a referida situação de impasse não aconteceria naturalmente a partir de medições concretas. E mais, concluímos que seria artificial usar atividades empíricas para fazer surgir a noção de número irracional, conceito estritamente abstrato, já que em situações de realidade só é possível utilizar-se aproximações racionais de medidas cujo valor matemático exato correspondem a números irracionais. Desse modo, dentro dos moldes de pensamento que tínhamos e dadas as circunstâncias objetivas de tempo – havendo apenas um mês para criar tal atividade –, decidimos propor atividades de pesquisa que pudessem garantir, de todo modo, o protagonismo dos estudantes. No próximo capítulo descrevemos como foram planejadas essas atividades de pesquisa.

2.2 Reelaboração de noções concernentes aos números racionais

a) A representação dos racionais

Boa parte dos livros didáticos voltados à segunda fase do ensino fundamental trazem explicitamente um procedimento para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica e também discutem o fato de que qualquer número decimal com finitas casas depois da vírgula pode ter representação fracionária. Em consonância com os livros didáticos, nas escolas, em geral, são discutidos tais fatos. Em outras palavras, os estudantes se familiarizam com a propriedade válida que diz: "Todo número cuja representação decimal é finita ou infinita e periódica admite representação fracionária". Observe-se que tal propriedade nada afirma sobre as possíveis representações decimais de uma fração, em particular, nela nada é afirmado sobre a existência ou não de frações cuja representação decimal não seja finita ou infinita e periódica. Ora, apenas a recíproca daquela propriedade, que geralmente nem é citada nos livros ou nas aulas, é que garante que "Toda fração possui representação decimal finita ou infinita e periódica". Porém observa-se ser comum nos livros didáticos, a assunção sutil desta recíproca, sem nenhum tipo de discussão, o que pode induzir a uma confusão entre uma implicação e sua recíproca. De fato, é comum que os estudantes saiam da escola básica com a concepção de que os números irracionais se caracterizam apenas por ter uma representação decimal infinita e não periódica. Poucos são os que percebem que eles não são racionais no sentido de não poderem ser escritos na forma de fração (ou de razão).

Vamos mostrar aqui que a recíproca daquela propriedade é inteiramente abordável no ensino fundamental por demandar conhecimentos acessíveis aos estudantes, enquanto que, a demonstração rigorosa da determinação de frações geratrizes, demanda uma boa familiaridade com a notação polinomial dos números decimais (como soma de potências de 10, cada uma multiplicada por algum algarismo específico) e o conhecimento sobre a existência da soma de progressões geométricas infinitas e decrescentes abordado somente no Ensino Médio.

A título de exemplo, um método usualmente encontrado em livros didáticos consiste em chamar de x ao número $2{,}34\overline{5}$, ou seja,

$$x = 2{,}34\overline{5}. \qquad (1)$$

Em seguida, no intuito de obter duas dízimas periódicas de mesmo período no caso considerado, “multiplicam”[13] respectivamente por 100 e por 1000 ambos os membros da igualdade (1) acima, obtendo:

$$100x = 234{,}\overline{5} \qquad (2)$$

$$1000x = 2345{,}\overline{5} \qquad (3)$$

Subtraindo (2) de (3), encontram $900x = 2111$. Donde segue a conclusão que $x = \frac{2111}{900}$.

É usual que a passagem de (1) para (2) e (3) aconteça sem grandes discussões com os estudantes sobre o fato de um certo uso “abusivo” do algoritmo da multiplicação neste caso já que o membro da direita, em (1), possui infinitas casas decimais após a vírgula. Na escola, aprendemos que para efetuar uma multiplicação entre dois números, começa-se multiplicando o algarismo mais à direita de cada um dos números considerados. Acontece que, pelo fato do número do segundo membro de (1) possuir infinitas casas decimais após a vírgula, não existe um último

[13] As aspas sugerem que tal multiplicação não é usual, já que o algoritmo da multiplicação é válido apenas para números com finitas casas decimais. Abordar de maneira adequada essa dificuldade demanda a compreensão de que as dízimas periódicas representam somas envolvendo uma infinidade de parcelas, cujos valores, são potências de 10, com expoentes inteiros negativos, multiplicadas por algum algarismo. A soma desta infinidade de parcelas resulta sempre em um número preciso, tendo em vista a parte periódica, de tais dízimas, serem somas de séries geométricas decrescentes e, portanto, convergentes.

algarismo à direita e, dessa forma, passa-se a (2) e (3) por meio de um procedimento que esconde a dificuldade conceitual explicitada na nota de roda pé 13. Ora, sabemos que os conhecimentos sobre progressões geométricas decrescentes, necessários na demonstração de tal passagem, demandam conteúdos não acessíveis a estudantes do Ensino Fundamental. De fato, como veremos a seguir, para justificar corretamente todas as passagens vistas acima, utiliza-se conhecimentos relativos à soma dos termos de uma progressão geométrica de termos positivos e decrescentes, de razão compreendida entre -1 e 1, a qual, é sabido ser convergente. Com efeito, observe:

$$x = 2{,}34\bar{5} = 2 + 0{,}3 + 0{,}04 + 0{,}00\bar{5} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots$$

Mas

$$\frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots = \frac{5}{10^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \frac{5}{10^3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)} = \frac{5}{10^3} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{900}$$

Substituindo o resultado obtido neste último cálculo em (4), temos:

$$x = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{900} = \frac{1800 + 270 + 36 + 5}{900} = \frac{2111}{900}$$

Pode-se encontrar maiores detalhes e uma demonstração completa do caso geral em HARDY (2009, apud MOZER, 2013, p. 31).

Já a discussão da recíproca – “Toda fração possui representação decimal finita ou infinita e periódica”, pode ser feita de uma forma inteiramente natural e acessível aos estudantes de oitavo ano do Ensino Fundamental. Com efeito, tomando-se uma fração $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos, sabemos, pelo algoritmo da divisão, que ao dividirmos p por q existem q possíveis restos, a saber, $0, 1, 2, 3, \cdots, q - 1$. Assim, se o resto zero aparecer em algum passo da divisão, dizemos que esta é exata e disso decorrerá o fato de, no quociente, aparecer um número inteiro ou um número com finitas casas decimais após a vírgula. No caso contrário, admitindo que o resto zero não apareça ao longo da divisão, sabemos que somente $q - 1$ possíveis restos poderão aparecer. Desta forma, dado que a quantidade $q - 1$ é finita, à medida em que vamos prosseguindo com a divisão, enquanto existirem restos diferentes, os números que compuserem o quociente desta divisão não formarão qualquer tipo de período. Porém, em algum momento, essa lista de restos irá esgotar e algum dos $q-1$ possíveis restos voltará a aparecer levando, a partir desse instante, ao surgimento de um período no quociente, tendo em vista o caráter cíclico dos restos. Com isso, o quociente formado será composto por infinitas casas decimais periódicas após a vírgula. Nessa fase de escolaridade, os estudantes podem ter a percepção de tal propriedade em atividade investigativa baseada em vários exemplos particulares, sem a necessidade de uma prova formal do caso genérico. Isso será também muito útil para que se familiarizem mais ainda com a propriedade fundamental dos restos no algoritmo da divisão, o que em si já pode ser relevante para a sua formação matemática.

b) A medida de um segmento comensurável com um segmento unitário

No decorrer da preparação de nossa atividade investigativa, aconteceu-nos compreender o caráter decisivo do tema da comensurabilidade de segmentos dentro do caminho pedagógico que estávamos buscando traçar para o ensino dos números irracionais, no intuito de “criar um impasse” que de fato tornasse necessária a existência de um novo tipo de número além dos racionais. Sabendo que tal assunto não estava contemplado no currículo prescrito de nossa escola e tampouco em livros didáticos do Ensino Fundamental, mostrou-se necessário apresentar este tema aos estudantes no intuito de preparar o terreno para o tópico a respeito da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado. Assim, poderíamos dar por finalizado o percurso planejado que culminaria na caracterização do primeiro número necessariamente não racional (e assim chamado de irracional) a ser introduzido aos estudantes, a saber, a raiz quadrada de dois. Passemos ao resultado de nossas reflexões sobre essa questão.

Definição: Dizemos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis se existem um segmento $\overline{EF}$ de medida u e inteiros positivos p e q, tais que: $AB = p \cdot u$ e $CD = q \cdot u$, ou seja, AB e CD são múltiplos inteiros de u.

<u>Convenção</u>: Deste ponto em diante, nesta dissertação, usaremos a expressão “<u>o segmento de medida u comensura $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$</u>” para designar que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são

comensuráveis por meio de algum $\overline{EF}$ de medida u, para tornar mais fluente a leitura do texto.

Teorema: Dados um segmento $\overline{AB}$ qualquer e um segmento unitário $\overline{CD}$ ($CD = 1$), temos: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis se e somente se existem inteiros positivos p e q tais que $AB = \frac{p}{q}$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Supondo que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos comensuráveis temos, por definição, que existem um segmento de medida u e inteiros positivos p e q, tais que:

$$AB = p \cdot u \text{ e } CD = q \cdot u = 1.$$

Assim, podemos escrever equivalentemente essas duas últimas igualdades da seguinte forma:

$$u = \frac{AB}{p} \text{ e } u = \frac{1}{q}$$

De onde segue que:

$$\frac{AB}{p} = \frac{1}{q} \Longrightarrow q \cdot AB = p \Longrightarrow AB = \frac{p}{q}$$

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que existam inteiros positivos p e q, tais que $AB = \frac{p}{q}$.

Escrevendo essa última igualdade de uma maneira equivalente, temos:

$$AB = \frac{p}{q} \Leftrightarrow AB = p \cdot \frac{1}{q}$$

É natural que $\frac{1}{q}$ seja a medida u de um segmento que determine a comensurabilidade entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. De fato, note que $AB = p \cdot \frac{1}{q} = p \cdot u$. Além disso, como $CD = 1$ e $1 = q \cdot \frac{1}{q}$, obtemos $CD = q \cdot u$.

Desta forma, pela definição de comensurabilidade, concluímos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis. Vemos com este importante resultado, que um segmento é comensurável com um segmento unitário se, e somente se, sua medida for representada por uma fração. Observe-se ainda que a demonstração desta propriedade requer apenas o domínio do conceito de fração na ideia de relação parte x todo, ou seja, trata-se de uma demonstração acessível a estudantes de oitavo ano do Ensino Fundamental.

2.3 A percepção da incomensurabilidade do lado com a diagonal de um quadrado na Grécia antiga

Na prova que detalhamos a seguir usamos como pré-requisitos apenas o Teorema de Pitágoras, a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, a reflexão de figuras planas em torno de um eixo de simetria e a classificação de triângulos quanto aos lados. Além disso, lançamos mão de construções simples com régua e compasso, do fato de que em um triângulo são congruentes os lados opostos a ângulos congruentes e de uma noção intuitiva de limite.

Considere um quadrado $ABCD$ de lado unitário e suponha que a sua diagonal $\overline{AC}$ seja comensurável com o segmento unitário $\overline{AB}$, que no caso representa um dos lados do quadrado dado (ver Figura 6). Pela definição de segmentos comensuráveis, sabemos que existe um segmento de medida u que, relativamente ao qual, as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, se expressam como números inteiros. Utilizando-se o Teorema de Pitágoras podemos, inicialmente, obter a medida da diagonal $\overline{AC}$ do quadrado dado.

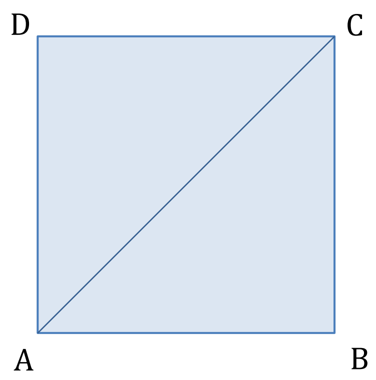


Figura 6 – Construção da diagonal $\overline{AC}$

$$(AC)^2 = 1^2 + 1^2$$

$$AC = \sqrt{2}$$

Em seguida, traçando-se um arco de circunferência de raio 1, centrado no ponto A, determinamos sobre a diagonal AC o ponto P. Veja Figura 7, a seguir.

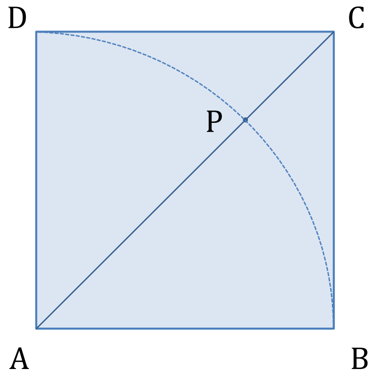


Figura 7 – Determinação do ponto $\boldsymbol{P}$ sobre $\overline{\boldsymbol{AC}}$

Pelo ponto P, construímos uma reta r perpendicular à diagonal $\overline{AC}$ e chamamos de E o ponto de encontro entre a reta r e o lado $\overline{BC}$ do quadrado, como na Figura 8.

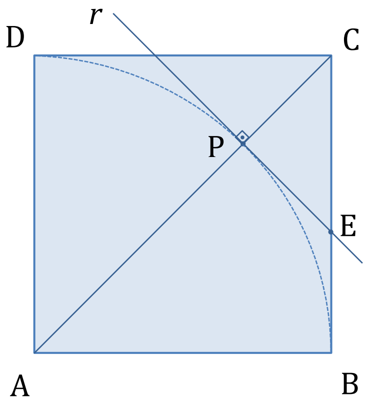


Figura 8 – Construção de $\boldsymbol{r} \perp \overline{\boldsymbol{AC}}$

Note que sendo a reta r perpendicular à diagonal $\overline{AC}$, temos $med(C\hat{P}E) = 90°$ e, uma vez que as diagonais de um quadrado estão sobre eixos de simetria (de reflexão) desta figura, os ângulos que estas determinam com os lados são congruentes, decorrendo assim que $med(E\hat{C}P) = 45°$. Com isso, sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, concluímos que no triângulo CPE o ângulo $P\hat{E}C$ também mede $45°$. Assim, o triângulo CPE é retângulo e os dois ângulos adjacentes à sua hipotenusa têm mesma medida, ou seja, tal triângulo é isósceles, tendo $\overline{PC} \cong \overline{PE}$.

Unindo-se pontos A e E com um segmento de reta, obtemos dois triângulos: ABE e APE, conforme mostra a Figura 9 a seguir.

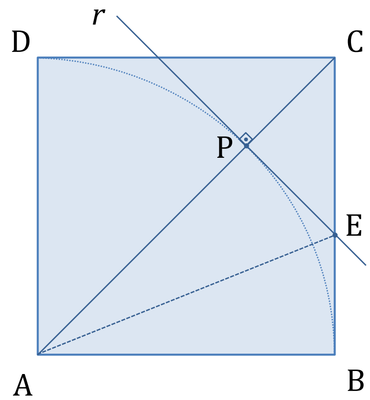


Figura 9 – Construção do segmento $\overline{\boldsymbol{AE}}$

Com efeito, com as notações introduzidas na Figura 9, por construção, $AP = AB = 1$. Além disso, $med(A\hat{B}E) = 90°$, por ser o ângulo interno do quadrado $ABCD$ dado; e, $med(A\hat{P}E) = 90°$, pelo fato de a reta r ter sido traçada perpendicularmente à diagonal $\overline{AC}$. Assim, vemos que os triângulos ABE e APE são ambos retângulos tendo por hipotenusa o lado comum $\overline{AE}$. Logo, o Teorema de Pitágoras aplicado a esses triângulos, nos permite concluir que o terceiro lado de ambos possui a mesma medida, ou seja, $\overline{PE} \cong \overline{BE}$. Consequentemente, juntando esse último resultado àquele do parágrafo anterior, obtemos que $\overline{PC} \cong \overline{PE} \cong \overline{BE}$.

Lembrando ainda que, por suposição, a diagonal $\overline{AC}$ e o lado $\overline{AB}$ do quadrado são comensuráveis, assim o mesmo segmento de medida u que comensura os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, comensura também os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{PC}$ (lembre-se que $AP = AB$ e $PC = AC - AP$). Ora, do que vimos no parágrafo anterior, concluímos que $PC = PE = BE$ e, por essa razão, o segmento de medida u comensurará também os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{PE}$. Por fim, levando em conta este último resultado e o fato de que $EC = BC - BE$, concluímos que este mesmo segmento de medida u também comensura o segmento $\overline{EC}$ (note que o segmento de medida u comensura tanto o segmento $\overline{BC}$ quanto o segmento $\overline{BE}$). Disso decorre o importante resultado da comensurabilidade entre os segmentos $\overline{EC}$ e $\overline{PC}$: a hipotenusa e um dos lados do triângulo CPE, respectivamente.

Prosseguindo em nossa construção (observe a Figura 10), traçamos por C e por E duas retas s e t, perpendiculares aos segmentos $\overline{PC}$ e $\overline{PE}$, respectivamente. Chamemos de F o ponto de intersecção entre tais retas. É fato que com esta última construção os segmentos $\overline{FC}$ e $\overline{FE}$ são, respectivamente perpendiculares a $\overline{PC}$ e a $\overline{PE}$. Desta forma, sendo $med(P\hat{C}E) = 45° = med(P\hat{E}C)$, temos que $med(F\hat{C}E) = 45° = med(F\hat{E}C)$. Logo, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos que $med(E\hat{F}C) = 90°$, portanto o quadrilátero $PEFC$ é um retângulo. Como os lados opostos de um retângulo são congruentes, temos que $\overline{CF} \cong \overline{PE}$ e $\overline{EF} \cong \overline{PC}$. Mas vimos anteriormente que $\overline{PC} \cong \overline{PE}$. Portanto, podemos afirmar que o quadrilátero $PEFC$ determinado é um quadrado. Lembremos que neste quadrado, os segmentos $\overline{PC}$ e $\overline{EC}$, respectivamente lado e diagonal do mesmo, são (co)mensuráveis pelo mesmo segmento de medida u inicialmente considerado. Mais ainda, sendo $AC = \sqrt{2}$ e $AP = 1$, segue que $PC = AC - AP = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2} = \frac{AB}{2}$, ou seja, a medida do lado PC do quadrado $PEFC$ é menor do que a metade da medida do lado AB do quadrado inicial.

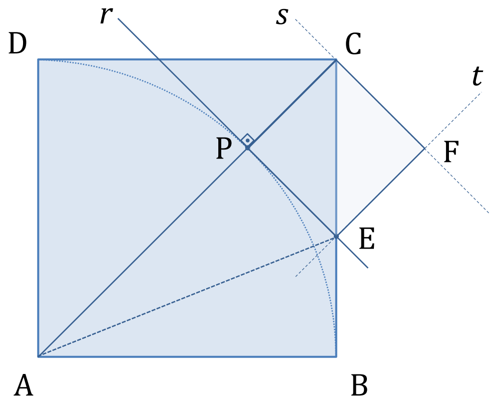


Figura 10 – Construção do quadrado $\boldsymbol{PEFC}$

Partindo agora do quadrado $PEFC$ e repetindo sobre ele todos os procedimentos realizados com o quadrado $ABCD$ (Figuras 7, 8, 9 e 10), obtemos, pelas mesmas razões anteriormente apresentadas, um quadrado $QGHC$ (ver Figura 11), cujo lado $\overline{QC}$ e cuja diagonal $\overline{GC}$ são comensuráveis, sendo o mesmo segmento de medida u a comensurar ambos. Também pelas mesmas razões vistas anteriormente, é possível ainda concluir que $QC < \frac{PC}{2} < \frac{\frac{AB}{2}}{2} = \frac{AB}{4}$.

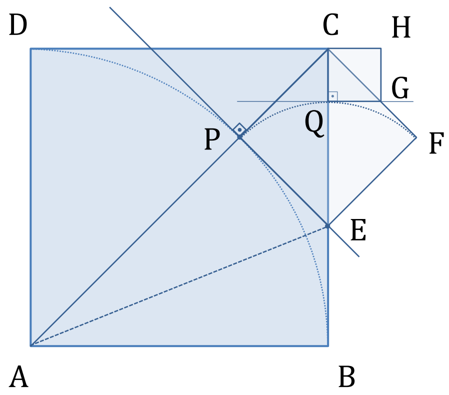


Figura 11 – Construção do quadrado $\boldsymbol{QGHC}$

Não é difícil perceber que o procedimento descrito para a obtenção dos quadrados $PEFC$ e $QGHC$, pode ser repetido infinitamente, gerando assim, quadrados cada vez menores cujos lados medem menos que a metade do lado do quadrado precedente, além de seus lados e diagonais serem, respectivamente, comensuráveis com o segmento de medida u inicialmente adotado. Devido ao caráter intuitivo de tal demonstração, não são necessárias outras construções além daquelas mostradas anteriormente (construção dos quadrados $PEFC$ e $QGHC$) a fim de que os estudantes se convençam do caráter infinito desse processo e possam tirar conclusões baseadas na trajetória dedutiva desenvolvida. Dentre as possíveis conclusões a que se pode chegar com esse processo, a mais importante delas consiste em perceber que num dado momento o lado de um desses quadrados ficará menor do que a medida u considerada e que supostamente deve comensurá-lo com a diagonal do mesmo quadrado, configurando, portanto, um absurdo. De fato, vimos que em todas as construções a medida u comensurava o lado com a diagonal de cada quadrado construído, mas se num determinado momento o lado do quadrado ficar com medida menor do que u isso será impossível, uma vez que pela definição de comensurabilidade, o segmento de medida u não pode servir de unidade de medida de um segmento de medida menor que o próprio u.

Vemos assim que tal absurdo decorre da suposição inicial que afirmava serem comensuráveis o lado e a diagonal de um quadrado de lado unitário. Como de tal suposição decorre um absurdo, conclui-se, que tal suposição não pode estar correta e, portanto, a diagonal $\overline{AC}$ e o lado $\overline{AB}$ do quadrado $ABCD$ devem ser segmentos incomensuráveis.

Capítulo 3 – Planejamento e desenvolvimento de atividades didáticas sobre números racionais e irracionais

Antes de passarmos às considerações sobre o planejamento e o desenvolvimento das aulas propriamente dito, é importante situar a realidade das turmas e as condições de apoio pedagógico da escola para o desenvolvimento da parte prática de nossa pesquisa, no que diz respeito à grade horária de Matemática e quanto aos responsáveis pedagógicos pelas turmas envolvidas.

A composição de turmas do segmento de Ensino Fundamental II em nossa escola, tanto no início do ano de 2016, quanto no de 2017, se consolidou com oito turmas de oitavo ano. A média de estudantes por sala em 2016 estava em torno de trinta e sete estudantes (sendo 298 o total de estudantes em 2016), enquanto que em 2017, essa média era um pouco menor, ficando em torno de trinta e três estudantes por sala (o total de estudantes em 2017 era de 263). A faixa etária desses, em cada um dos anos citados, foi considerada homogênea e centrada em torno dos treze anos de idade. Também em ambos os anos, em cada uma dessas turmas, foram ministradas seis aulas semanais de Matemática com duração de quarenta e cinco minutos cada. Das oito turmas de oitavo ano, cinco delas ficaram sob nossa responsabilidade, em cada um dos anos considerados. As outras três turmas, foram assumidas por diferentes professores em 2016 e em 2017. Tais professores estiveram envolvidos com nossa pesquisa no sentido de terem aplicado e acompanhado o desenvolvimento das atividades de pesquisa e investigativas, também realizadas pelos estudantes das demais três turmas. Afinal, além de serem responsáveis por três das oito turmas de oitavo ano da escola, eles poderiam contribuir com um segundo olhar sobre a aplicação, o desenvolvimento e a análise das práticas de ensino adotadas. Convém ainda ressaltar que, em nossa escola, cada turma de oitavo ano, em particular, é acompanhada por apenas um professor de Matemática, o qual é responsável por desenvolver todo o conteúdo planejado para a série ao longo do ano.

Uma única coordenadora para a área de Matemática acompanha o trabalho relativo ao ensino deste componente curricular desde as turmas de sexto ano do Ensino Fundamental I até as turmas de terceiro ano do Ensino Médio. No que diz respeito aos trabalhos pedagógicos desenvolvidos em âmbito de cada série, existem também assessores de ensino que são responsáveis por acompanhar as diferentes atividades realizadas em cada uma das séries específicas. Em nosso caso, houve duas assessoras de ensino diferentes em cada um dos anos supracitados. Dessa forma, desde o planejamento até à efetiva execução de nossas atividades didáticas, confrontamos nossos planos e ideias, com certa frequência, tanto com a coordenadora de Matemática, quanto com a assessora de série do oitavo ano. Para cada uma delas entregamos sistematicamente um pequeno resumo contendo as principais ideias, a metodologia e as atividades que seriam desenvolvidas junto aos estudantes sobre o assunto dos números irracionais. Em nenhum momento houve restrições, por parte da escola, sobre os objetivos ou aplicação de tais atividades.

No início de nossos estudos imaginávamos poder realizar toda a pesquisa prática com os estudantes elaborada à luz das questões norteadoras deste trabalho no primeiro semestre de 2016. No entanto, finalizada a primeira sequência de atividades percebemos que muito daquilo que se queria investigar não havia sido mobilizado. Dessa forma foi necessário num segundo momento retomar em sala de aula, com os mesmos estudantes, atividades investigativas que complementassem o trabalho inicial. Tais atividades foram planejadas e aplicadas ao final do ano. Diante dos resultados positivos obtidos, e a fim de testar novamente o potencial das experiências adquiridas em 2016, decidimos planejar uma sequência didática que pudesse contemplar todos os objetivos e questões norteadoras desta dissertação, para ser desenvolvida com as novas turmas de oitavo ano no primeiro semestre de 2017. Neste capítulo, apresentamos de forma detalhada o planejamento e a aplicação das atividades didáticas propostas aos estudantes em cada um dos três momentos citados acima: dois deles em 2016 e o terceiro em 2017.

No final do tópico 2.1 acenamos para a dificuldade de se criar uma atividade investigativa que possibilitasse a introdução da necessidade dos números irracionais (vimos essa dificuldade aparecer primeiramente na abordagem do número de ouro) como já ficou comentado no tópico 2.1, às pp. 53-59. Por essa razão, com o intuito de garantir o protagonismo dos estudantes, as principais atividades desenvolvidas no primeiro semestre de 2016 constituíram-se em trabalhos de pesquisas e apresentações realizadas em grupos tendo o número de ouro por tema dominante. O tópico 3.1 a seguir traz uma descrição do planejamento das aulas prévias, a título de preparação e revisão de conteúdos, que antecederam as apresentações dos trabalhos de pesquisa realizados pelos diferentes grupos, além da descrição comentada do que foi efetivamente apresentado em sala de aula pelos estudantes.

Concluída a etapa de apresentação das pesquisas, sentimos necessidade de retomar uma discussão envolvendo os números irracionais mediante a percepção de que os trabalhos desenvolvidos no primeiro semestre não haviam mobilizado alguns dos propósitos previstos para este estudo descritos no capítulo 1 – notadamente a ausência de atividades investigativas dos estudantes sobre: os números irracionais; a caracterização completa da representação decimal dos números racionais; e as questões relativas à densidade e infinidade dos (pontos de coordenadas) irracionais na reta numérica.

Questões de ordem escolar influenciaram para que essa retomada acontecesse apenas em novembro de 2016. O planejamento da série (oitavo ano do Ensino Fundamental), as próprias atividades no âmbito da vida escolar, o total das turmas envolvidas (oito) e a necessidade de um trabalho em parceria com o outro professor (responsável pelas outras três turmas), que atendesse as demandas de um calendário escolar rígido, impossibilitaram a realização dessa segunda etapa em período anterior.

Do ponto de vista metodológico, a atividade proposta no início de 2016 privilegiou o trabalho de pesquisa contribuindo para que esse fosse muito mais forte que o trabalho investigativo. Isso fez com que o protagonismo dos alunos em pesquisa sobressaísse àquele observado em investigações. Já do ponto de vista dos conteúdos abordados, percebemos que a representação decimal dos números racionais, a localização dos números irracionais na reta numerada, a densidade e a questão da infinidade desses números, não haviam sido discutidas nas pesquisas feitas pelos grupos de estudantes. No tópico 3.2 mostramos como tais questões foram abordadas e descrevemos a efetiva aplicação em sala de aula das atividades investigativas propostas ao final de 2016 com a finalidade de complementar aspectos relativos aos números irracionais não abordados quando da realização/apresentação dos trabalhos de pesquisa feito pelos estudantes no início do ano.

Concluída essa etapa, constatamos que não havíamos ainda conseguido formular atividades que levassem ao impasse sobre a necessidade da existência de um número que não seja racional. A partir de reflexões feitas na busca de um percurso didático acessível e que possibilitasse aos jovens uma maior profundidade na atribuição de significado aos números irracionais, percebemos a dificuldade de escapar da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado para gerar tal impasse. Nesse sentido, e por ser acessível a investigações matemáticas pelos estudantes, decidimos trabalhar a noção de comensurabilidade de segmentos, no intuito de que estes dispusessem de repertório de linguagem e conceitos que lhes permitisse apreciar as importantes ideias envolvidas na prova dos gregos sobre a incomensurabilidade, vista no tópico 2.3, às pp. 64-69. Assim no tópico 3.3 a seguir, apresentamos a maneira que encontramos para introduzir esta prova, sem incorrer em excessos formais, em uma aula expositiva e dialogada, na qual, trilhando um percurso dedutivo, logramos expor tal resultado com grande participação dos estudantes por meio de questionamentos ou sugestões. Também descrevemos a aplicação e o desenvolvimento das seis atividades investigativas realizadas com os novos estudantes ingressantes em 2017, decorrentes da experiência adquirida nas atividades didáticas aplicadas no ano anterior.

Vale lembrar que nos tópicos a seguir, nos atemos a descrever e comentar as atividades trabalhadas com os estudantes relacionadas diretamente às questões norteadoras e aos objetivos desta dissertação. Aulas constantes no planejamento sem ligação direta com a temática deste trabalho, não são comentadas aqui.

3.1 Descrição do planejamento e da aplicação das atividades desenvolvidas no primeiro semestre de 2016 como parte da pesquisa prática em sala de aula para esta dissertação

3.1.1 Planejamento

No início de cada ano escolar é costume, em nossa escola, nas primeiras semanas do ano, realizar uma revisão de assuntos abordados na série anterior, resolvemos aproveitar essa ocasião para desenvolver as noções que posteriormente seriam necessárias ao estudo do número de ouro.

Dentre os temas específicos do 7º ano a serem revisados, destacamos:

- Revisão dos conjuntos numéricos e suas propriedades;
- Operações com frações;
- Representação decimal dos números racionais;
- Potenciação com expoente inteiro.

E dentre aqueles do 8º ano, necessários para o desenvolvimento do trabalho com o número de ouro, identificamos:

- Teorema de Pitágoras;
- Raiz quadrada exata de números racionais não negativos, por meio de fatorações e raízes exatas racionais ou aproximadas (quando irracionais) com o uso de calculadora não científica.

Vale lembrar que para favorecer o bom andamento das atividades que seriam realizadas pelos estudantes, foi necessária a elaboração de um planejamento detalhado que garantisse objetividade no uso do tempo disponível para esse tipo de revisão. A seguir, apresentamos de forma sucinta e em sequência cronológica de aplicação, os temas das aulas que compuseram todo o conjunto de atividades do período de revisão. Essas aulas não aconteceram de forma sequencial, pois algumas atividades, de caráter institucional ou relativas a projetos da série (ou seja, projetos interdisciplinares previstos pela própria escola para o oitavo ano do Ensino Fundamental), foram intercaladas entre as mesmas. A numeração adotada é apenas uma forma de apresentá-las na ordem em que aconteceram.

- **Aula 01:** Atividade investigativa.
  Desafio em grupos visando induzir experimentalmente a “descoberta” do Teorema de Pitágoras, por meio do reconhecimento da referida propriedade evidenciada na montagem de um quebra-cabeça – vide apêndice 2, tópico I.
- **Aula 02:** Resolução de exercícios em grupo envolvendo atividade investigativa.
  Resolução em grupos, de exercícios envolvendo a aplicação do Teorema de Pitágoras, com o uso de calculadora não científica para investigar raízes

quadradas aproximadas por tentativas sucessivas – vide apêndice 2, tópico II.

- **Aula 03:** Aula expositiva (de revisão de temas necessários para o trabalho sobre os irracionais).
  Sistematização expositiva do professor sobre: definição de número racional pela sua representação fracionária e exemplos de números racionais em notação decimal; definição de raiz quadrada; extração de raízes quadradas por fatoração envolvendo números racionais não negativos com representação decimal finita – vide apêndice 2, tópicos III e IV.
- **Aulas 04 e 05:** Aula de correção de exercícios.
  Participação voluntária dos estudantes na resolução de exercícios na lousa envolvendo a extração de raízes quadradas por fatoração de números racionais não negativos com representação decimal finita – vide apêndice 2, tópico III.
- **Aula 06:** Aula expositiva.
  Revisão de definições e propriedades dos seguintes conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros e Racionais.
- **Aula 07:** Aula expositiva.
  Exposição de variados exemplos abordando diferentes representações de um número racional e suas respectivas transformações para a forma fracionária – vide apêndice 2, tópico IV.
- **Aula 08:** Aula expositiva.
  Primeira parte de uma aula expositiva sobre a mudança de representação de um número racional em sua forma decimal com infinitas casas periódicas após a vírgula, para sua forma fracionária. Nessa aula foram abordadas apenas as dízimas periódicas simples por meio do procedimento comentado na página 60 usualmente presente nos livros didáticos – vide apêndice 2, tópico VI.
- **Aula 09:** Aula expositiva.
  Apresentação da atividade de pesquisa a ser realizada pelos estudantes. Esclarecimentos acerca da justificativa do trabalho, seus objetivos e regulamentos. Momento para formação de grupos e sorteio dos diferentes temas – (descritos à página 80).

- **Aula 10:** Aula expositiva.

  Segunda parte de uma aula expositiva sobre a mudança de representação de um número racional em sua forma decimal com infinitas casas periódicas após a vírgula, para sua forma fracionária. Foram abordadas, nessa aula, as dízimas periódicas compostas com o uso do mesmo procedimento exemplificado anteriormente (à p.62) – vide apêndice 2, tópico IV.

- **Aulas 11 e 12:** Aula de correção de exercícios.

  Participação voluntária dos estudantes na resolução de exercícios na lousa, envolvendo mudança de representação de um número racional em sua forma decimal com infinitas casas periódicas após a vírgula para a forma fracionária – vide apêndice 2, tópico IV.

- **Aula 13:** Aula expositiva.

  Revisão de definições e propriedades das potências com expoentes inteiros a fim de fundamentar o cálculo por fatoração de raízes quadradas de números racionais não negativos – vide apêndice 2, tópico V.

- **Aula 14:** Resolução de exercícios em grupo.

  Resolução em grupos de exercícios envolvendo potências com expoentes inteiros – vide apêndice 2, tópico V.

- **Aula 15:** Aula de correção de exercícios.

  Participação voluntária dos estudantes na resolução de exercícios na lousa envolvendo a aplicação das propriedades das potências com expoente inteiro – vide apêndice 2, tópico V.

- **Aulas 16 e 17:** Preparação para o trabalho de pesquisa.

  Aula realizada na biblioteca em preparação das apresentações dos trabalhos de pesquisa sobre os números irracionais. Turma dividida nos respectivos grupos de trabalho, cada um ocupando uma sala da biblioteca para dar prosseguimento à elaboração e ajustes de detalhes para a apresentação do trabalho sobre os números irracionais.

- **Aula 18:** Aula de correção de exercícios.

  Participação voluntária dos estudantes na resolução de exercícios na lousa envolvendo a aplicação das propriedades das potências com expoente inteiro – vide apêndice 2, tópico V.

Como mencionado anteriormente, assumimos a ideia de dividir as turmas em grupos de estudo para desenvolverem pesquisas sobre os seguintes temas, relacionados aos números irracionais e, em particular, ao número de ouro:

- O Retângulo Áureo – Aspectos históricos e aplicações
- O Retângulo Áureo – Construção e aspectos matemáticos
- A Sequência de Fibonacci – Aspectos históricos e aplicações
- A Sequência de Fibonacci – Aspectos matemáticos
- O Pentagrama – Aspectos históricos e aplicações
- O Pentagrama – Aspectos matemáticos
- A Raiz quadrada de dois – Aspectos históricos e matemáticos
- O número π – Aspectos históricos, matemáticos e curiosidades

Ao todo, foram formados oito grupos por sala de aula, com cinco ou seis integrantes em cada um. A formação de cada grupo se deu por livre escolha entre os próprios estudantes conforme afinidades pessoais entre os mesmos. A determinação do tema destinado a cada grupo foi feita por sorteio.

Cada grupo foi incumbido de apresentar, durante vinte minutos de uma aula, uma pequena exposição envolvendo um dos temas acima elencados, por meio de apresentações de slides em Power Point, da construção de vídeos, de forma expositiva ou outro tipo de abordagem à escolha do grupo. Para cada um dos temas e no intuito de orientar os diferentes grupos, foram formuladas instruções norteadoras para o trabalho de pesquisa dos estudantes, as quais constam no apêndice 1.

Por fim, para melhor preparar cada um dos grupos, fornecendo-lhes subsídios e orientações, foram reservadas duas aulas na biblioteca da escola, para discutirem com o acompanhamento do professor, aspectos metodológicos relativos às suas futuras apresentações (conforme descrito anteriormente – Aulas 16 e 17). Além disso, no transcorrer dessas duas aulas foram disponibilizadas aos estudantes sugestões com links *internet* contendo apresentações em vídeos, bibliografias para pesquisas em livros ou artigos relacionados ao tema.

Dessa forma, ao término do período das aulas de revisão e preparação, sucedeu-se a etapa de apresentação dos grupos. Reservamos um total de quatro aulas, em dias sucessivos, para as apresentações, de modo que dois grupos pudessem fazer, em cada dia, a apresentação de seu trabalho. Ao final das apresentações, o quinto dia foi destinado a uma sistematização e conclusão do assunto abordado durante toda a semana. Sobre isso trataremos em mais detalhes no próximo tópico.

3.1.2 Aplicação e desenvolvimento

Logo no início do ano, durante a primeira semana de aula, foram entregues a título de atividades investigativas, alguns quebra-cabeças com a finalidade de introduzir o Teorema de Pitágoras aos estudantes. Para a realização desta atividade, dividimos toda a turma em grupos com três integrantes cada. Estipulamos um tempo de quinze minutos para que cada grupo tentasse cumprir o comando estabelecido pelo professor. Lembrando que nesta atividade não foram distribuídas quaisquer folhas com a descrição do que haveria de ser feito. O comando da atividade, transmitido oralmente pelo professor, solicitava que cada grupo montasse dois quadrados congruentes com as peças do quebra-cabeça distribuídas. Em tal montagem todas as peças deveriam ser usadas e não poderia haver sobreposição entre as mesmas:

“Vocês têm 15 minutos para formar dois quadrados congruentes utilizando essas 11 peças. Todas as peças deverão ser utilizadas, nenhuma delas poderá ficar de fora e, não poderão ocorrer sobreposição entre as mesmas.” (Ver maiores detalhes sobre essa aula no Apêndice 2).

Os estudantes reagiram de maneira positiva a essa iniciativa enfrentando o desafio colocado pela situação problema. À medida que iam terminando, os grupos chamavam o professor para avaliar se a construção estava ou não correta. Foi pedido aos grupos que finalizavam sua atividade que esperassem o término dos demais grupos. Ao final da aula, destinamos um tempo para realizar uma sistematização desta atividade culminando com o enunciado do Teorema de Pitágoras.

Na aula seguinte, outra atividade também de cunho investigativo propiciou certo envolvimento e interesse por parte dos estudantes. Pedimos que buscassem obter as cinco primeiras casas decimais de raízes quadradas de números racionais não-negativos por tentativas sucessivas e utilizando uma calculadora simples, com as quatro operações básicas. Embora essa atividade tenha sido de certo modo mais rápida e simples, podemos afirmar que também despertou curiosidade e empenho entre os estudantes.

Inicialmente, tais atividades nos fizeram intuir estar no caminho certo, dado o envolvimento dos estudantes com as mesmas. Como descrevemos na introdução, um dos aspectos que nortearam desde o início nossa pesquisa, foi justamente a busca por abordagens (e aqui, em especial, as investigativas) capazes de suscitar motivação e curiosidade nos estudantes frente a aprendizagem da Matemática.

Após essas duas aulas de natureza mais investigativa, sucederam as demais, previstas em nosso planejamento, para a revisão dos conteúdos de sétimo ano e em preparação para apresentação do conjunto dos números irracionais. Nessas aulas, entretanto, não foram utilizadas atividades de caráter investigativo, corroborando, assim, com a intuição acenada no parágrafo anterior pois, à medida em que prosseguíamos com aulas expositivas mais tradicionais, começávamos a notar um sutil distanciamento dos alunos acompanhado de certa resistência com as tarefas propostas.

Chegado o momento de introduzir os números irracionais aos estudantes, pretendíamos fazê-lo por meio de abordagens investigativas. Inclusive havíamos escolhido fazer tal introdução por meio de atividades envolvendo o número de ouro. Contudo, conforme citado ao final do tópico 2.1, diante da não trivialidade do assunto e da dificuldade de se criar atividades investigativas autênticas capazes de favorecer o surgimento do impasse que levaria à necessidade de um novo tipo de número, não conseguimos elaborar nenhum tipo de atividade investigativa que levasse os estudantes a descobrir a necessidade de ser o número de ouro não racional. Frente a uma tal situação, decidimos mudar de abordagem e, para garantir, em certa medida a proatividade e o protagonismo dos estudantes, propusemos trabalhos de pesquisa sobre o número de ouro e outros temas correlatos.

Transcorridas as cinco primeiras semanas de aula, nas quais aconteceu todo o período de revisão, iniciamos as apresentações das pesquisas realizadas pelos oito grupos. Estas transcorreram ao longo de uma semana, sendo utilizadas quatro das seis aulas semanais de Matemática para cada turma, uma em cada dia. Os grupos 1 e 2 apresentaram seus trabalhos em uma segunda-feira; os grupos 3 e 4, na terça-feira e assim por diante, até terminarem todas as apresentações na quinta-feira. A maioria das aulas foi filmada a fim de garantir um registro fidedigno da apresentação de cada grupo. Infelizmente, durante a apresentação de alguns grupos, a bateria da câmera filmadora descarregou, impossibilitando-nos de fazer um registro completo de suas apresentações.

Dentre os recursos utilizados, podemos destacar o uso de: computadores acoplados a projetor de *slides*; *tablets*; dispositivos *Apple TV*; aplicativos como o *GeoGebra* ou o *ShowMe*; vídeos e pesquisas variadas na internet; livros e computadores para pesquisa na biblioteca. Alguns grupos que trouxeram suas apresentações em vídeos gravados, além de utilizarem *softwares* para edição, recursos de iluminação e de áudio, também empregaram grande aparato de artefatos como roupas, maquiagens, mapas, cenários, etc. Os grupos que trouxeram atividades concretas pré-elaboradas para discutir com a turma, tiveram de se preocupar com a preparação prévia do material a ser disponibilizado aos colegas, entre eles destacamos: folhas de papéis colorido, tiras de papel já recortadas, cola, tesoura, conchas do mar, frutas como maçã e carambola, por exemplo. Outros grupos recorreram à utilização da lousa, principalmente nos momentos em que precisaram apresentar algum tipo de cálculo ou demonstração.

De um modo geral, segundo a metodologia utilizada em cada grupo, as apresentações tiveram muitos pontos semelhantes, salvo uma ou outra atividade específica. A maior parte das apresentações se desenvolveu com a utillização de *slides* em *Power Point*. Outras, empregaram vídeos gravados, com ou sem encenação feita pelos membros do grupo. Em um dos vídeos, por exemplo, os autores contracenaram situações usuais em aulas expositivas: o professor, explicando a matéria, enquanto alguns alunos prestavam atenção e outros “bagunçavam”. Em outro vídeo os alunos atuaram como se estivessem narrando uma história. Um dos grupos mais criativos apresentou seu trabalho em um vídeo no qual se passava um “telejornal matemático” conduzido por eles, com apresentadores, jornalistas e entrevistados. Um dos grupos, que tratou sobre o número π, organizou toda sua apresentação por meio de um jogral acompanhado de imagens e textos projetados em *Power Point*, de modo que as diferentes falas se alternavam dinamicamente à medida em que os *slides* eram trocados. Tivemos também grupos que trouxeram desafios e questões prontas com a finalidade de, ao final de sua apresentação, fazer um *quiz* para avaliar o nível de atenção e compreensão daquilo que fora exposto aos amigos da classe. Por fim, não seria realista se omitíssemos os diversos grupos que apresentaram seus trabalhos de maneira bastante burocrática, no sentido de apenas cumprir com as exigências do professor sem, no fundo, mostrar gosto e envolvimento para com o próprio aprendizado. Ainda assim, após breve retomada com esses grupos, pudemos presenciar boas apresentações.

Terminadas todas as apresentações, ao final da semana, fizemos uma sistematização dos conteúdos apresentados. Procuramos recuperar os pontos chave saídos durante as apresentações, bem como, acrescentar alguns outros aspectos que não foram contemplados, como a questão da localização dos números irracionais na reta numerada, as operações entre eles, a questão da densidade e da infinidade de tais números. No apêndice 2 – tópico IV podem ser encontradas as notas de aula dessa sistematização.

3.2 Descrição do planejamento e da aplicação das atividades desenvolvidas no segundo semestre de 2016

3.2.1 Planejamento

Para a realização da segunda etapa de nossa pesquisa, onde haveríamos de retomar alguns aspectos da representação decimal dos números racionais e complementar outros relativos aos irracionais, foram elaboradas duas atividades de cunho investigativo para serem desenvolvidas em grupos de três integrantes cada uma. O tempo destinado à aplicação das mesmas foi subdividido, em um breve momento para orientações iniciais, onde o professor apresentaria os objetivos e as regras do trabalho investigativo, e outro, onde propriamente se desenvolveu a atividade. Cada uma das atividades foi elaborada de modo a ocupar o tempo de uma aula dupla para sua realização (aproximadamente 90 minutos). Além desse tempo, reservamos em seguida mais uma aula simples para cada atividade, onde se pretendeu uma sistematização das mesmas. A seguir, listamos em ordem cronológica de aplicação, a organização das aulas, bem como, os enunciados das questões planejadas para cada atividade.

A primeira atividade investigativa teve como objetivo retomar e complementar a discussão ocorrida em aula, no primeiro semestre de 2016, sobre a representação decimal dos números racionais. No início do ano havíamos visto que todo número decimal com finitas casas depois da vírgula ou, com infinitas casas periódicas após a vírgula pode ser representado por uma fração (número racional) da forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}\ e\ q \neq 0$. Restava-nos, portanto, uma investigação sobre a validade ou não da afirmação recíproca: “Toda fração (número racional) tem uma representação decimal finita ou infinita periódica”.

- **Aulas 01 e 02:** Atividade investigativa.

Introdução:

I. No início do ano vimos que todo número decimal com finitas casas depois da vírgula ou, com infinitas casas, mas periódicas, podem ser representados por uma fração (número racional) $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}\ e\ q \neq 0$.
II. Na aula de hoje, investigaremos a validade ou não da afirmação recíproca, ou seja, que toda fração (número racional) tem uma representação decimal finita ou infinita periódica.
III. Para tanto, a fim de atacarmos esta questão, propomos a seguinte sequência de atividades investigativas.

Atividade 1

1. Considere os números: **5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12**.

a) Investigue quantas vezes o número **3** cabe em cada um desses números e **observe o comportamento dos restos que sobram para cada um deles**. Escreva de forma sequencial os restos obtidos.

b) Agora faça o mesmo para o número **4**.

c) Formule uma frase sintética que explique tal comportamento.

2. De forma análoga à primeira questão, investigue agora, os **possíveis restos** das divisões de qualquer número natural por 7 e por 11.

a) Responda **quantos** e **quais** são os restos possíveis nessas divisões.

b) Elabore uma conjectura que generalize o comportamento dos restos de uma divisão qualquer entre números inteiros positivos.

3. Determinar a representação decimal (sem utilizar calculadora) das seguintes frações e responda:

a) $\frac{53}{3}$ b) $\frac{76}{4}$ c) $\frac{67}{5}$ d) $\frac{29}{6}$ e) $\frac{23}{7}$ f) $\frac{83}{11}$ g) $\frac{479}{20}$

Agora responda:

a) Caso o resultado seja um número decimal com finitas casas decimais, explique o porquê deste fato.

b) Caso apareçam períodos, assinale o período e apresente uma explicação do motivo pelo qual ele se repete indefinidamente.

4. Levando em conta o que puderam observar nas atividades anteriores, o que vocês diriam: vale ou não vale a afirmação recíproca descrita na introdução desta atividade investigativa: *"Toda fração (número racional) tem uma representação decimal finita ou infinita periódica"* ? Justifique.

- **Aula 03:** Aula expositiva e dialogada.
  Aula destinada à sistematização da Atividade 1.

A próxima atividade teve como propósito induzir os estudantes à concepção de que os irracionais podem realmente ser considerados como números por representarem medidas de segmentos de reta. Assim propusemos a investigação sobre a localização de alguns números irracionais na reta numerada, provenientes da aplicação do Teorema de Pitágoras visto no início do ano. Além disso, foram também elaboradas atividades que levassem a uma reflexão sobre a existência de infinitos números irracionais, bem como uma sensibilização a respeito da densidade dos mesmos.

- **Aulas 04 e 05:** Atividade investigativa.

Introdução:

I. Vimos em nossa última aula investigativa que quando se divide qualquer natural ***p*** pelo natural não-nulo ***q***, há exatamente ***q*** restos possíveis, a saber ***(0, 1, 2, 3, ... , q – 1)***, uma vez que o resto deve ser um número natural inferior ao divisor.

II. Assim, excluindo-se o resto nulo, ao dividir ***p*** por ***q***, é possível obter apenas um número finito de restos distintos (no máximo ***q – 1***). Quando algum resto que aparecer for repetido, a sequência de restos vai repetir-se "para sempre", produzindo então um número decimal com infinitas casas decimais periódicas.

III. Com isso, podemos concluir que *"Todo número é representável por uma fração se e só se sua representação decimal for finita ou infinita periódica"*. Nessas condições chamamos o número de **racional**.

Atividade 2

1. a) Investigue e descubra uma forma de construir segmentos de reta cujas medidas sejam iguais a: $\sqrt{\mathbf{2}}$, $\sqrt{\mathbf{3}}$, $\sqrt{\mathbf{5}}$ $\boldsymbol{e}$ $\mathbf{\Phi}$.

(Dica: Faça uso dos conhecimentos aprendidos sobre o Teorema de Pitágoras aplicados a triângulos retângulos convenientes. O desafio aqui é estabelecer estratégias e justificá-las!)

b) A fim de comparar os segmentos construídos na atividade anterior, encontre uma forma de transportá-los convenientemente para uma reta numerada.

2. Invente um número cuja representação decimal seja infinita não periódica e que esteja localizado entre **0** e **1** na reta numerada. Escreva o(s) motivo(s) que o(s) leva(m) a dizer que tal número realmente possui infinitas casas não periódicas após a vírgula.

3. a) Dê exemplo de um número **racional** e de um número **irracional** compreendido entre $\mathbf{0,\overline{3}}\ \boldsymbol{e}\ \mathbf{0,34}$.

b) Investigue: quantas frações e quantos números irracionais existem entre $\mathbf{0,\overline{3}}\ \boldsymbol{e}\ \mathbf{0,34}$. Explique suas conclusões.

- **Aula 06:** Aula expositiva e dialogada.
  Aula destinada à sistematização da Atividade 2.

3.2.2 Aplicação e desenvolvimento

Para a aplicação das atividades propostas no segundo semestre de 2016 procuramos nos basear nos parâmetros caracterizadores das aulas de cunho investigativo, descritos no primeiro capítulo desta dissertação, tópicos 1.1.3 e 1.1.4. Inicialmente dividimos a sala de aula em grupos de dois ou três estudantes. Distribuímos uma folha a cada integrante (vide apêndice 4, tópico I) contendo as atividades a serem trabalhadas durante a primeira aula investigativa. Aos estudantes também foi dito que tais atividades representavam uma complementação e aprofundamento do trabalho realizado no primeiro semestre do ano.

Após todos os grupos terem sido montados, fizemos uma breve introdução onde pretendíamos apresentar aos estudantes a ideia de como deve transcorrer uma atividade investigativa. Nesse momento enfatizamos que numa aula investigativa o próprio aluno é o protagonista da ação, sendo o mesmo, chamado a investigar, criar novas questões, conjecturar e provar suas próprias conclusões. Esclarecemos também que durante uma aula investigativa não cabe ao professor dar respostas diretas às perguntas dos estudantes, mas que de uma forma indireta ou implícita, algumas indicações ou pequenas dicas seriam dadas.

Finalizadas as orientações iniciais, passamos ao desenvolvimento da aula propriamente dita. Nesse momento, em cada um dos grupos, os estudantes começaram a discutir entre si as questões colocadas. Enquanto isso, o professor ia passando pela sala, acompanhando as discussões e orientando os trabalhos de cada um dos grupos. Diferentes interações entre estudantes e estudantes, e entre professor e estudantes, aconteceram neste momento. Percebíamos que, embora este fosse o primeiro momento onde os estudantes eram envolvidos de maneira mais “formal” em atividades investigativas, vimos neles uma razoável destreza e excelente comprometimento com a atividade.

As questões propostas na primeira aula tinham por finalidade problematizar o tipo de representação decimal dos números racionais. A partir da proposição de alguns casos particulares esperava-se suscitar nos estudantes a percepção de que os números racionais possuem apenas representação decimal finita ou infinita e periódica. Para isso solicitamos que os estudantes investigassem o comportamento dos restos quando dividimos dois números: um natural por um natural não-nulo.

Na aula seguinte, novamente organizados nos mesmos grupos de trabalho, procedemos à discussão final das atividades propostas na aula anterior, solicitando que cada grupo apresentasse os resultados de suas investigações com o propósito de fazermos uma sistematização geral do conteúdo aprendido.

Na segunda atividade investigativa procedemos nos mesmos moldes da primeira. Fizemos uma introdução da atividade apresentando os objetivos e procurando incentivar um espírito investigativo na turma. Tendo em vista que no primeiro semestre do ano esses mesmos estudantes tinham sido introduzidos aos números irracionais por meio de trabalhos de pesquisa de caráter não investigativos sobre o número de ouro, propusemos que nessa segunda atividade fossem investigados alguns importantes aspectos desses números como a localização na reta numerada, a densidade e a infinidade – vide apêndice 4, tópico II.

Na aula seguinte, fizemos uma discussão final com todos os grupos novamente solicitando que os mesmos mostrassem aos demais suas contribuições e conclusões. Nessa ocasião, procuramos esclarecer aos estudantes algo que não havia sido contemplado nos trabalhos de pesquisa realizados no primeiro semestre do ano, a saber: que os números irracionais, sendo associados a pontos da reta numerada, representavam medidas de certos segmentos de reta e que, por essa razão, qualquer que fosse o segmento de reta dado, este haveria de ter um número racional ou irracional como representante de sua medida. Além disso, para finalizar esta aula, foram discutidos aspectos sobre a "criação" de números irracionais e sobre a infinidade e densidade dos mesmos.

3.3 Descrição do planejamento e da aplicação das atividades desenvolvidas no primeiro semestre de 2017

3.3.1 Planejamento

Tendo em vista os trabalhos aplicados no início de 2016 terem contemplado poucas atividades investigativas e aquele realizado em novembro ter obtido boa aceitação por parte dos estudantes, resolvemos iniciar o ano de 2017 utilizando-nos da experiência adquirida em 2016. Assim, aprimorando algumas ideias e mesclando aspectos das duas práticas realizadas em 2016, propusemos atividades investigativas nas novas turmas ingressantes no oitavo ano da mesma escola em 2017.

Iniciamos o cronograma planejado para o ensino dos números irracionais retomando basicamente o mesmo roteiro de aulas prévias adotado no começo de 2016, descritos no tópico 3.1. Foram abordados dois temas próprios do 8º ano a começar com o Teorema de Pitágoras seguido pelo cálculo de raízes quadradas de números racionais não negativos, por meio de fatorações ou com o uso de calculadora não científica para a investigação sobre sus representações decimais. Prosseguimos com uma rápida retomada dos conteúdos específicos trabalhados no 7º ano: revisão dos conjuntos numéricos e suas propriedades, as operações com frações, a representação decimal dos números racionais e a potenciação com expoente inteiro. Por fim, foram realizadas as aulas com atividades investigativas, cuja meta principal era a apresentação do conjunto dos números irracionais. Vale lembrar que a numeração de cada aula, abaixo descrita, não representa uma sequencialidade destas, mas sim, apenas uma forma de elencá-las na ordem em que ocorreram.

Muitas atividades de cunho institucional permearam, ao longo do tempo, a lista de aulas descritas. A seguir detalhamos o que foi planejado para cada uma delas.

- **Aula 01:** Atividade investigativa 1.
  Desafio em grupos visando induzir experimentalmente a "descoberta" do Teorema de Pitágoras, por meio do reconhecimento da conhecida propriedade, evidenciada na montagem de um quebra-cabeça – vide apêndice 2, tópico I.
- **Aula 02:** Aula investigativa 2.
  Resolução, em grupos, de exercícios envolvendo a aplicação do Teorema de Pitágoras com o uso de calculadora não científica para investigar a representação decimal aproximada de raízes quadradas por tentativas sucessivas – vide apêndice 2, tópico II.
- **Aulas 03 e 04:** Aula expositiva.
  Definição de raiz quadrada de um número racional não-negativo; cálculo de raízes quadradas por fatoração envolvendo números racionais não negativos com representação decimal finita – vide apêndice 2, tópico III.
- **Aulas 05:** Aula de correção de exercícios.
  Participação voluntária dos estudantes na resolução de exercícios na lousa, envolvendo o cálculo de raízes quadradas por fatoração de números racionais não negativos com representação decimal finita – vide apêndice 2, tópico III.
- **Aula 06:** Aula expositiva.
  Cálculo de raízes quadradas aproximadas de números racionais não negativos com representação decimal finita – vide apêndice 2, tópico III.
- **Aula 07:** Aula de correção de exercícios.
  Participação voluntária dos estudantes na resolução de exercícios na lousa envolvendo o cálculo de raízes quadradas aproximadas de números racionais não negativos com representação decimal finita – vide apêndice 2, tópico III.
- **Aula 08:** Aula expositiva.
  Aula com resolução de exercícios contextualizados envolvendo o cálculo de raízes quadradas – vide apêndice 2, tópico III.
- **Aula 09:** Aula de correção de exercícios.

Participação voluntária dos estudantes na resolução de exercícios na lousa envolvendo situações contextualizadas sobre o cálculo de raízes quadradas por fatoração ou de forma aproximada – vide apêndice 2, tópico III.

- **Aula 10:** Aula expositiva.

  Revisão de definições e propriedades de potências com expoentes inteiros – vide apêndice 2, tópico V.
- **Aula 11:** Resolução de exercícios em grupo.

  Resolução, em grupos, de exercícios envolvendo potências com expoentes inteiros – vide apêndice 2, tópico V.
- **Aula 12:** Aula de correção de exercícios.

  Participação voluntária dos estudantes na resolução de exercícios na lousa envolvendo a aplicação das propriedades das potências com expoente inteiro – vide apêndice 2, tópico – vide apêndice 2, tópico III.
- **Aula 13:** Aula expositiva.

  Revisão de definições e propriedades dos seguintes conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros e Racionais – vide apêndice 2, tópico IV.
- **Aula 14:** Aula expositiva.

  Exposição de variados exemplos abordando diferentes representações de um número racional e suas respectivas transformações – vide apêndice 2, tópico IV.
- **Aula 15:** Aula investigativa 3.

  Aplicação de atividade investigativa sobre os racionais. Investigações para verificar a validade da afirmação: “Toda fração (número racional) tem representação decimal finita ou infinita e periódica”. Vide apêndice 5, tópico I.
- **Aula 16:** Aula investigativa 3.

  Sistematização e discussão final em grande grupo, dos resultados obtidos durante a execução da primeira atividade investigativa.
- **Aula 17:** Aula expositiva.

  Primeira parte de uma aula expositiva sobre o procedimento para a determinação da fração geratriz de uma dízima periódica simples – vide apêndice 2, tópico VI.
- **Aula 18:** Aula expositiva.

Segunda parte de uma aula expositiva sobre o procedimento para a determinação da fração geratriz de dízimas periódicas compostas – vide apêndice 2, tópico VI.

- **Aulas 19 e 20:** Aula de correção de exercícios.

  Participação voluntária dos estudantes na resolução de exercícios na lousa, envolvendo mudança de representação de um número racional na sua forma decimal com infinitas casas periódicas após a vírgula para a forma fracionária – vide apêndice 2, tópico VI.
- **Aulas 21 e 22:** Aula investigativa 4.

  Aplicação de atividade investigativa com a finalidade de responder à seguinte questão: é possível determinar a representação decimal de qualquer raiz quadrada com a utilização de calculadora simples ou científica? Sistematização e discussão final sobre a atividade realizada. Vide apêndice 5, tópico II.
- **Aula 23:** Aula investigativa 5.

  Nesta aula foi apresentada a definição de comensurabilidade de segmentos de reta e realizada uma investigação que conduzisse à conclusão sobre a validade da seguinte afirmação: “Um segmento é comensurável com o segmento unitário se, e somente se, sua medida puder ser representada por uma fração”. Vide apêndice 5, tópico III.
- **Aula 24:** Aula investigativa 5.

  Sistematização e discussão final sobre as conclusões obtidas durante a realização da atividade investigativa 5.
- **Aula 25:** Aula expositiva.

  Apresentação da demonstração deixada pelos gregos sobre a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado e consequente discussão da irracionalidade do número $\sqrt{2}$.
- **Aula 26:** Aula investigativa 6.

  Investigações acerca de características inerentes aos números irracionais: localização na reta numérica, infinidade e densidade – vide apêndice 5, tópico IV.
- **Aula 27:** Aula expositiva.

Considerações finais sobre o conjunto dos números irracionais. Propriedades, operações e curiosidades – vide apêndice 2, tópico VII.

- **Aula 28:** Aula expositiva.
  Apresentação da atividade de pesquisa a ser realizada pelos estudantes sobre o número de ouro e outros temas como em 2016. Esclarecimentos acerca da justificativa do trabalho, seus objetivos e regulamentos. Momento para formação de grupos e sorteio dos diferentes temas.
- **Aula 29 e 30:** Aula expositiva.
  Apresentação e discussão dos vídeos elaborados pelos diferentes grupos de pesquisa sobre o número de ouro.
- **Aula 31:** Aula expositiva.
  Aula de fechamento com a construção do retângulo áureo e a determinação da razão áurea (nos moldes do que foi descrito no tópico 2.1), como exemplo de número irracional.

3.3.2 Aplicação e desenvolvimento

Na perspectiva de despertar uma atitude investigativa que suscitasse interesse e fosse capaz de envolver os estudantes como protagonistas frente ao estudo da Matemática, propusemos como primeira atividade investigativa um jogo em forma de quebra-cabeças.

Antes de iniciarmos propriamente os trabalhos, apresentamos a atividade a ser desenvolvida procurando motivar os estudantes a se empenharem com a mesma. Além disso, foram estipuladas regras que permeariam todo o trabalho investigativo, segundo as quais, o professor não poderia dar respostas diretas às perguntas dos estudantes, mas sim, instigá-los com novas perguntas na intenção de orientar e evitar que estes se perdessem ao longo de suas tentativas.

A proposta inicial era que os estudantes se apropriassem do resultado do Teorema de Pitágoras e, para isso, a turma foi dividida em grupos com três ou quatro estudantes, a fim de montarem, com as peças do quebra-cabeça, dois quadrados de mesma área. No apêndice 2 – tópico I, encontram-se detalhes da descrição da atividade (a mesma, proposta no primeiro semestre de 2016). Na aula seguinte, procedemos com uma segunda aula investigativa, ao abordar o Teorema de

Pitágoras, dando agora um enfoque de aplicação ao cálculo de lados (cateto ou hipotenusa) de um triângulo retângulo. Para isso foram elaboradas dez fichas diferentes, onde se pedia o cálculo ora de um cateto, ora da hipotenusa de algum triângulo retângulo – vide apêndice 2, tópico II. Aqui se esperava ver em que medida os estudantes dominavam o cálculo de raízes quadradas e tinham habilidades na resolução de equações. Propusemos que com o uso de calculadora não científica e sem o uso da tecla $\sqrt{\ }$, investigassem valores aproximados de raízes quadradas por tentativas sucessivas. Foram utilizadas outras aulas para a resolução e a correção de exercícios referentes ao cálculo de raízes quadradas, provenientes ou não do uso do Teorema de Pitágoras, por meio de fatorações ou com o uso de calculadoras não científicas.

Em seguida, em aulas expositivas, fizemos a abordagem das potências de expoente inteiro, retomando definição e propriedades – vide apêndice 2, tópico V. O passo seguinte foi a abordagem dos conjuntos numéricos – Naturais, Inteiros e Racionais – com suas respectivas propriedades – vide apêndice 2, tópico IV. Dado que os estudantes dominavam a determinação da representação fracionária de um número decimal com finitas casas depois da vírgula, introduzimos o procedimento para determinar frações geratrizes de dízimas periódicas conforme visto no parágrafo 2.2 item (a). Assim, ficou estabelecido que todo número que admite representação decimal finita ou infinita e periódica, admite também representação fracionária. Decidimos que a recíproca dessa propriedade seria trabalhada por meio de atividades investigativas propostas aos estudantes nos moldes das atividades desenvolvidas no segundo semestre de 2016.

Nesse sentido, a terceira atividade investigativa proposta teve como objetivo verificar a validade de tal afirmação: “Toda fração (número racional) possui uma representação decimal finita ou infinita e periódica”. Nessa atividade procuramos instigar os estudantes a observar como se comportam os restos de uma divisão entre dois números inteiros positivos – vide apêndice 5, tópico I. Em primeiro lugar, nosso intuito era levá-los a perceber que a quantidade de restos em uma divisão entre dois números (um natural por outro natural não-nulo) é finita, ou seja, se p e q são naturais com $q \neq 0$, os possíveis restos da divisão de p por q serão $0, 1, 2, 3, 4, \cdots, (q-1)$. Depois da descoberta desse fato em casos particulares, os estudantes elaboraram uma conjectura genérica sobre os valores possíveis dos restos de uma divisão entre um número natural e outro (também natural) diferente de zero. Em seguida, a partir do cálculo do quociente de algumas divisões propostas, os estudantes foram instigados a responder sobre o tipo de representação decimal que tais quocientes possuíam. Com efeito, percebendo que todos os quocientes calculados eram números com representação decimal finita ou infinita e periódica, os estudantes foram questionados a explicar o porquê desse fato. O que levava algumas frações a terem quocientes com representação decimal finita e outros não? No caso da representação decimal ser infinita, por que a mesma haveria de ser periódica? Na discussão final, com vistas à sistematização, chegamos a um consenso sobre a validade da afirmação proposta inicialmente. Queríamos assim favorecer a percepção de que uma fração concebida como o quociente entre dois inteiros positivos, terá representação decimal finita quando o resto da divisão for igual a zero e uma representação infinita em caso contrário. Além disso, o fato dessa representação ser periódica deve-se à quantidade finita dos possíveis restos dessa divisão. Por fim, fazendo as devidas considerações para as "frações" negativas tínhamos em mãos, ao final dessa atividade, o seguinte resultado: "Um número é racional se e somente se sua representação decimal for finita ou infinita e periódica".

A quarta atividade investigativa trazia a problemática sobre o tipo de representação decimal de alguns números, encontrados em atividades anteriores em representação com a utilização de radicais. Fazemos menção ao primeiro contato que os estudantes tiveram com esses números ao tentarem calcular a hipotenusa e os catetos de alguns triângulos retângulos nas aulas que se seguiram à aplicação do quebra-cabeça sobre o Teorema de Pitágoras. Naquela ocasião, o foco era o cálculo de algumas raízes quadradas, ora por fatoração, caso essas fossem exatas, ora por aproximações sucessivas, caso não fossem exatas. E para esse segundo caso utilizamos calculadoras não científicas, conforme apresentado anteriormente. Durante a realização dessa quarta atividade, o foco de interesse não estava mais dirigido ao cálculo em si de raízes quadradas, mas sim, ao tipo de representação decimal de tais números com radicais. Assim, propusemos três exercícios envolvendo a utilização do Teorema de Pitágoras onde, em cada um, aparecia um número escrito na forma de radical – vide apêndice 5, tópico II. O primeiro trazia a raiz quadrada de dois, o segundo a raiz quadrada de três e o terceiro a raiz quadrada de cinco. A primeira etapa da investigação consistiu em solicitar aos estudantes que, utilizando-se de uma calculadora simples (não científica) obtivessem as primeiras cinco casas decimais depois da vírgula desses números. Foi pedido que não se utilizasse para esse cálculo a tecla de raiz quadrada, mas que, por meio de diversas tentativas, fossem obtendo cada casa decimal sucessivamente. Em seguida solicitamos aos estudantes que escrevessem as dez primeiras casas decimais após a vírgula desses mesmos números, mas dessa vez fazendo o cálculo numa calculadora científica. Esta quarta atividade investigativa tinha como propósito levar os estudantes a perceberem que com o simples uso de uma calculadora, sendo ela científica ou não, é impossível decidir sobre qual seja a representação decimal de certos números escritos na forma de radicais, como: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$. De fato, no visor da calculadora aparece apenas um número finito de dígitos, o que não permite uma conclusão sobre se a representação decimal do número é finita ou infinita (periódica ou não), já que a parte decimal, após a vírgula, não aparece inteiramente no visor da calculadora. Com isso, esta quarta atividade foi concluída deixando aberta a questão inicial, pois com o uso da calculadora, a conclusão unânime entre os estudantes é de não ser possível afirmar que a representação decimal dos números considerados é finita ou infinita, ou mesmo se é periódica. Entretanto, a esta conclusão levantou entre os estudantes acenos para uma terceira possibilidade, até o momento não mencionada: de que tais números pudessem ter uma representação decimal diferente da finita e diferente da infinita e periódica, ou seja, que tais números pudessem ter uma representação infinita e não periódica.

Sabíamos que nesse momento nos aproximávamos do “coração” de todo o percurso investigativo que havíamos traçado e que, para responder à pergunta levantada na quarta atividade investigativa, deveríamos recorrer à demonstração da incomensurabilidade entre a diagonal de um quadrado de lado unitário e o seu próprio lado, feita pelos gregos. Assim, a fim de preparar o terreno para podermos enfrentar tal demonstração, elaboramos uma quinta atividade investigativa onde buscamos, em primeiro lugar, apresentar a definição de segmentos comensuráveis – tendo em vista este conteúdo não integrar o planejamento do oitavo ano, para a seguir podermos demonstrar um resultado intermediário sobre esses segmentos, a saber: “Um segmento é comensurável com um segmento unitário se, e somente se, sua medida for expressa por uma fração”. Tal resultado seria posteriormente utilizado quando enfrentássemos a demonstração citada anteriormente, feita pelos gregos.

Nesse sentido, a quinta atividade investigativa trouxe de início a definição de comensurabilidade entre segmentos de reta e, logo em seguida, dois exercícios de cunho investigativo. O primeiro, sugeria a obtenção de uma medida u capaz de comensurar as medidas dos pares de segmentos dados e, o segundo, fornecia um segmento unitário e pedia a determinação de um outro segmento que fosse comensurável com ele, além disso, pedia-se também, a unidade u capaz de medir os dois – vide apêndice 5, tópico III. Através das investigações realizadas nesses dois exercícios, os estudantes foram levados a perceber que quando um segmento é comensurável com outro suas medidas podem ser escritas como frações um do outro. Sendo um dos segmentos unitário, a medida do outro, sempre terá uma representação fracionária. Por fim, durante a discussão final dessa atividade, houve uma sistematização na qual os estudantes puderam perceber a validade do resultado posto como meta dessa atividade: “Um segmento é comensurável com um segmento unitário se, e somente se, sua medida for expressa por uma fração”.

Com o resultado obtido ao final desta quinta atividade investigativa chegara o momento de responder à pergunta levantada na quarta atividade, ou seja, que tipo de representação decimal os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ possuem. Para isso apresentamos, por meio de uma aula expositiva bastante dialogada, carregada de um clima de suspense e com muitas motivações e indagações, uma demonstração indutiva para a incomensurabilidade entre a diagonal de um quadrado de lado unitário e o seu próprio lado. Seguimos na íntegra os passos descritos no capítulo 2, tópico 2.3.

A aula inteira transcorreu como uma conversa, realmente um diálogo do professor com os alunos. O professor, utilizando-se de régua e compasso, foi construindo na lousa cada passagem da demonstração feita pelos gregos, dando tempo para que os estudantes pudessem compreender, argumentar e assimilar o que havia sido feito. Houve momentos de interação onde os próprios estudantes eram chamados à lousa para darem sugestões em relação à passagem em questão. Por exemplo, logo de início, quando o quadrado inicial e a sua diagonal estavam já construídos, o professor pediu que alguns estudantes viessem à lousa para sugerir algumas medidas u que lhes parecessem serem capazes de comensurar a diagonal e o lado do quadrado. Tal fato desencadeou o interesse dos estudantes e favoreceu um maior envolvimento com a demonstração. Prosseguimos os passos sucessivos da prova, sempre dando espaço e tempo para a participação e a assimilação por parte dos estudantes do que lhes era proposto. Desenhamos na lousa uma régua tomando por base o segmento de medida unitária escolhido para ser o lado do quadrado inicial. A cada passo da demonstração, quando um novo quadrado era construído, solicitávamos aos estudantes que se atentassem para dois importantes fatos: primeiro que a medida u escolhida no início da demonstração, também comensurava o lado e a diagonal de cada novo quadrado construído; além disso, transferindo-se, para a régua criada, a medida do lado de cada um desses novos quadrados, podia-se ver que a medida do mesmo era sempre menor que a metade da medida do lado do quadrado precedente construído. Os próprios estudantes perceberam facilmente que tais construções poderiam ser repetidas indefinidamente, de tal forma que em um determinado momento seria construído um quadrado com lado tão pequeno que a medida u seria maior do que a medida do seu lado. Esse fato acabava por impossibilitar que o segmento de medida u comensurasse o lado deste quadrado com sua diagonal. Ao término das sucessivas construções realizadas e utilizando-se das conclusões intermediárias obtidas ao longo da demonstração, chegamos à conclusão final de que não pode existir um segmento de medida u que comensure o lado unitário de um quadrado com sua diagonal, pois isso redundaria necessariamente na possibilidade da construção de outro quadrado com lado de medida menor do que u, para o qual o segmento de medida u comensuraria seu lado com sua diagonal, o que é evidentemente impossível.

A seguir o professor levantou a possibilidade de que isso só havia ocorrido pelo fato de termos escolhido aquele determinado segmento como a medida u e que talvez, se tivéssemos escolhido outro segmento de medida v menor que o anterior, tal fato pudesse não ter ocorrido. A essa consideração do professor a reação unânime da turma foi de afirmar que poderíamos continuar nossa construção até obtermos um quadrado cuja medida de seu lado seria novamente menor do que v. Ficando assim estabelecido que não pode existir nenhuma medida de segmento capaz de comensurar o lado do quadrado unitário com sua diagonal.

Com isso, ligando o resultado de tal demonstração ao que fora concluído ao final da quinta atividade investigativa, pudemos concluir que a medida da diagonal do quadrado de lado unitário, $\sqrt{2}$, não pode ser um número com representação fracionária e, portanto, ligando tal fato à conclusão obtida ao final da terceira atividade investigativa, $\sqrt{2}$ não pode possuir também uma representação decimal nem finita e nem infinita e periódica, restando-lhe apenas a possibilidade de ter uma representação decimal infinita e não periódica. Nesse momento, foi então definido que $\sqrt{2}$, não sendo um número racional (pelas conclusões vistas na terceira atividade investigativa), seria chamado de número irracional.

Esta aula dialogada representou a resposta que pudemos dar à questão de gerar um impasse que levasse à consciência dos estudantes sobre a necessidade da existência de um número não racional, cuja representação decimal só poderia ser infinita e não periódica. Esta foi a contribuição que nos pareceu possível nesse nível escolar quanto à esta questão de criar tal impasse. Com essa aula, quisemos gerar a motivação para uma posterior atividade investigativa sobre a localização na reta numerada de “números” com representação decimal infinita e não periódica. O intuito dessa atividade foi que os estudantes pudessem conceber a existência de segmentos com tais medidas, e assim estabelecer uma associação natural entre medidas de segmentos na reta numerada e representações decimais infinitas e não periódicas. Pretendemos gerar assim nos estudantes a concepção de que existem muitos segmentos cuja medida não pode ser expressa por um número racional e, com isso, que atribuíssem o significado de números às representações decimais infinitas e não periódicas (por representarem medidas de certos segmentos de reta). Com tais atividades passamos a assumir como definição de números irracionais a qualquer medida de segmento cuja representação decimal seja infinita e não periódica.

A sexta atividade investigativa – vide apêndice 5, tópico IV, baseando-se no fato dos estudantes já saberem da existência dos números irracionais, procurou introduzir algumas propriedades importantes desses novos números: sua localização na reta numerada, a quantidade dos mesmos e a sua densidade. Primeiramente foi pedido aos estudantes que construíssem, em escala, triângulos retângulos distintos em que aparecessem as medidas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ (pedimos que retomassem a folha da quarta atividade investigativa pois nela teriam melhor ideia de como poderiam ser esses triângulos). Após tal construção, foi solicitado que transportassem esses segmentos para uma reta numerada a ser desenhada pelos próprios estudantes. Esperávamos com isso que eles pudessem tomar conhecimento de que os números irracionais, possuindo uma localização precisa na reta numerada, não só estariam associados a medidas de segmentos, como também eram os responsáveis por completar tal reta. A questão da quantidade de números irracionais foi também abordada por meio de um exercício onde era pedido que os estudantes criassem algum número irracional compreendido entre 0 e 1. Não bastava apenas mostrar um número com infinitas casas decimais não periódicas após a vírgula, era necessário também descrever a razão que o levava a afirmar que tal número realmente é irracional. A fim de mostrar que não se tratava de qualquer tipo de descrição, apresentamos um exercício no qual vinha informada a lei de formação das casas decimais após a vírgula do número $0{,}112358314\ldots$.

> Considere o número real dado por 0,112358314..., onde cada dígito posterior à vírgula, a partir do terceiro, é obtido somando os dois dígitos anteriores, ficando-se apenas com o algarismo das unidades desta soma e desprezando os demais. Esse número é racional ou irracional? Justifique.

Segundo essa lei, tal número inicialmente aparenta possuir representação decimal infinita e não periódica. Porém, se prosseguirmos no desenvolvimento da lei de formação dada um período ficará determinado após as sessenta primeiras casas decimais após a vírgula daquele número. Esse exercício foi interessante por levantar uma discussão a respeito do tipo de característica que a descrição das casas decimais após a vírgula deve ter para garantir que nenhum tipo de período apareça.

Por último, ainda nesta sexta atividade investigativa, procuramos sensibilizar os estudantes sobre a questão da densidade dos números irracionais. A noção de densidade foi introduzida a partir de um exercício onde os estudantes eram convidados a escrever dois números, um racional e um irracional, entre dois números racionais relativamente muito próximos dados.

Por fim, na aula seguinte à realização da sexta atividade investigativa, ainda foi feita uma complementação e sistematização de alguns tópicos relacionados aos números irracionais. Entre estes tópicos, destacamos: a definição de número irracional; as quatro operações básicas efetuadas entre números irracionais e racionais e entre números irracionais e irracionais; a questão da densidade e da quantidade de número irracionais; a apresentação de diversos outros exemplos de números irracionais; e alguns exercícios que retomavam aspectos vistos ao longo das atividades investigativas. As notas dessa aula podem ser encontradas no apêndice 2 – tópico VII.

Ao término do percurso de estudo para a introdução dos números irracionais realizado por meio de atividades investigativas, foi solicitado um trabalho de pesquisa em grupos, nos moldes dos trabalhos realizados sobre o número de ouro no início de 2016. Desta vez, porém, ao invés dos estudantes apresentarem uma aula expositiva, foi proposto a gravação de um vídeo com duração máxima de cinco minutos cada. Dividimos as turmas em oito grupos com aproximadamente quatro ou cinco integrantes e repropusemos os mesmos oito temas indicados em 2016: o retângulo áureo (aplicações e aspectos matemáticos); a sequência de Fibonacci (aplicações e aspectos matemáticos); o pentagrama (aplicações e aspectos matemáticos); a raiz quadrada de dois e o número π (vide apêndice 1). Foram dadas aproximadamente três semanas de prazo para a gravação desses vídeos e, ao final desse período, reservamos uma aula para que todos os estudantes assistissem aos oito vídeos de sua turma, possibilitando que tomassem conhecimento do tema trabalhado pelos outros grupos e, principalmente, que tomassem conhecimento das diferentes aplicações e sobre a presença do número de ouro em diversas situações de modelagem matemática da realidade. Por fim, tendo sido assistidos os vídeos, concluímos o percurso desenvolvido em 2017 com uma última aula expositiva, também bastante dialogada na qual discutimos a construção do retângulo áureo apresentada nos próprios vídeos dos estudantes. Aproveitamos essa ocasião para, então, mostrar a obtenção do valor da razão áurea, não utilizando qualquer resolução de equações de 2º grau, mas sim repercorrendo exatamente os passos estudados quando da aplicação da primeira atividade no início de 2016 e presentes no tópico 2.1.

Capítulo 4 – Análise dos resultados das atividades didáticas desenvolvidas

À luz das questões norteadoras e da fundamentação teórica adotada para fins desta dissertação, apresentamos no presente capítulo, uma análise qualitativa das atividades didáticas aplicadas em cada um dos momentos específicos desta pesquisa: primeiro semestre de 2016, segundo semestre de 2016 e primeiro semestre de 2017.

Desde o início de nossa pesquisa, pretendíamos encontrar atividades de cunho investigativo que possibilitassem uma introdução significativa dos números irracionais aos estudantes, contudo a dificuldade na implementação e criação de tais atividades obrigou-nos a tomar também outros caminhos que, de algum modo fizessem prevalecer o envolvimento e protagonismo dos estudantes. Conforme dissemos em capítulos anteriores, um desses outros caminhos foi o da realização, por parte dos estudantes, de um trabalho de pesquisa relacionado a alguns números irracionais, em especial o número de ouro. No tópico 4.1 fazemos uma análise da contribuição que tais trabalhos exerceram em relação ao ensino e aprendizagem dos números irracionais no tocante à metodologia do trabalho em grupos empregada, à apresentação dos mesmos, a pertinência do tema e ao envolvimento dos estudantes para com o estudo de Matemática.

Em seguida, no tópico 4.2, fazemos uma breve análise das observações feitas ao longo das aplicações de atividades investigativas no segundo semestre de 2016. Os atores dessa segunda etapa eram os mesmos da primeira e ainda que tais atividades tenham sido modestas no tocante ao número de aulas e conteúdos envolvidos, procuramos observar suas influências na aprendizagem e na motivação dos estudantes.

O último tópico 4.3 contém a análise das atividades investigativas realizadas no primeiro semestre de 2017. Considerando a experiência adquirida em todo o percurso de 2016 (primeiro e segundo semestres), foi possível identificar que estas atividades didáticas tiveram maior abrangência e consequente consistência em relação às do ano anterior.

Convém ainda destacar que no texto que segue, o leitor encontrará a descrição de um percurso investigativo tanto da parte de quem planejou e aplicou tais atividades, quanto do público alvo dessa pesquisa – jovens dos oitavos anos.

4.1 Análise das atividades didáticas aplicadas no primeiro semestre de 2016

Os trabalhos de pesquisa dos estudantes desenvolvidos no primeiro semestre de 2016 foram precedidos de um considerável período de preparação. Dentre as atividades propostas apenas duas possuíram caráter investigativo, a saber: a atividade com quebra-cabeças para o aprendizado do Teorema de Pitágoras e a determinação das casas decimais após a vírgula de algumas raízes quadradas por tentativas sucessivas e com calculadora simples.

O enunciado da atividade sobre o Teorema de Pitágoras foi o seguinte: “Vocês têm 15 minutos para formar dois quadrados congruentes utilizando essas 11 peças. Todas as peças deverão ser utilizadas, nenhuma delas poderá ficar de fora e, não poderão ocorrer sobreposição entre as mesmas”. (Vide apêndice 2, tópico I). Observamos que a atividade instigou os estudantes a assumirem um posicionamento bastante diferente do usualmente encontrado em aulas expositivas de Matemática, o que provavelmente foi devido ao caráter desafiador da mesma.

O fato é que diante da proposta feita pudemos perceber um grande envolvimento por parte dos estudantes na tentativa de resolver o desafio proposto. Por essa razão, segundo as palavras de Ollerton (Apud PONTE, 1998, p.18, citadas à página 40 desta dissertação), este foi um exemplo de atividade investigativa em que a tarefa proposta constituiu um *começo apropriado para todos trabalharem* permitindo, dessa forma, que os estudantes detivessem *a maior parte da responsabilidade* no seu desenvolvimento. Um começo prático, como foi o caso dessa atividade, segundo o autor permite *prover experiências concretas a partir das quais diferentes abstrações possam ser feitas*.

Ainda que a atividade tenha se apresentado instigante aos olhos dos estudantes e logrado êxito no sentido de despertar um envolvimento e protagonismo dos mesmos, ao término das suas construções os grupos ficavam ociosos, por não terem outras tarefas indicadas a cumprir. Com isso, um ambiente de dispersão começava a se instaurar. Em razão dessa observação avaliamos, a posteriori, que teria sido mais adequado incluir no enunciado do desafio uma pergunta sobre o que se pode concluir a partir da construção dos dois quadrados solicitados feita, ao invés de deixá-la para o momento da sistematização conforme nosso planejamento. Convém, portanto, incluir no enunciado da atividade uma questão do tipo: “Observando esses dois quadrados, que conclusão ou conclusões podemos tirar? O que eles estão nos dizendo?” (Vide apêndice 2, tópico I). Com isso imaginamos que ficariam respeitados os diferentes ritmos de trabalho dos grupos ao mesmo tempo em que evitaríamos a dispersão dos que terminaram mais rápido sua construção. Dessa forma fomentaríamos o levantamento de conjecturas e a formulação de argumentações sobre elas no interior do trabalho dos grupos, fazendo com que o próprio enunciado ficasse mais completo no sentido de criar *oportunidades para os alunos explorarem ideias e colocarem questões* – o que é mais um dos cuidados sugeridos por Ollerton. Vale ainda ressaltar que, mesmo com essa lacuna, a atividade contribuiu para que os estudantes atribuíssem significado ao Teorema de Pitágoras ou, nos termos do mesmo autor, permitiu que o conteúdo fosse processado por eles.

A segunda atividade de cunho investigativo desenvolvida com os estudantes caracterizou-se por ser muito breve e simples. A proposta foi que os estudantes realizassem o cálculo aproximado de algumas raízes quadradas com o uso de calculadora simples (sem radiciação). Durante essa atividade, os estudantes perguntavam qual seria a razão de se calcular a raiz quadrada daquela forma, usando aproximações sucessivas. Na verdade, a intenção era que começassem a perguntar-se sobre o tipo de representação decimal que alguns números possuíam, além de servir de diagnóstico da compreensão dos estudantes sobre o valor posicional dos algarismos depois da vírgula no sistema decimal de numeração. Essa atividade mobilizou em boa medida a maioria dos estudantes, porém alguns, não suportando a demora de tais cálculos, de forma escondida obtiveram o resultado utilizando diretamente a tecla $\sqrt{\ }$. É fato que não fomos incisivos para que adotassem o procedimento proposto, talvez por falta de uma maior clareza nossa, naquele momento, sobre os objetivos da atividade. De todo modo ela revelou-se útil no momento em que discutimos a densidade dos números irracionais na reta numerada, conforme será comentado no tópico seguinte.

Os trabalhos de pesquisa realizados pelos diferentes grupos de estudantes em cada turma constituíram o ponto central das atividades desenvolvidas nesse primeiro semestre. Da experiência feita, desde a preparação à apresentação propriamente dita de cada grupo, há muito que se dizer. Em primeiro lugar, nos momentos de preparo, percebemos uma grande dificuldade em identificar dentre os vários resultados de uma pesquisa na *internet*, aquele que de fato configurasse uma informação segura. O deparar-se com textos da história da Matemática foi outra experiência nova para os estudantes. Também suas capacidades de leitura e interpretação de textos matemáticos mostraram-se bastante precárias. A experiência das apresentações foi um tanto constrangedora para vários estudantes. Alguns demonstravam não ter a menor consciência do que estavam dizendo. De fato, não é comum ser solicitado um trabalho de Matemática que leve os estudantes diante da sala e que deles demande uma impostação frente aos amigos. Em cerca de 40% das apresentações, presenciamos um grande despreparo sobre o que tinha sido solicitado que falassem. Muitos dos estudantes ficaram nervosos, falaram em um tom de voz extremamente baixo. Foram frequentes frases curtas, pouco significativas ou até mesmo confusas. Boa parte dos estudantes leram suas falas dos próprios slides ou então de folhas avulsas que os mesmos traziam. Enquanto isso, a experiência de alguns que assistiam as apresentações não era das melhores, demonstrando certo desconforto e distração em alguns momentos. Porém, mesmo tendo acontecido todos esses fatos, não podemos deixar de citar as apresentações que redundaram em experiências positivas e satisfatórias. Em cerca de 60% dos casos pudemos ver exemplos de dedicação, superação e esforço por fazer uma boa apresentação. De qualquer forma, o deparar-se com novos números em diferentes situações da natureza e nas artes, em particular o número de ouro, ocasionou grande surpresa e encanto na maior parte dos estudantes.

No intuito de coletar informações que propiciassem uma análise consistente dos resultados dos trabalhos de pesquisa realizados pelos estudantes, bem como, das respectivas apresentações, passadas algumas semanas do término destas, como instrumento avaliativo, aplicamos nas cinco turmas que estavam sob nossa responsabilidade (cento e oitenta e dois estudantes) um questionário contendo duas perguntas: a primeira relativa ao conceito de números irracionais e a segunda sobre as experiências pessoais vivenciadas pelos estudantes como atores e como ouvintes, durante o desenvolvimento e apresentação dos trabalhos de pesquisa – vide apêndice 3. Devido a questões relativas à organização e ao planejamento da série, não foi possível aplicar esse mesmo questionário nas outras três turmas, sob a responsabilidade do outro professor.

Das respostas à primeira pergunta do questionário (*Com base nos conhecimentos aprendidos durante a realização dos trabalhos em grupo a respeito dos números irracionais descreva, com suas palavras, a definição de número irracional e apresente as diferenças que considera essenciais entre estes números e os números racionais.*), é possível verificar que cerca de 43% dos estudantes afirmaram que um número irracional é aquele que não possui representação fracionária; em cerca de 52%, encontramos respostas afirmando que um número irracional possui representação decimal infinita e não periódica. Além disso, em um quarto dos questionários presenciamos respostas simultâneas às duas características anteriormente mencionadas. Dessa forma, do ponto de vista do aprendizado, avaliamos que o resultado foi bastante satisfatório, principalmente ao compararmos com aferições de aprendizagem sobre o mesmo conceito em turmas dos anos anteriores. Vimos ainda que quase a metade de todos os estudantes soube diferenciar um número racional de um irracional. Por fim, em cerca de 36% dos questionários foram encontradas respostas completamente ou parcialmente erradas e respostas do tipo “Não lembro”. Segue o gráfico com a consolidação dos dados referentes às respostas à primeira pergunta do questionário nas várias turmas.

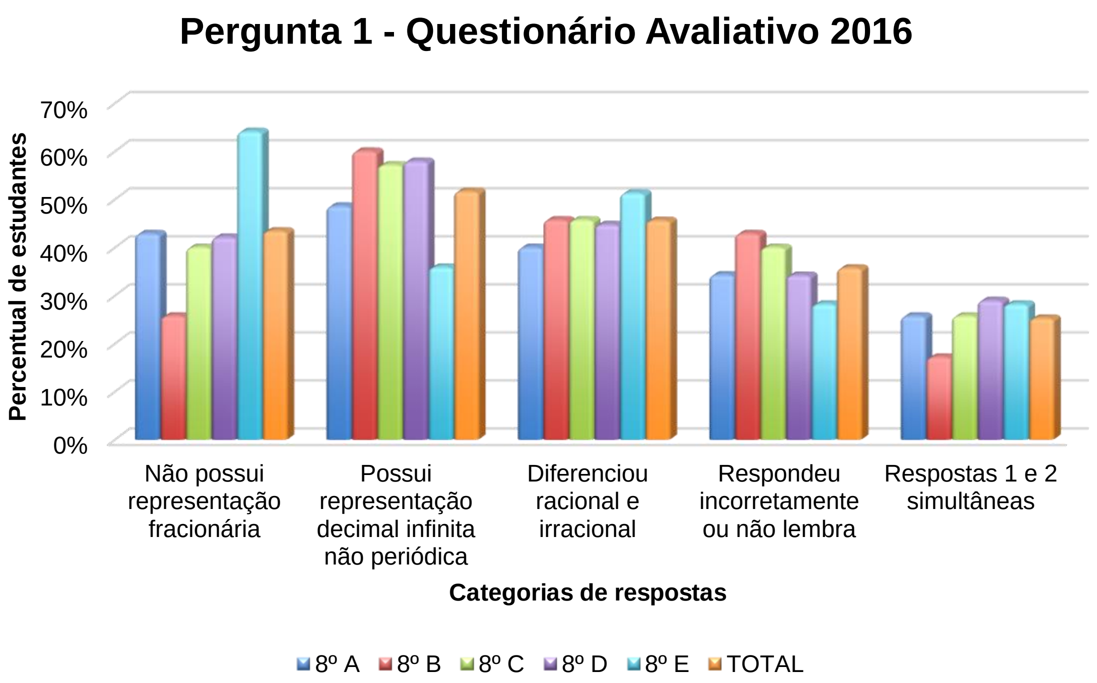


Figura 12 – Sobre a definição de números irracionais

Com as respostas referentes à segunda pergunta do questionário (*Comente a respeito da experiência que você fez durante a realização dos trabalhos em grupo, sobre a investigação de certos aspectos dos números irracionais: Como foi a dinâmica do grupo, todos deram palpites? Você achou interessante o tema, a pesquisa feita, o resultado que obtiveram e a apresentação do grupo? Você achou interessantes as apresentações dos colegas, aprendeu o que com elas? O que mais te impressionou ao estudar tais números?*), é possível inicialmente constatar uma forte correspondência entre as questões norteadoras de nossa pesquisa e as diferentes respostas dadas pelos estudantes. De fato, com a segunda pergunta do questionário procurávamos obter informações a respeito dos trabalhos em grupo, das apresentações e da aceitabilidade do tema. Esperávamos ver em que medida a experiência vivida no decorrer dos trabalhos de pesquisa teria despertado um maior interesse e envolvimento com o estudo de Matemática. Dentre as respostas relativas ao trabalho em grupo e às apresentações, pudemos perceber uma considerável aceitação da metodologia de trabalhos em grupos, uma ampla participação dos integrantes e uma boa apreciação das apresentações dos colegas. Apesar disso, diante do despreparo e do caráter incomum de se ter apresentações de grupos em aulas de Matemática, observamos uma menor aprovação entre os estudantes sobre a apresentação do próprio grupo. Com efeito, em muitos relatos pudemos perceber a insatisfação com a própria apresentação ou organização do grupo. Em nossa opinião, as apresentações propriamente ditas demonstraram ser um desafio mais difícil do que imaginamos inicialmente. Assim sendo, avaliamos ser necessário destinar algumas aulas prévias para um breve ensaio das apresentações, seguidos de pequenas orientações e correções por parte do professor, o que, na nossa inexperiência, não nos ocorreu fazer. Com isso, muito provavelmente o clima de nervosismo e ansiedade antecedente à maior parte das apresentações poderia ter sido atenuado, possivelmente potencializando a eficácia da transmissão dos conteúdos apresentados e com um consequente maior interesse e aproveitamento por parte dos colegas. Segue o gráfico consolidado com as respostas referentes à segunda pergunta do questionário no que diz respeito à metodologia do trabalho em grupo.

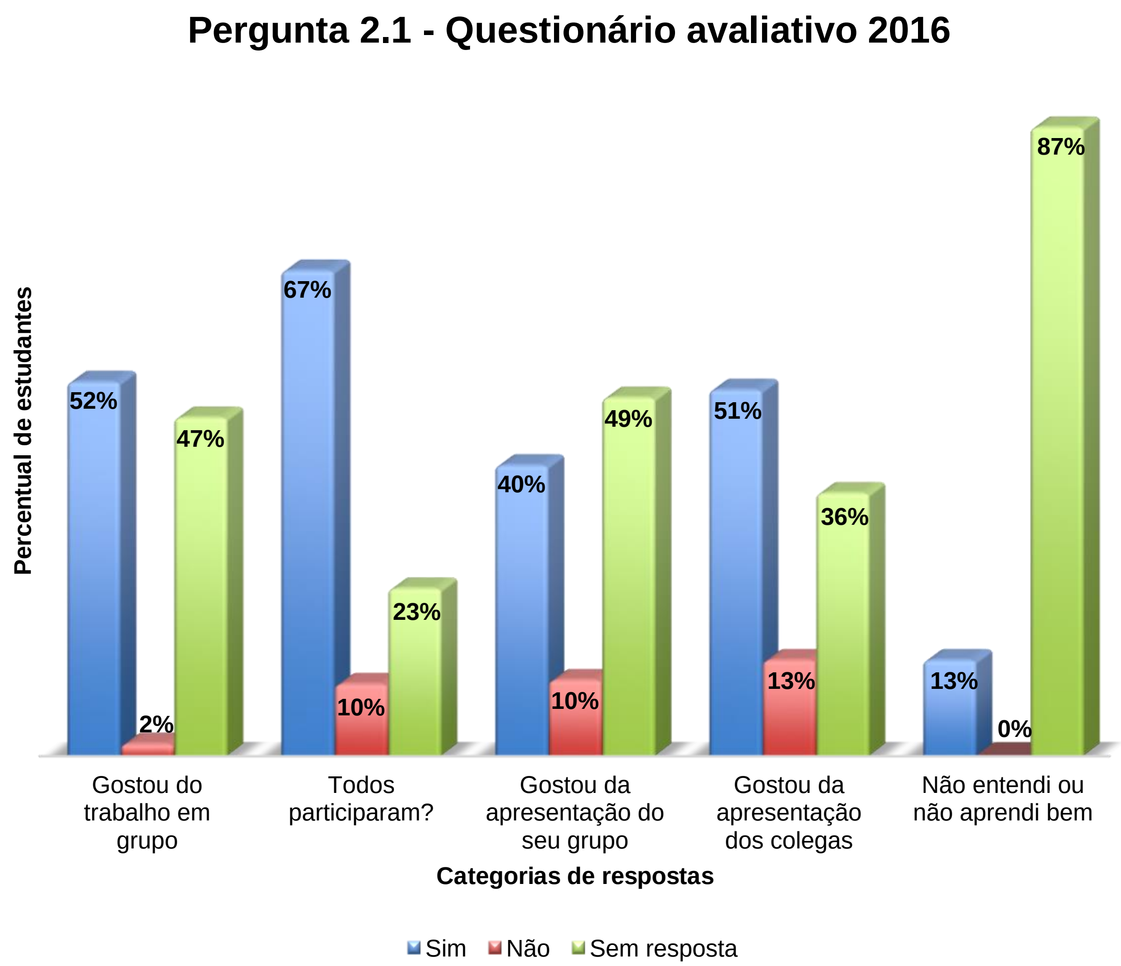


Figura 13 – Sobre a metodologia de trabalho em grupo

Retomando a correlação constatada entre nossa primeira questão norteadora (Uma metodologia de ensino/aprendizagem baseada em investigações matemáticas pode despertar em estudantes de 8º ano do Ensino Fundamental uma atitude de protagonismo e maior envolvimento relativamente à sua própria aprendizagem de Matemática?), a seguir selecionamos alguns relatos na intenção de evidenciar o envolvimento e protagonismo vivenciado pelos estudantes durante a realização dos trabalhos de pesquisa apresentados.

> *“Acho que o trabalho foi muito interessante, com uma maneira muito mais dinâmica: nós nos tornamos os professores. Fizemos perguntas para a classe, a classe nos fez perguntas, todos demos palpites, etc. O trabalho foi interessante, principalmente o tema, onde pudemos pesquisar em que lugares da natureza podemos encontrar o pentagrama. Mesmo tendo aula com alunos e não professores, conseguimos aprender diversas coisas, e o mais interessante foi o número de ouro”.*
>
> *“Esse trabalho me impressionou, pois eu aprendi muitas curiosidades apresentadas pelos alunos que pesquisaram em livros na biblioteca, assim gostei do modo como os alunos se envolveram ao trabalho”.*
>
> *“Esse trabalho foi muito bom, pois acho que a dinâmica é uma parte importante do aprendizado, onde no caso precisou de muita pesquisa e esforço de toda a equipe, além do que no trabalho você tem a responsabilidade de explicar o tema para os outros grupos”.*
>
> *“Eu achei incrível o fato de os alunos fazerem grupos para apresentar um certo tema na sala de aula. Os alunos se ajudaram, pesquisaram, se respeitaram e, no final, apresentaram com PowerPoint, imagens, vídeos, etc.”.*
>
> *“Achei interessante a dinâmica dos grupos, ajudou bastante na pesquisa e no desenvolvimento. Eu particularmente não gosto de matemática, mas gostei do trabalho apresentado (...)”.*
>
> *“Eu gostei do trabalho, nele foi possível aprender rindo e com o seu colega que não é um professor. Nele eu e minhas amigas descobrimos coisas que não sabíamos e tiramos nossas dúvidas. Achei um modo diferente de aprender do que o professor na frente explicando, na verdade a gente era o professor”.*

Resumidamente, em relação à nossa primeira questão norteadora vale observar que as pesquisas realizadas mesmo não se constituindo atividades investigativas, puderam contribuir para a motivação e o aprendizado significativo dos números irracionais.

Um aspecto evidenciado nos questionários foi a boa aceitação do tema proposto. Dentre as cinco turmas analisadas notamos que em apenas uma a aprovação do tema pelos estudantes ficou abaixo de 50%. Essa constatação nos leva a reconhecer a pertinência que teve o trabalho em torno do número de ouro. De fato, muitas foram as expressões que revelaram um positivo espanto frente a "presença" aproximada do número de ouro na natureza, nas diferentes obras arquitetônicas e artísticas. No gráfico a seguir, podemos ver um panorama geral de tal aceitação.

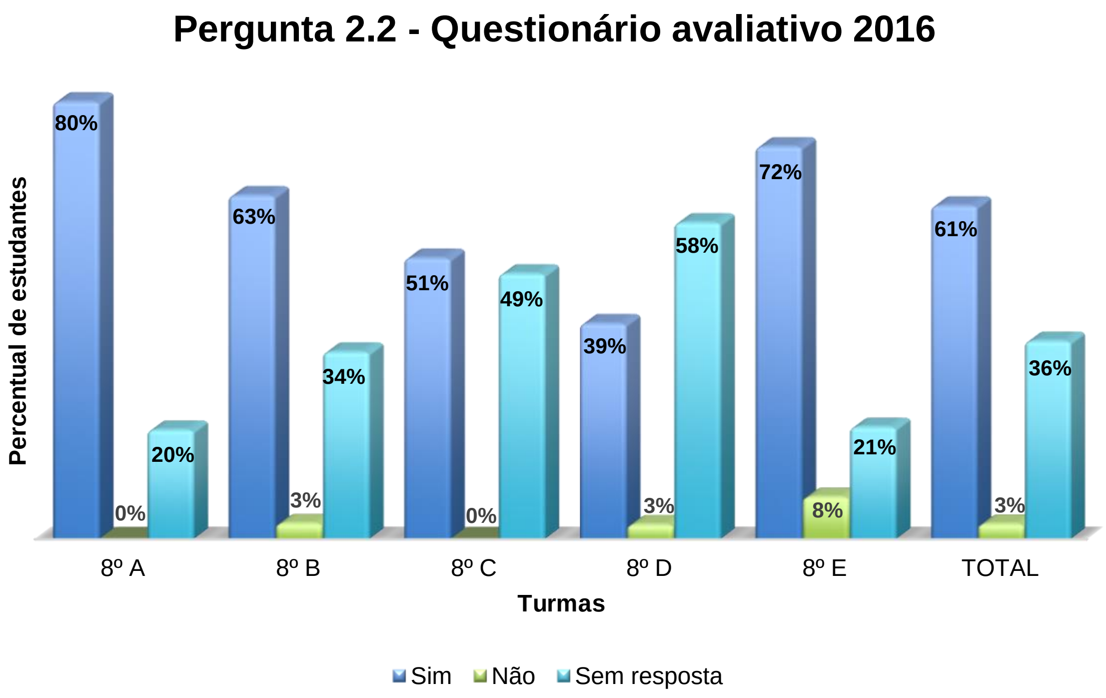


Figura 14 – Você achou interessante o tema pesquisado?

Em muitos outros relatos foi possível encontrar uma significativa abertura de horizontes para a percepção sobre o quanto a Matemática pode estar "presente" na natureza, nas artes ou na arquitetura. Sabemos na verdade, que não é que a Matemática esteja presente nesses lugares ou em lugar algum, mas é na mente humana onde ela reside e, portanto, o que vemos é a modelagem feita pelo homem com o propósito de compreender e explicar a realidade que o circunda. É interessante observar a surpresa com que diferentes fenômenos foram acolhidos pelos estudantes ao perceberem que boa parte deles podem ser vistos como intrinsecamente ligados entre si. Seguem alguns relatos que exemplificam a ampliação da motivação dos estudantes para com o estudo do tema.

> *"Achei interessante todos os trabalhos, mas em especial o meu que era sobre o retângulo áureo e sobre a sequência de Fibonacci, fiquei impressionada com o quanto estes dois temas estão presentes no dia-a-dia, (na natureza e arquitetura por exemplo) e pelo menos para mim, passavam sempre despercebidos".*

> *"O que mais me impressionou foram as ligações que tiveram entre os grupos e suas representações na natureza".*
>
> *"Eu me impressionei quando aprendi fazer o pentagrama com o papel e quando vi que o pentagrama estava dentro da maçã. (...)".*
>
> *"(...) o que mais me impressionou foi o fato da sequência de Fibonacci estar presente na natureza".*
>
> *"O que mais me impressionou ao estudar, foi como tudo está interligado, temas que pareciam tão distintos têm muito em comum".*

Admitimos que as atividades didáticas realizadas no início de 2016 não geraram o impasse, mencionado na introdução desta dissertação, que fizesse despertar a necessidade de números não racionais, seja para medir segmentos ou para modelar diversas situações da natureza, das artes e da arquitetura.

Mesmo assim, diante das respostas apresentadas nos questionários avaliativos, vimos o quanto os trabalhos de pesquisa sensibilizaram os estudantes e provocaram a ampliação de significados acerca de certos números, inicialmente "estranhos", como o Φ (phi), o π (pi) e a $\sqrt{2}$. Com isso, foi possível aos estudantes vislumbrarem a "presença" da Matemática no mundo, ou seja, como o ser humano enxerga e organiza um entendimento da natureza via Matemática.

Em pouco tempo, no decorrer do processo educativo, tais números "estranhos" foram chamados de irracionais. Embora o conceito de número irracional não tenha sido construído pelos próprios estudantes e sim sido aceito com base na autoridade do professor (como se uma espécie de rótulo tivesse sido colocado sobre eles), mesmo assim os estudantes se impressionaram revelando concepções muito mais ricas e significativas do que observamos em turmas anteriores. Seguem alguns relatos que exemplificam a ampliação de significados concebidos pelos estudantes.

> *"O que mais me impressionou é que como um número pode ser infinito".*
>
> *"(...) o que mais me impressionou foi que eles são infinitos, porém nunca repetem uma certa ordem".*
>
> *"O que mais me impressionou foi a quantidade ser maior do que o grupo dos racionais".*
>
> *"O que mais me impressionou foi a quantidade de números existentes! Existem muitos! Quando nós pensávamos que havia somente 1, 2, 3, 4, 5...".*
>
> *'O que mais me impressionou ao estudar esses números foi que existem muito mais deles do que eu imaginava".*

> *"O que mais me impressionou foi o Φ, eu pensava que só existia o π, mais não, existe uma infinidade de números".*
>
> *"Me impressionou que os mesmos não podem ser representados como fração, além de que alguns desses números podem ser achados na natureza, como por exemplo, o número de ouro".*

Assim, o que se pôde observar até o momento, é que embora o conceito de número irracional ainda não seja tratado com desenvoltura por parte dos estudantes, toda a experiência adquirida durante a preparação (pesquisas, leituras, ensaios, esclarecimento de dúvidas, entrar em contato com aspectos da história da Matemática, etc.) e apresentação propriamente dita dos trabalhos, desencadeou uma relevante mobilização e um maior envolvimento dos mesmos com a Matemática.

Por fim, convêm destacar algumas sugestões ou críticas, enunciadas nas respostas do questionário por alguns estudantes (não mais que 5% do total), a respeito dos trabalhos de pesquisa apresentados.

> *"As apresentações foram bem legais, claras, mas faltou atividades sobre elas para fixar na nossa cabeça".*
>
> *"As apresentações dos meus colegas foram legais, porém acho que o trabalho poderia ter mais dinâmica como apresentar o slide e chamar algum voluntário na lousa etc.".*
>
> *"Só não gostei de alguns outros grupos, que me dificultaram entender alguns conceitos, então, acho que seria bom, após o trabalho, o professor fazer um "resumo" do assunto".*
>
> *"Eu achei essa experiência boa, mas a única coisa que faltou foi mais aulas para fazer o trabalho".*
>
> *"A minha apresentação e dos meus colegas foi boa, porém o professor ficou interrompendo e não aprendi nada e não fiquei tão interessado na matéria".*

De fato, administrar o ambiente da sala de aula no momento em que estão acontecendo as diferentes apresentações não é tarefa simples para o professor. Tudo flui de maneira equilibrada quando um grupo bem preparado e coeso expõe o seu trabalho de forma articulada: a turma participa, se interessa, faz perguntas e interage com o grupo. Em contrapartida, se os integrantes do grupo apresentam suas falas a partir da leitura de notas em papel ou mesmo de slides em PowerPoint, com significativa timidez, baixo tom de voz e falta de interação com a mesma, a turma começa a se distrair e a se desinteressar ao longo da apresentação. É nesse momento que a atuação do professor se torna mais decisiva. Além de cuidar do conteúdo e dinâmica das apresentações assegurando que informações corretas e significativas sejam comunicadas, ele também deve gerenciar a falta de atenção e consequentes conversas paralelas entre os estudantes. Tudo isso pode gerar um processo cíclico: o nervosismo ou despreparo do grupo expositor levam a um desinteresse dos colegas e, consequentemente, a falta de atenção da turma desestabiliza ainda mais a atuação do grupo expositor. Nesse ínterim as intervenções do professor, se muito frequentes, podem impedir que a apresentação flua com naturalidade por aumentar o nervosismo dos expositores.

Refletindo a posteriori sobre essas observações e tendo em vista a pouca experiência dos estudantes em apresentações à frente da turma sobre temas matemáticos, percebemos que os estudantes deveriam ter sido mais bem preparados para as apresentações. Poderia ter sido significativo que o professor tivesse reservado um momento prévio às apresentações para um debate na turma sobre regras de conduta a serem seguidas durante as apresentações dos grupos. Acreditamos que uma negociação de tais regras entre os estudantes poderia garantir uma colaboração recíproca e um melhor aproveitamento dos trabalhos em grupo apresentados, além de levá-los a entender que a dinâmica de uma aula deles para eles mesmos, não é a mesma daquela conduzida pelo professor. É importante tomarem consciência de que eles serão os condutores da aula e, por isso, deverão adotar uma posição proativa seja como expositores ou na posição de participantes interessados na comunicação dos colegas (até porque todos, em algum momento, estarão em ambas as posições). E assim, imaginamos que tal iniciativa possa contribuir para a construção de um ambiente de respeito e colaboração entre os estudantes, dentro do qual poderão ser mais bem administrados seus eventuais nervosismos, vergonhas ou falhas relativas incorridas na apresentação dos conteúdos. Com isso o professor não seria o único responsável pelo bom andamento dos trabalhos.

4.2 Análise das atividades didáticas aplicadas no segundo semestre de 2016

Como dito anteriormente, realizamos no segundo semestre de 2016 duas aulas baseadas em investigações matemáticas, a título de complementação e aprofundamento dos estudos feitos sobre os números irracionais, iniciados em torno dos trabalhos de pesquisa apresentados no início do ano. Tanto do ponto de vista da prática docente, quanto da experiência dos estudantes, tal fato caracterizou-se como inovador.

Dentre os objetivos pretendidos destacamos o referente a desenvolver uma imagem conceitual sobre os números irracionais mais adequada relativamente à usual, que é bastante precária. Almejávamos proporcionar aos alunos situações de investigação sobre características complexas que tais números possuem, evitando compreensões equivocadas frequentes como: a definição circular dos números irracionais, a irrelevância e pouca utilidade dos mesmos e a escassa quantidade de exemplos (limitados praticamente a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e o número de Euler no Ensino Médio).

Tínhamos consciência de estar pisando em terreno novo, e a elaboração de atividades de cunho investigativo configurou-se como nosso primeiro e grande desafio. De fato, não foi tarefa simples criar questões realmente pertinentes ao desenvolvimento da aprendizagem e que constituíssem um bom ponto de partida para todos investigarem. Em outras palavras, elaborar questões que tivessem um caráter objetivo, claro e aberto, com enunciados pouco precisos e capazes de manter do início ao fim o entusiasmo perante o desafio proposto.

No conjunto de questões relativas à primeira atividade investigativa, apoiando-se unicamente no algoritmo da divisão, os estudantes, entraram em contato com o fato de que a representação decimal dos números racionais é finita ou infinita periódica a partir da análise de casos particulares – vide apêndice 4, tópico I. Logo de início alguns estudantes demonstraram certa dificuldade na interpretação dos enunciados das questões da primeira atividade. Era muito comum escutarmos frases do tipo: “Professor, como assim?”, “Professor, não estou entendendo nada...”, “Professor, o que significa ‘conjecture’?”, etc. Na resolução da primeira questão que solicitava o resto da divisão entre alguns números inteiros, muitos estudantes calcularam o quociente de tais divisões ao invés de simplesmente apresentar os respectivos restos. Por um lado, pudemos perceber o pouco costume dos estudantes com perguntas dessa natureza e, por outro, constatar que tais dificuldades podem sugerir a falta de desenvolvimento de certas habilidades de letramento matemático nos estudantes. De fato, muitos possuem grande dificuldade em ler textos matemáticos e outros realmente não o sabem fazer; diversos são aqueles que não leem atentamente os enunciados das questões, não identificando de forma precisa o que lhes está sendo proposto.

É de se imaginar, que tal fato não seja exclusivamente decorrente da falta de costume ou preparo por parte dos estudantes, mas também, de uma considerável inexperiência por parte do professor na elaboração de enunciados com tamanho grau de complexidade. Sabemos que nas atividades investigativas é esperado dos estudantes trabalharem sobre os enunciados das questões colocando eles mesmos seus próprios questionamentos, porém, concordamos que os enunciados das questões possam ser melhorados, de modo a favorecer uma maior fluência no enfrentamento das mesmas por parte dos estudantes.

Outro aspecto que convém destacar, percebido tanto na primeira quanto na segunda atividade investigativa, foi a falta de persistência de alguns estudantes diante dos próprios “insucessos”, isto é, na presença de uma primeira tentativa de resolução que não tivesse logrado êxito, percebia-se logo uma imediata desistência nos mesmos. Foi comum escutarmos: “Desisto!”, “A Matemática não é pra mim!”, “Não sei como fazer isso...”. Raramente notamos uma confiança na própria capacidade de superar o desafio proposto na atividade. Tal fato manifestou-se na pouca persistência diante das próprias incompreensões ou nos momentos em que era solicitado escrever, por extenso, as conclusões a que haviam chegado. Entretanto, havemos de reconhecer que contemporaneamente a esses fatos, via-se também um significativo envolvimento em outros estudantes com as atividades propostas. Envolvimento este, em certo sentido, maior que aquele visto durante as apresentações dos trabalhos de pesquisa no início do ano. De fato, se admitirmos a maior facilidade em assumir uma posição passiva frente a uma dada apresentação, podendo decair em uma ou outra distração, vimos que em uma aula com investigações tal fato teve menor ocorrência, uma vez que o importante papel de protagonista da ação foi entregue ainda mais claramente aos estudantes.

Nesse sentido, presenciamos o surgimento das primeiras conjecturas decorrentes do trabalho investigativo e as diferentes interações ocorridas entre os membros de alguns grupos. Dentre essas, podemos destacar: *“Na divisão por 11, de um número natural terminado em 0, a soma do resto com o quociente é igual a 10”*. Mesmo não tendo relação direta com o a proposta de investigação feita (que envolvia apenas a determinação dos restos), pode-se identificar o surgimento de uma ideia interessante. Algebricamente a conjectura levantada pode ser verificada, no campo dos números naturais, da seguinte maneira:

$$10x = 11q + r = 10q + q + r, \text{ com } 0 \leq r < 11$$

De onde se obtém: $10(x - q) = q + r$.

Muito provavelmente os estudantes visualizaram casos onde o dividendo era um número menor ou igual a 100, para os quais se percebe que a conjectura é válida. Mas se o quociente for um número maior ou igual a 11, é possível perceber que $(q + r)$ será um múltiplo de 10. Ou seja, o grupo por pouco não chegou a estabelecer uma propriedade válida, e não usual, sobre a divisão de números naturais por 11. Por não fazer parte do escopo pretendido com a atividade não nos detivemos em desenvolver a ideia levantada pelo grupo, mas convém destacar que os estudantes vivenciaram traços de um genuíno fazer matemático.

Tais fatos nos levaram a concluir que boa parte dos estudantes assumiu de forma adequada e satisfatória a proposta das atividades investigativas.

Em duas das cinco turmas envolvidas um fato curioso aconteceu quando passamos à fase de discussão e sistematização da primeira atividade investigativa. A última questão objetivava um desfecho que vinculasse as ideias anteriormente aprendidas (*“Levando em conta o que puderam observar nas atividades anteriores, o que vocês diriam: vale ou não vale a afirmação recíproca descrita na introdução desta atividade investigativa: ‘Toda fração (número racional) tem uma representação decimal finita ou infinita periódica’? Justifique.”*). Quanto a essa questão, após a investigação sobre a quantidade de restos em uma divisão entre dois inteiros positivos e da investigação sobre o porquê de algumas frações possuírem representação decimal finita e outras infinita e periódica, nos deparamos com duas respostas instigantes:

> *“Essa afirmação recíproca não vale, pois há frações em que ela possui uma representação infinita não periódica, como por exemplo o π, que se consegue dividindo o comprimento pelo diâmetro”.*
>
> *“Não. O número dois não tem um número finito de casas decimais. Ele não tem casas decimais”.*

Com efeito, bastou que um estudante apresentasse uma ou outra questão para que a turma inteira se dividisse entre aqueles que se posicionavam a favor ou contra a afirmação feita pelo colega. Em geral, a maioria da classe concordava com o que o amigo havia levantado. Cabia-nos, portanto, esclarecer o impasse instaurado. Para tanto demos início a uma longa discussão sobre a definição de fração. Recuperamos a ideia intuitiva de que fração é um conceito que se origina quando queremos representar as partes de um todo, quando este é dividido em partes iguais. Por essa razão, só haveria sentido pensarmos em exemplos do tipo: “Uma propriedade, deixada em herança, foi dividida em cinco partes iguais. A mãe ficou com duas das cinco partes, ou seja, dois quintos da propriedade. Para os três filhos da família, tocou uma parte para cada um, ou seja, um quinto da propriedade para cada filho”. Ou então: “Eu e meus amigos fomos a uma pizzaria no fim de semana, pedimos uma pizza com oito pedaços. Ao chegar na mesa vimos que todos os pedaços eram iguais. Sozinho eu comi três desses oito pedaços. Dessa forma, três oitavos da pizza ficaram comigo, e os outros cinco oitavos com os meus colegas”. Partindo de exemplos desse tipo, pretendíamos recuperar nos estudantes a ideia de que numa fração, tanto o numerador quanto o denominador, são números naturais, sendo o último diferente de zero e, portanto, esclarecer a diferença entre fração e razão entre grandezas em geral. Explicamos que no caso do número π, o comprimento dividido pelo diâmetro representa não uma fração no sentido estrito do termo, mas sim uma razão entre essas duas medidas. De fato, mostramos que para o valor da divisão entre comprimento e diâmetro numa circunferência dar o número π, que é um número irracional, seria impossível que ambos, numerador e denominador, fossem naturais.

No segundo caso, foi mais simples explicar aos estudantes que, em primeiro lugar o número dois tem casas decimais sim. O próprio algarismo dois na casa da unidade! Isso para fazê-los entender que casas decimais não são apenas aquelas que aparecem após a vírgula, como deixam entender uma grande parte dos livros didáticos ao tematizar as representações decimais de frações. Todo número real possui uma representação decimal, que pode ser finita, infinita periódica ou infinita e não periódica. Então, no caso do número dois, dissemos que aparentemente não existem casas decimais após a vírgula quando, por exemplo, existe uma infinidade de casas decimais iguais a zero: $2{,}000\ldots$ (além de possuir, de fato, uma representação decimal infinita e periódica dada por $1,\overline{9}$). Por outro lado, sabemos que todas essas casas decimais após a vírgula resultam em zero e, por essa razão, escrevermos habitualmente o número dois como habitualmente o fazemos (2), sem a escrita de quaisquer casas decimais fazendo-nos pensar que não ter nenhuma casa decimal após a vírgula é o mesmo que ter zero casas decimais após a vírgula. Portanto, como o zero não indica uma quantidade infinita, podemos dizer que ele representa uma quantidade finita de casas decimais. E assim, sobre o número dois também se pode dizer que sua representação possui finitas casas decimais. Em resumo, podemos afirmar que todos os números de representação decimal finita são, na verdade, números cuja representação decimal é infinita e periódica, tendo por período o número zero ou o número nove.

Assim, havemos de concordar com ABRANTES (1999) acerca da importância a ser dada ao momento da discussão final sobre a atividade investigativa dos estudantes:

> É usualmente nesta fase, que serão postas em confronto as estratégias, as hipóteses e as justificações que os diferentes alunos ou grupos de alunos construíram, e que o professor assume as funções de moderador. Ele procurará trazer à atenção da turma os aspectos mais destacados do trabalho desenvolvido e estimulará os alunos a questionarem as asserções dos seus pares. Assim, o desenvolvimento da capacidade dos alunos para comunicar matematicamente e do poder de argumentação são dois dos objectivos destacados desta fase da actividade de investigação. (ABRANTES et al., 1999, p. 180)

Com a segunda atividade investigativa, buscamos propiciar uma maior consciência nos estudantes de que os números irracionais estão relacionados a medidas de segmentos e que os mesmos possuem uma posição precisa na reta numerada. Além disso, a quantidade de números irracionais também foi abordada de modo investigativo por meio de atividade que solicitava a criação de números irracionais específicos, entre 0 e 1, com infinitas casas decimais após a vírgula, contendo com a explicitação de regras que garantissem a infinidade não-periódica de tais casas decimais. E por fim, provocamos uma questão visando a sensibilização dos estudantes sobre a densidade dos números irracionais por meio da criação pelos mesmos de exemplos de números racionais e irracionais compreendidos entre dois números racionais muito próximos dados, cuja diferença é menor do que um centésimo.

Nas atividades vivenciadas no início do primeiro semestre de 2016, envolvendo o retângulo áureo, o pentagrama e a $\sqrt{2}$ como diagonal do quadrado de lado um, os estudantes puderam se deparar com o fato de que os números (Φ) e $\sqrt{2}$ eram medidas exatas de segmentos. E embora esse primeiro contato tenha acontecido, na primeira questão desta segunda atividade investigativa (que solicitava a construção de segmentos de reta com medidas dadas) boa parte dos estudantes não conseguiu, de imediato, ter ideia do que fazer. Apenas quando o professor fez acenos sobre o caminho que se poderia trilhar para obter tais segmentos, é que os estudantes conseguiram visualizar um percurso de trabalho a seguir. Nesse caso, o caminho acenado foi usar o Teorema de Pitágoras em triângulos retângulos apropriados para que então chegassem aos valores solicitados no enunciado da questão, a saber: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$. Dessa forma, o trabalho investigativo consistiu em estipular os valores para dois lados quaisquer desses triângulos de modo a se obter, pelo uso do Teorema de Pitágoras, a medida esperada para o terceiro lado. Na construção de tais triângulos foi solicitada a utilização de uma escala, para que então as medidas dos segmentos encontrados pudessem ser imediatamente utilizadas na próxima questão (que solicitava a determinação dos pontos de coordenadas que representassem tais medidas). Assim, os estudantes puderam perceber que as mesmas tinham uma posição bem determinada na reta numerada.

A terceira questão desta segunda atividade pedia a criação de um número irracional entre 0 e 1. Muitas das respostas apresentadas de início eram do tipo: 0,198476520956198376611091.... Aqui pudemos notar que os estudantes ficaram com a ideia da aleatoriedade nas infinitas casas decimais, mas esqueceram de que as reticências à direita do número não fornecem informações precisas sobre o comportamento dessas mesmas casas mais à frente. Em outras palavras, a forma com a qual o número foi apresentado pelos estudantes, admitia questionamentos acerca de sua não periodicidade. Como poderíamos ter certeza que mais à frente não apareceria um período? Queríamos que visualizassem a possibilidade da existência de números decimais periódicos, cujo período era formado por muitas casas decimais. Com isso, em cada um dos grupos de trabalho procuramos fazer os estudantes perceber que a não periodicidade das casas decimais após a vírgula só poderia ser garantida por meio da estipulação de uma lei de formação. Ou seja, precisávamos determinar uma “regra” que impossibilitasse o aparecimento de qualquer tipo de período. E aqui, a ação investigativa consistia em determinar diferentes regras que gerassem uma infinidade de casas decimais não periódicas.

Por fim, a quarta e última questão trazia à tona a problemática da densidade dos números irracionais (e dos racionais). A tarefa consistia em encontrar dois números, um racional e um irracional, compreendidos entre $0,\overline{3}$ e $0,34$. Nela pudemos perceber uma considerável dificuldade por parte dos estudantes em determinar tais números. Constatamos que uma primeira dificuldade pairava na visualização de um número racional que "estivesse" depois de $0,\overline{3}$. Foi natural para vários estudantes pensar no número $0,34$, mas como solicitamos que o número procurado também estivesse antes de $0,34$, o impasse ficava em aberto. Para tanto, foi necessário conduzir os estudantes a refletirem sobre o valor posicional de cada algarismo que compunha o número, para que então, comparando casa após casa decimal depois da vírgula, pudessem encontrar os números solicitados. Pretendíamos dessa forma, diante da diversidade de exemplos criados, induzir os estudantes a perceber a possibilidade da inserção de infinitos números racionais e irracionais entre os dois números dados, fazendo-os vivenciarem por meio de experiências concretas a possibilidade de que esse procedimento pode se repetir indefinidamente, induzindo um germe da ideia de densidade. No entanto não foi nosso objetivo discutir explicitamente tal propriedade, e muito menos sistematizá-la nessa faixa escolar. Apenas pretendíamos gerar uma abertura de horizontes para que essa noção, no futuro, possa ganhar mais significados, quando e se for explicitamente tematizada em âmbito escolar.

Assim, do ponto de vista do trabalho investigativo desenvolvido, pudemos perceber como essas atividades forneceram experiências significativas nas mais variadas esferas de conhecimento, atitudes, valores e capacidades dos estudantes.

> Estas actividades são enriquecedoras para os alunos, permitindo-lhes desenvolver a sua autoconfiança. Eles têm oportunidade de exprimir e fundamentar as suas opiniões, de procurar a informação de que necessitam, de desenvolver hábitos de trabalho de grupo, de reforçar a sua persistência, avaliar situações e tomar decisões. Além disso, desenvolvem a sua capacidade de comunicar raciocínios e ideias matemáticas e não matemáticas, oralmente e por escrito. (ABRANTES et al., 1999, p. 6)

4.3 Análise das atividades didáticas aplicadas no primeiro semestre de 2017

Conforme acenamos na descrição do tópico 3.3, decidimos realizar com os estudantes ingressantes no oitavo ano de 2017 uma série de atividades investigativas inspiradas nos trabalhos realizados em 2016 (tanto os trabalhos de pesquisa desenvolvidos no primeiro semestre, mas principalmente quanto às atividades investigativas realizadas ao final do ano). Na análise presente neste tópico, o leitor poderá perceber elementos comuns com aqueles descritos no tópico anterior. Por essa razão, no intuito de evitar que o texto fique repetitivo, priorizaremos a análise em profundidade dos novos elementos mobilizados nestas atividades. Os que consideramos muito semelhantes aos resultados de 2016, é mencionado de forma breve.

A primeira atividade investigativa desenvolvida em 2017, sobre a descoberta da propriedade do Teorema de Pitágoras, seguiu os mesmos padrões daquela aplicada no início de 2016. De certa forma, embora sendo outros estudantes, não vimos divergências substanciais entre o desenvolvimento desta atividade e aquele de 2016. Vimos sim, a comprovação da pertinência da mesma no sentido de promover o protagonismo e despertar a curiosidade nos estudantes, além de confirmar o potencial da mesma no sentido de ser um bom início para todos trabalharem, capaz de prover um tipo de experiência onde futuras abstrações e conclusões possam ser feitas. No intuito de evitarmos possíveis momentos de ociosidade entre os estudantes, reiteramos a sugestão dada no tópico 4.1 (à página 105), a respeito de uma provável mudança no enunciado dessa atividade, trazendo para a questão principal, a pergunta inicialmente prevista para o momento de discussão final.

Em seguida, com a finalidade de propiciar situações favoráveis à aplicação do Teorema de Pitágoras, elaboramos uma ficha contendo três exercícios onde se solicitava a determinação da medida do terceiro lado de triângulos retângulos dados. É certo que pretendíamos levar os estudantes a um aprimoramento do uso de tal teorema, mas também pensávamos em induzi-los a tomar consciência do tipo de representação decimal que alguns números com radicais possuem, tendo em vista que, para os cálculos, apenas uma calculadora simples (com as quatro operações elementares) poderia ser usada. Como no ano anterior, tínhamos a intenção de fazer um primeiro diagnóstico da compreensão dos estudantes sobre o valor posicional dos algarismos depois da vírgula no sistema decimal de numeração. No entanto, pudemos constatar uma relativa falta de domínio da linguagem algébrica ao observarmos uma considerável dificuldade, em muitos estudantes, na tradução algébrica da situação proposta. Dessa forma, sentimo-nos obrigados a atender tal demanda em detrimento do propósito inicial estabelecido. Como o foco da atividade era a fixação do resultado do Teorema de Pitágoras, nos restringimos a solicitar resultados aproximados até a primeira casa decimal após a vírgula. Comprometemo-nos, entretanto, a retomar em atividade futura o uso da calculadora para a determinação de melhores aproximações, até a quinta casa, no intuito de rediscutir a questão do valor posicional no sistema decimal de numeração. A proposta da questão não envolvia a resolução de equações do segundo grau com a utilização de fórmula e sim a determinação de um número cujo quadrado resultasse em outro dado, utilizando calculadoras não científicas (sem a tecla $\sqrt{\ }$) para tanto. Quanto a esse último aspecto, notamos um bom envolvimento dos estudantes com o desafio proposto.

Em se tratando de início de ano letivo, devemos admitir que em relação à segunda atividade não seguimos à risca todos os quesitos previstos para atividades investigativas, como descritas no capítulo 1. De fato, não foi feita uma introdução da mesma e a atuação do professor, junto aos diferentes grupos, não cumpriu com o esperado para o momento de desenvolvimento, a saber, que o mesmo não poderia ter dado soluções e/ou mostrado o caminho de resolução para algumas questões.

Após essas duas primeiras atividades, foram planejadas mais quatro, essas sim, com maior cuidado tanto no planejamento quanto na aplicação, para que dessa forma garantíssemos o caráter desejável para as atividades matemáticas investigativas. Segue um diagrama que sintetiza os temas de cada uma delas.

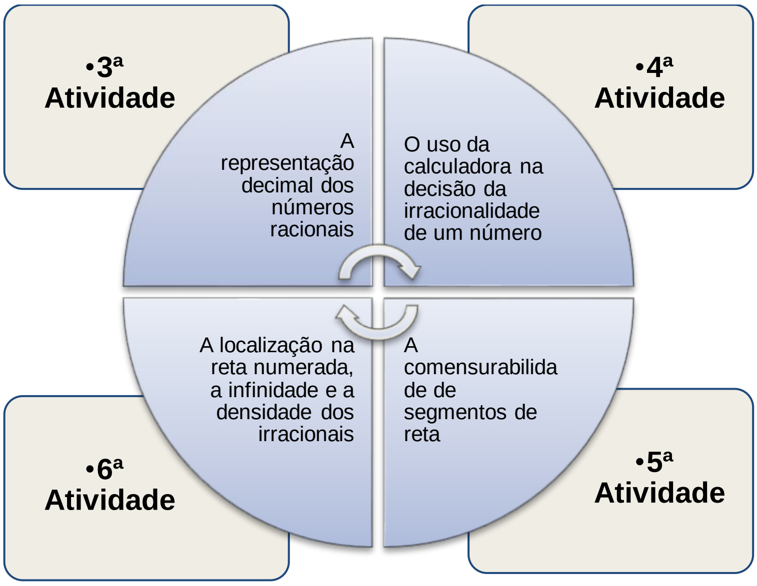


Figura 15 – Temas das atividades investigativas

Ao término de todas as atividades investigativas, aproveitamos as provas previstas no calendário escolar (duas ao todo) para colocarmos questões que avaliassem especificamente a aprendizagem dos estudantes sobre os temas de cada uma delas.

Convém neste momento relembrarmos que em 2017 foram aplicadas atividades investigativas em todas as oito turmas de oitavo ano da escola, porém o público alvo de nosso estudo, sobre o qual estamos discorrendo essa análise, foi formado pelas cinco das oito turmas de oitavo ano sob nossa responsabilidade, cada uma contendo aproximadamente trinta e três alunos, todos na mesma faixa etária dos treze anos. Tais turmas apresentavam diferentes características quando olhadas do ponto de vista do interesse, do envolvimento e do compromisso. Apenas uma dessas cinco turmas possuía um rendimento escolar em avaliações inferior às demais. As outras quatro turmas apresentavam, de certa forma, uma uniformidade em relação a tal rendimento. Salvo a primeira e segunda atividades que acabamos de descrever, os estudantes de um modo geral nunca haviam trabalhado com atividades investigativas em aulas de Matemática. Por essa razão, era natural o pouco costume com atividades investigativas. Para muitos, essa era a primeira experiência com atividades dessa natureza.

Posto isso, a terceira atividade de cunho investigativo teve como propósito explorar o comportamento dos restos na divisão entre dois números inteiros positivos. Em seguida, com base nas conclusões observadas, também levar os estudantes a perceber que toda fração (número racional) possui uma representação decimal finita ou infinita e periódica. Em aulas expositivas anteriores a essa atividade, havíamos discutido com os estudantes a afirmação recíproca, ou seja, que todo número cuja representação decimal é finita ou infinita e periódica admite uma representação fracionária.

A atividade aplicada em 2017 teve os mesmos enunciados das questões propostas na atividade de 2016. Com relação ao trabalho realizado nos diferentes grupos e à reação dos estudantes frente aos enunciados propostos, podemos dizer que não observamos diferenças significativas em comparação ao ano anterior. Os estudantes discutiram ativamente as questões entre seus pares de forma similar àqueles de 2016. Perguntas do tipo: “Professor, está certo?”, “Professor, é assim mesmo?”, etc., mantiveram-se frequentes. A postura do professor diante de tais questionamentos se dividiu: em alguns momentos colocava novas perguntas com o propósito de suscitar questionamentos e reflexões que levassem os estudantes, por si só, a validarem suas conclusões; e, em outros momentos, o professor confirmava ou refutava alguns questionamentos, mesmo sabendo que tal atitude não era condizente com o trabalho investigativo. Não se tratava de dar a resposta para simplesmente minimizar o próprio trabalho ou do estudante. Questões relativas ao tempo disponível para tais atividades o levaram a tomar semelhante postura.

A seguir, mostraremos os enunciados e os resultados obtidos, por todas as cinco turmas, nas questões referentes ao assunto trabalhado na terceira atividade investigativa, ou seja, a representação decimal dos números racionais.

> Na primeira atividade investigativa vocês verificaram que “Toda fração (número racional) possui uma representação decimal finita ou infinita periódica”. Posteriormente, em aula, vimos que um número cuja representação decimal é finita ou infinita e periódica pode ser representado por uma fração geratriz.
>
> a) O que leva algumas frações possuírem representação decimal finita e outras infinita?
> b) No caso da representação decimal de uma fração ser infinita, por que razão acontece desta ser periódica?

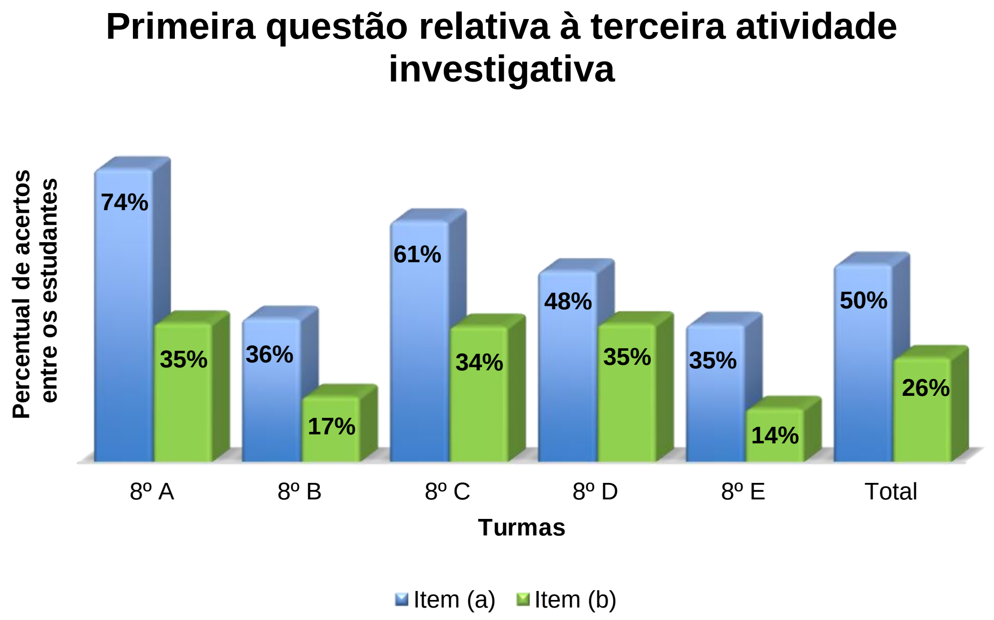


Figura 16 – Sobre a representação decimal de um número racional (1)

> Ao dividir 13 por 17 sem calculadora um aluno obteve os primeiros algarismos da sua forma decimal: 0,7647. Como o algarismo 7 apareceu repetido na primeira e na quarta casa decimal, o aluno parou a divisão e concluiu que a forma decimal de 13/17 é uma dízima periódica com período igual a 764. Esse aluno raciocinou corretamente? Justifique.

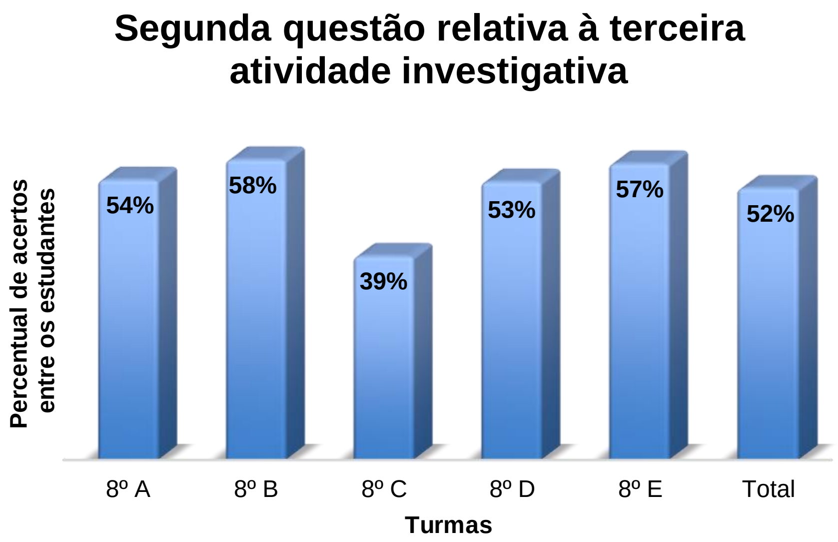


Figura 17 – Sobre a representação decimal de um número racional (2)

Na Figura 16 vemos que o percentual médio de estudantes que acertaram a pergunta sobre o motivo de um número racional possuir representação decimal finita, ficou em torno de 50%, enquanto que o percentual médio de acertos na argumentação sobre a razão pela qual um número racional com representação decimal infinita ser periódico, ficou ligeiramente maior que 25%. Com efeito, entendemos que uma pergunta, como a do item b (*No caso da representação decimal de uma fração ser infinita, por que razão acontece desta ser periódica?*), exige um domínio de linguagem para uma elaboração satisfatória não ainda visível nos estudantes. Portanto, é compreensível que o valor médio de acertos tenha sido menor que o do item a. Por se tratar de uma questão delicada, acreditamos que tenha faltado uma maior experimentação prática com situações concretas – o que não tivemos tempo para fazer.

Note que na segunda questão o percentual de acertos foi de 52%, mesmo ela versando sobre representações decimais infinitas e periódicas, como o item b da primeira questão. Diferentemente da anterior, nesta questão os estudantes conseguiram expressar a ideia de que o raciocínio do aluno era incorreto, embora em muitos casos suas justificativas fossem incompletas. Diante disso arriscamos uma primeira avaliação de que essa terceira atividade, favoreceu a que os estudantes ampliassem sua visão sobre a característica inerente à representação decimal dos números irracionais. Mesmo assim ficou claro que uma boa parte deles (senão a totalidade) necessitará de uma retomada deste mesmo conteúdo para chegar a uma apropriação mais segura da propriedade estudada.

Por outro lado, cabe também apontar que o fator “inexperiência” do professor e dos alunos com aulas investigativas, possa ter influenciado o aproveitamento evidenciado nos resultados das questões acima. De fato, o início da terceira atividade investigativa foi de certo modo tumultuado em algumas turmas. Iniciamos com uma explanação geral aos estudantes sobre as características e propósitos de uma aula com investigações. Deixamos claro o papel que ambos, professor e estudantes, têm no desenvolvimento de aulas desse tipo. Infelizmente, o momento de esclarecimentos e motivações se estendeu além do que de fato deveria e também a arrumação de sala de aula pelos estudantes, para formação dos diferentes grupos, levou considerável tempo. Tudo isso somado, resultou em um tempo líquido de vinte a vinte e cinco minutos para o desenvolvimento de todo o trabalho investigativo dos estudantes. Como se pode esperar, o tempo disponível não foi suficiente. Assim, tendo sido planejadas uma aula para o desenvolvimento da atividade e outra para a sistematização e discussão final da mesma, precisamos usar de um tempo adicional na aula seguinte (destinada à sistematização) a fim de garantir que a maior parte dos grupos terminasse seus trabalhos. Consequentemente, em um efeito cascata, o uso desse tempo adicional para o término da atividade, implicou na escassez de tempo para a realização adequada da discussão final da mesma, sendo esta também finalizada no início da aula seguinte, onde no planejamento era previsto iniciar a quarta atividade investigativa. Dessa forma, acreditamos que se tivéssemos acrescentado uma aula a mais além das planejadas, a atividade poderia ter sido mais bem finalizada, evitando os atropelos anteriormente descritos. Com efeito, em seus trabalhos ABRANTES et al., mesmo se referindo a outro tipo de problemática na citação a seguir, já alerta sobre possíveis problemas relacionados ao tempo que devem levar a possíveis adequações no planejamento:

> De facto, a exploração de uma tarefa, prevista inicialmente para durar uma ou duas aulas, poderá prolongar-se por bastante mais tempo de forma a seguir as várias pistas que foram surgindo. Caberá ao professor decidir sobre a opção que, perante cada situação concreta, considera mais adequada. (ABRANTES et al., 1999, p. 117)

Percebemos ainda que, por não terem considerável familiaridade com atividades investigativas, os estudantes demonstravam grande necessidade de saber se tinham chegado ou não a uma conclusão correta sobre o que estavam fazendo, antes de progredir em suas descobertas. Eram frequentes perguntas como: “É isso?”, “Tá certo professor?”, “Não sei como fazer isso...”, “Não entendi o que está pedindo aqui”. Em geral, tais perguntas deixavam o professor numa posição difícil, pois mesmo sabendo que não podia dar a resposta aos estudantes pois poderia tirar deles a autoria da descoberta, o mesmo via o risco de que o trabalho ficasse bloqueado caso nenhuma orientação fosse dada. Por essa razão, diante de algumas destas perguntas, para as quais não encontramos uma forma sutil ou discreta de respondê-las, acabamos confirmando ou refutando diretamente a pergunta colocada pelos estudantes. Para as demais questões, sempre que possível, respondíamos por meio de outras perguntas, buscando com isso propiciar aos estudantes uma reflexão mais aprofundada sobre seus próprios questionamentos e permitir que os mesmos continuassem no processo investigativo no intuito de chegar às suas próprias conclusões. Mais uma vez fatores relacionados ao tempo destinado à atividade influenciaram para que o professor, em determinados momentos, tomasse uma atitude mais diretiva frente às colocações dos estudantes.

À parte tais fatos não podemos deixar de relatar que houveram sim grupos que realmente se interessaram e trabalharam seguindo a proposta feita. O trabalho investigativo dos estudantes resultou em experiências concretas e significativas a respeito da representação decimal dos números racionais. Mesmo tendo havido alguns que assumiram uma postura “burocrática” perante a atividade, a maioria se mostrou entusiasmada em participar da prática investigativa, assumindo, por alguns instantes, o papel de verdadeiros (as) matemáticos (as).

A quarta atividade investigativa levantou a questão da representação decimal de alguns números também representados por radicais. Ela foi igualmente útil para retomarmos um trabalho sobre o valor posicional dos algarismos depois da vírgula na representação decimal dos números – dificuldade diagnosticada na atividade dois. Julgamos ter sido importante esta retomada da lógica do sistema decimal de numeração para favorecer o aprimoramento da alfabetização numérica dos estudantes, que inclusive é necessária para a discussão planejada sobre a noção de densidade dos números racionais e irracionais na reta numerada.

Nesta atividade pudemos perceber que tanto o enunciado das questões quanto a conclusão final obtida foram muito bem assimilados pelos estudantes. Diferentemente da atividade anterior, onde tivemos que lidar com uma série de imprevistos e situações difíceis de resolver, nesta tudo transcorreu de forma bastante natural. O conteúdo a ser investigado era mais técnico em relação ao da atividade anterior, a qual exigia dos estudantes um raciocínio dedutivo mais bem formado que, como visto, ainda se encontra em formação nos estudantes da faixa etária especificada. Uma pequena demonstração do percentual de estudantes, turma a turma, que justificaram de acordo com o esperado a questão relativa à quarta atividade investigativa pode ser vista no gráfico a seguir. O enunciado da questão segue abaixo.

> Um outro aluno, estava na dúvida se $\sqrt{526}$ era ou não um número irracional. Para decidir sobre esta dúvida, utilizou uma calculadora científica e encontrou o valor de $22{,}934689882$ para a $\sqrt{526}$. Com esta informação, o que ele pode concluir? Justifique.

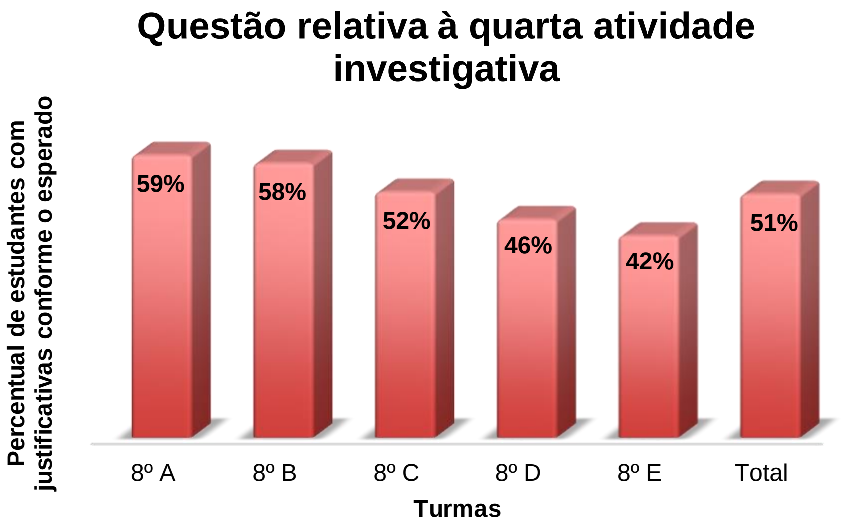


Figura 18 – O uso de calculadora na decisão sobre o tipo de representação decimal

Baseando-nos tanto na experiência de sala de aula quanto nos dados acima, julgamos satisfatório o resultado obtido com essa atividade. De fato, pretendíamos mostrar aos estudantes que o uso de calculadora (científica ou não) não possibilita chegar a uma conclusão sobre o tipo de representação decimal do número presente no visor da mesma: se finita ou infinita e periódica. Ao longo do desenvolvimento da atividade, constatamos que alguns grupos intuíram a possibilidade de também existir outro tipo de representação decimal, a saber, a representação decimal infinita e não periódica. Foi curioso perceber a surpresa dos estudantes ao entenderem que, sendo a calculadora um instrumento que mostra apenas um número finito de dígitos, a simples leitura do número apresentado no visor não permite afirmar qualquer conclusão sobre sua própria representação decimal.

Conforme delineamos no capítulo 2 desta dissertação, percebemos que um possível caminho para a apresentação dos números irracionais aos estudantes seria por meio da prova da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado. Haveríamos, portanto, de preparar o terreno para que o tema da incomensurabilidade fosse enfrentado. Nesse sentido é que pensamos e elaboramos a quinta atividade investigativa, a qual levantava a problemática da comensurabilidade entre segmentos de reta.

A atividade em si foi bastante proveitosa e enriquecedora. Além de apresentarmos a definição de comensurabilidade entre segmentos de reta (que de fato era algo novo para os estudantes), pudemos também revisar a ideia de fração como uma relação parte x todo.

O enunciado da atividade partia de duas questões. Na primeira forneciam-se dois segmentos de reta distintos e solicitava-se a determinação de um segmento de medida u que comensurasse ambos. Na segunda questão fornecia-se um segmento unitário e pedia-se que fossem encontrados outros dois segmentos: um deles comensurável com o segmento unitário dado e o outro, de medida u, capaz de comensurar os dois anteriores.

Tanto na resolução da primeira quanto da segunda questão não vimos grandes dificuldades. Tudo transcorreu com naturalidade e o assunto da comensurabilidade de segmentos pareceu ser bem assimilado pelos estudantes. A quinta atividade investigativa terminava com a proposta de discussão de um teorema relativo à comensurabilidade de segmentos e com uma pergunta que abriria o caminho para a etapa subsequente: *"Dados dois segmentos quaisquer, eles são sempre comensuráveis? Justifique"*.

Dessa forma, ao término dos trabalhos em grupo, no momento de sistematização, discutimos a validade do teorema colocado ao final da mesma: *"Um segmento é comensurável com o segmento unitário se, e somente se, sua medida puder ser representada por uma fração"*. A discussão deste teorema foi realizada em todas as turmas tomando-se por base os próprios exercícios resolvidos nas duas primeiras questões da atividade. Exatamente este enunciado foi colocado em uma questão de verdadeiro ou falso na prova de avaliação final do trimestre. O gráfico a seguir corrobora nossa boa primeira impressão sobre o aprendizado do tema proposto.

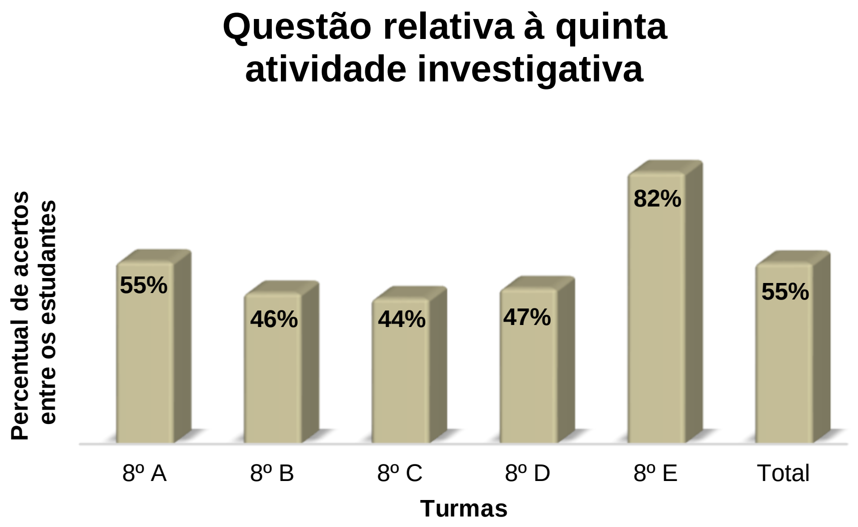


Figura 19 – Sobre a comensurabilidade de segmentos

No entanto cabe apontar ser provável que, novamente por inexperiência do professor, o referido momento de discussão final tenha sido feito de modo rápido ou sem o devido peso, pois ao utilizarmos esse resultado na conclusão da prova da incomensurabilidade da diagonal com o lado do quadrado, pudemos notar que alguns estudantes não tinham guardado bem o enunciado desse teorema.

Antes de passarmos para a análise da sexta e última atividade investigativa, gostaríamos de tecer algumas palavras a respeito da aula expositiva na qual realizamos a demonstração, bastante dialogada em cada uma das turmas, sobre a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado (de medida unitária) de um quadrado, como etapa final da trajetória de apresentação dos números irracionais.

Por ser a primeira vez que nos “aventurávamos” a fazer tal demonstração, admitimos que no início estivéssemos muito apreensivos em relação ao conteúdo e desenvolvimento dessa aula. Porém, ao final, nossa avaliação objetiva é de que a mesma foi muito produtiva e rica de significados para os estudantes.

Logo de início, na primeira aula dada (para a turma 8ºD), estávamos preocupados com detalhes relativos à demonstração como: não esquecer nenhuma das etapas da demonstração e como ligar e conduzir cada uma das passagens. Também estávamos preocupados com a possível reação dos estudantes, se corresponderia ou não à nossa expectativa. Durante a aula, cada etapa era apresentada de modo a garantir tempo para que os estudantes compreendessem e perguntassem, caso não entendessem algo das construções feitas ou da lógica e dos conteúdos envolvidos. Intencionalmente, em nenhum momento nos preocupamos em seguir um padrão matemático formal de apresentação, com equações ou excesso de notação algébrica. Mas demos prioridade para o debate de ideias e deduções indutivas que pudessem ser visualizadas a partir dos conhecimentos prévios trabalhados com os estudantes.

Nas aulas para as demais turmas, superadas as diferentes preocupações e todo o nervosismo inicial, pudemos agir com maior naturalidade e desenvoltura, ousando envolver mais os estudantes durante o processo de construção e desenvolvimento da referida demonstração. Com isso, o ambiente da sala de aula tornou-se ainda mais propício a uma maior compreensão do que estava sendo exposto, além de possibilitar que os estudantes, protagonizando junto com o professor no desenvolvimento do conteúdo, se apropriassem de modo mais significativo dos resultados que vinha sendo obtidos.

Ao final da aula a reação dos estudantes se caracterizou por uma mistura de sentimentos. Alguns estavam realmente impressionados com o fato da Matemática ser tão “perfeita” e tudo estar muito bem explicado e construído. Outros estavam espantados, mas no sentido positivo da palavra, afirmando que jamais seriam capazes de fazer uma coisa daquele tipo! Não tínhamos a pretensão de que os estudantes saíssem da aula sendo capazes de repetir todas as passagens mencionadas. Mas independentemente de tal entendimento “técnico” não ter ocorrido, acreditamos que a introdução dos números irracionais por meio da trajetória até aqui explicitada favoreceu inúmeras vivências dos estudantes que pode ter a força de deixar marcas importantes em suas mentes. Mesmo assim, embora tais marcas possam esmaecer ao longo do tempo, acreditamos que numa futura retomada (por exemplo, no Ensino Médio), os estudantes estarão mais bem preparados para um aprofundamento, podendo assim, apropriar-se de forma ainda mais significativa desse conteúdo.

A seguir, podemos ver um gráfico onde se descreve o aproveitamento dos estudantes na questão relativa à demonstração da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado. Convém esclarecermos que, além do tema ser extremamente complicado para os estudantes, a avaliação contendo a questão a seguir foi aplicada um mês e meio após a referida aula expositiva.

> Com base no que foi exposto em sala de aula, explique com suas palavras, porque a diagonal de um quadrado e o seu lado não podem ser segmentos comensuráveis.

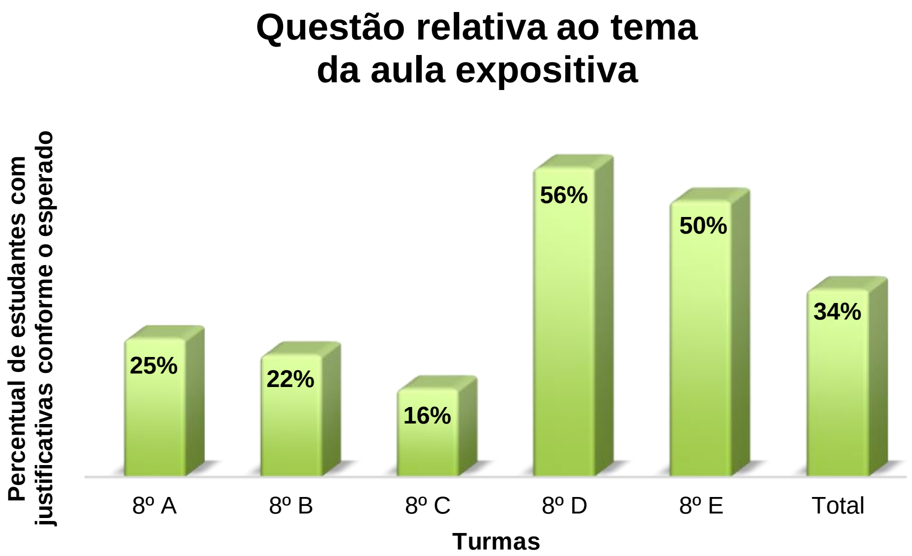


Figura 20 – Sobre a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado (unitário) de um quadrado

Como a resposta esperada para o enunciado proposto era de natureza dissertativa, foram consideradas para a tabulação acima, todas aquelas que apresentassem, de modo plausível, algo das ideias vistas ao longo da demonstração feita em sala de aula sobre a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado. Em particular, respostas que acenassem para o fato que tal resultado decorria da impossibilidade de encontrar um segmento de medida u, capaz de comensurar a diagonal e o lado unitário do referido quadrado.

Acreditamos que embora a média percentual, das respostas apresentadas em todas as turmas de acordo com o esperado, tenha ficado em torno de 34%, o fato de em duas das cinco turmas terem aparecido percentual maior ou igual a 50%, é um indicador positivo da possibilidade de abordarmos satisfatoriamente o tema da incomensurabilidade com estudantes de Ensino Fundamental, focando as ideias geométricas principais e evitando formalismos exagerados.

Dessa forma, o importante resultado visto ao final da aula expositiva se relaciona diretamente com aqueles obtidos em atividades anteriores. De fato, conforme apresentado no capítulo 2, tópico 2.3, a diagonal do quadrado de lado unitário tem medida igual a $\sqrt{2}$. Essa medida, não sendo comensurável com um segmento unitário, nos leva a concluir (por meio do teorema visto ao final da quinta atividade investigativa) que a mesma não pode admitir uma representação fracionária, não sendo, portanto, um número racional. Consequentemente, o número $\sqrt{2}$ não sendo racional, não poderá ter uma representação decimal finita ou infinita e periódica conforme vimos na terceira atividade investigativa. Ficando, por fim, também respondida a questão deixada em aberto na quarta atividade, quando pretendíamos investigar o tipo de representação decimal que alguns números escritos na forma de radical possuíam. Agora sim chegávamos às condições de confirmar que o número $\sqrt{2}$, não sendo racional, possui uma representação decimal infinita e não periódica.

A sexta e última atividade investigativa possuía praticamente os mesmos enunciados daquela aplicada ao final de 2016. Nela foram abordadas propriedades relacionadas aos números irracionais, como a localização na reta numerada, a infinidade e a densidade.

Em certo sentido, muito do que escrevemos a respeito da análise dessa atividade no tópico 4.2 se aplica aos estudantes do ano de 2017. As perguntas sobre como obter segmentos de reta com medidas iguais a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ foram praticamente as mesmas e a questão relativa à densidade revelou uma vez mais certas dificuldades dos estudantes relativamente ao valor posicional dos algarismos de um número. É fato que não demonstramos que $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ também são números irracionais. Contudo, tal fato foi assumido mediante colocação do professor que os apresentou como tais. No entanto acreditamos que o percurso percorrido para a comprovação da irracionalidade de $\sqrt{2}$ foi de tal modo rico para que a aceitação da irracionalidade dos demais números citados, mesmo sem prova específica para cada um, não ficasse apenas baseado na autoridade do professor – a percepção da complexidade da prova efetivamente discutida nos parece ter deixado claro que se pode provar a irracionalidade dos outros. Na faixa etária alvo, frequentemente o estudo detalhado de alguns exemplos particulares é mais convincente do que uma prova genérica e demasiadamente formal (como foi o caso da terceira atividade investigativa, sobre os restos possíveis no algoritmo da divisão entre úmeros naturais).

Um aspecto que apresentou significativa diferença foi a discussão final, a respeito da criação de números irracionais. Em 2017, dada a experiência do ano anterior, conseguimos induzir os estudantes a obterem maiores conclusões. Na fase final de discussão desta atividade surgiram questionamentos variados sobre os tipos de regras que poderiam ser válidas na determinação de um número irracional. Destacamos a pergunta feita por um dos estudantes: “As casas decimais após a vírgula de todos os números irracionais possuem algum tipo de lei de formação?”. Essa discussão levou muitos estudantes a perceber que é de fato possível determinar uma infinidade de números irracionais estipulando regras não periódicas para a determinação de representações decimais para números com infinitas casas depois da vírgula, mas que isso não esgota todas as possibilidades de se escrever representações decimais de números irracionais. Alguns chegaram mesmo a intuir a possibilidade de haver um infinito ainda maior de irracionais para os quais não seja possível determinar uma lei de formação para a parte decimal após a vírgula desses números, ou seja, cujos dígitos depois da vírgula sejam de alguma forma aleatórios. O fato curioso de que a não periodicidade da representação decimal de alguns números irracionais está associada “paradoxalmente” a algum tipo de regra que se possa enunciar, foi motivo de surpresa para boa parte dos estudantes. De fato, quando os mesmos se deparam com “certa aleatoriedade” na representação decimal de alguns números irracionais, de início não imaginam que pudesse existir leis capazes de descrever tais representações e que garantissem a ausência de um período.

A seguir, apresentamos os enunciados de duas questões relacionadas a esta sexta atividade investigativa, presentes nos dois momentos de avaliação anteriormente citados. Na primeira, relativa à determinação de números irracionais em um dado intervalo, procurávamos enfatizar tanto a criação do número propriamente dito quanto a descrição do motivo pelo qual o mesmo possui infinitas casas não periódicas após a vírgula.

> Invente um número cuja representação decimal seja infinita e não periódica e que esteja localizado entre 5 e 6 na reta numerada. Escreva o(s)

motivo(s) que o leva a dizer que tal número realmente possui infinitas casas não periódicas após a vírgula.

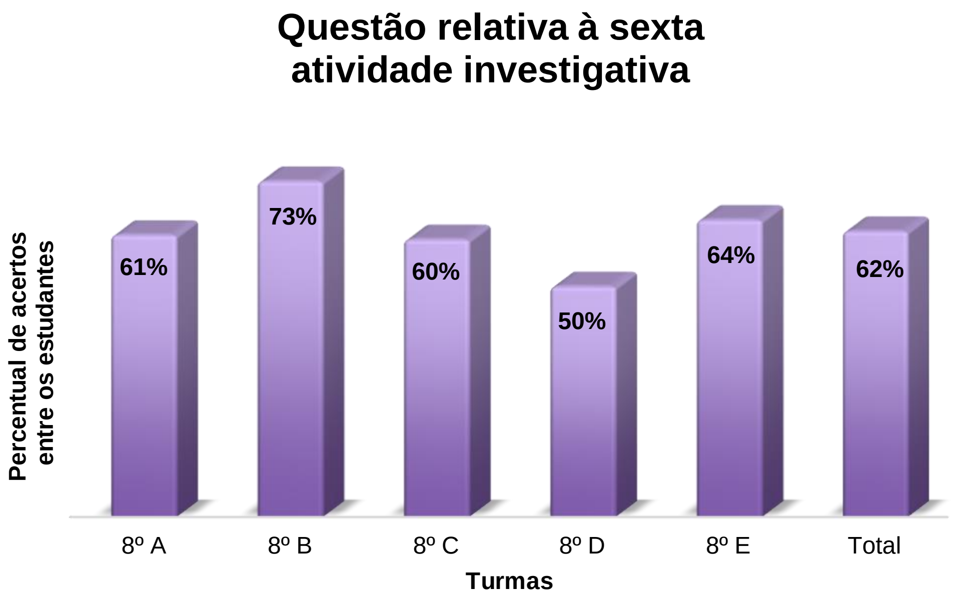


Figura 21 – Sobre a criação de números irracionais (1)

O gráfico revela um bom domínio dos estudantes, da criação e descrição de regras que estabeleçam um caráter não periódico às casas decimais após a vírgula para determinados números, garantindo assim sua irracionalidade. Possivelmente o melhor resultado apresentado nas respostas desta questão se deva ao fato da proposta solicitar exemplos concretos de números naturais sucessores (sem casas decimais depois da vírgula, o que pode ter evitado o confronto com a dificuldade com o valor posicional constatada em outros momentos – vide questão a seguir). De qualquer forma, mesmo que eventualmente as justificativas não fossem precisas em muitos casos, acreditamos poder concluir do gráfico que os estudantes, em geral, se apropriaram bem da especificidade da representação decimal dos irracionais.

A segunda questão traz novamente à tona o problema da descrição de uma regra que explique o comportamento das casas decimais após a vírgula de um determinado número apresentado. Além disso, procura verificar se os estudantes aprenderam a diferenciar números racionais de números irracionais, dentro do conjunto dos números reais. Por fim, traz em seu último item uma primeira questão relativa à propriedade estudada sobre a densidade dos números racionais e irracionais.

a) Considere os números com representação decimal expressa por: $0{,}12\overline{3}$ e $0{,}123040044000444\ldots$ Para o segundo número, note que foram apresentadas apenas as quinze primeiras casas decimais após a vírgula. Escreva, com suas palavras, uma regra que descreva como serão as próximas casas decimais deste número.

b) Os dois números dados são exemplos de que tipo ou tipos de números reais? Por quê?

c) Os dois números dados estão compreendidos entre $0{,}123$ e $0{,}1234$? Justifique.

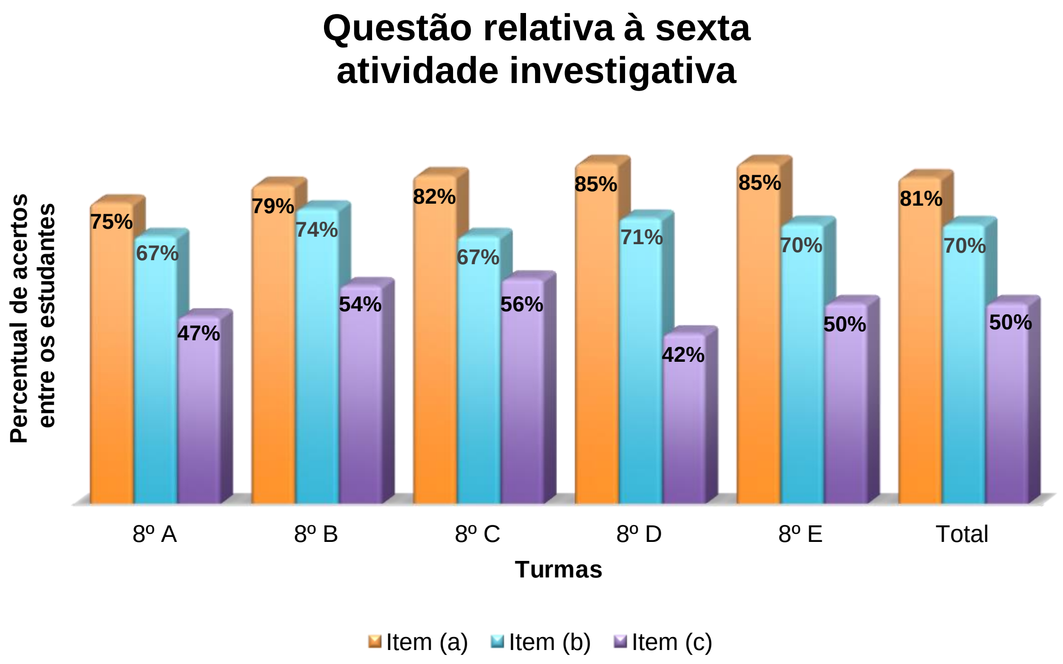


Figura 22 – Sobre a criação de números irracionais (2)

Como podemos ver esse segundo gráfico corrobora fortemente nossa primeira impressão a respeito do domínio, por parte dos estudantes, em descrever regras capazes de estabelecer o caráter não periódico de certos números irracionais (item a, com a média de 81% de acertos). Também vemos um excelente aproveitamento (70% em média) em relação à diferenciação entre racionais e irracionais dentro do conjunto dos números reais (item b). Já os resultados apresentados para o item c, revelam um aproveitamento razoável sobre o tema da densidade. De fato, sobre este ponto, constatamos entre os estudantes pouca habilidade na análise do valor posicional dos algarismos que aparecem após a vírgula, na representação decimal de um número (como mencionado na questão anterior).

Outra questão envolvendo o tema da densidade apresentava o seguinte enunciado:

Faça o que se pede em cada item.

a) Dê exemplos de um número racional e de um número irracional compreendido entre $0,\bar{5}$ e $0{,}56$.

b) Com base nas conclusões apreendidas nas atividades investigativas, quantas frações e quantos números irracionais existem entre $0,\bar{5}$ e $0{,}56$. Explique suas conclusões. O que isso te leva a pensar sobre toda a reta?

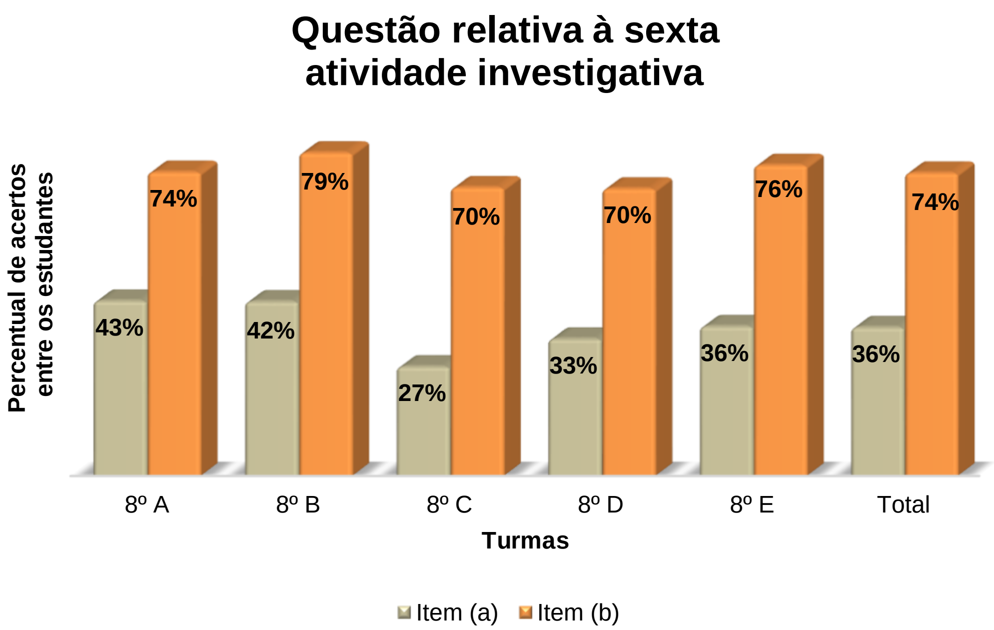


Figura 23 – A propriedade da densidade

Mais uma vez pode-se observar no item (a) a manifestação do pouco domínio do significado do valor posicional das casas depois da vírgula: ficou muito evidente a dificuldade entre os estudantes de interpolar números entre dois outros cuja diferença é da ordem dos milésimos. Como se vê no gráfico da figura 21 a média de acertos para a interpolação de números irracionais entre 5 e 6 foi de 62% enquanto que aqui, entre $0,\bar{5}$ e $0{,}56$ foi de 36%. Em se tratando de questões análogas podemos ver que o problema não se deve a uma incompreensão acerca da representação decimal dos números irracionais, mas sim a uma falta de domínio do significado do valor posicional no sistema de numeração. Haja vista o grande índice de acertos no item (b) (74% em média), que nos leva a concluir que a grande maioria tem a convicção sobre a existência de infinitos números irracionais e racionais entre $0,\bar{5}$ e $0{,}56$, mesmo que muitos deles não tenham conseguido formular exemplos corretos.

Ousamos concluir que, relativamente à questão sobre a infinidade e densidade de racionais e irracionais na reta numerada, a concepção dos estudantes foi adequadamente ampliada. O que comprova que é possível evitar a concepção usual, de grande parte dos egressos do Ensino Médio, sobre a existência de uns poucos números irracionais, notadamente $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π e e. Parece-nos que tal concepção errônea é consequência direta de abordagens didáticas pobres ou equivocadas, presentes tanto em livros didáticos como em práticas docentes usuais.

Na finalização dos trabalhos relacionados a todo o estudo feito para a introdução dos números irracionais, solicitamos que os alunos fizessem uma pesquisa em grupos sobre os mesmos temas abordados pelos grupos de pesquisa em 2016. Desta vez, solicitamos que elaborassem vídeos com duração máxima de cinco minutos cada para apresentar aos colegas o resultado de suas pesquisas. Embora alguns grupos tenham encarado esse trabalho de maneira formal e burocrática, a maioria deles, em todas as turmas, apresentou trabalhos muito bons mostrando envolvimento e compromisso com o aprendizado.

Reservamos duas aulas para que todos os estudantes pudessem assistir aos vídeos produzidos pelos outros grupos, de modo a terem contato com o tema pesquisado pelos demais. Embora os vídeos tenham sido produzidos em condições diferentes de tempo e de propósito, se comparados aos do ano precedente, acreditamos que a experiência proporcionada foi também importante e rica. De fato, os estudantes puderam assim entrar em contato com outros números irracionais e puderam perceber onde os mesmos podem ser encontrados (na natureza, nas Artes ou também na Arquitetura).

Por fim, após a apresentação de todos os vídeos, baseando-nos na construção do retângulo áureo, assistido nos vídeos gravados pelos integrantes do grupo 2 de cada sala, em uma nova aula expositiva desenvolvida nos mesmos moldes daquela feita sobre a incomensurabilidade, mostramos como se obtém a medida da razão áurea. Nesta aula, utilizamos todo o material estudado e desenvolvido, criados na ocasião dos trabalhos de pesquisa realizados em 2016 (ver capítulo 2, tópico 2.1). Dessa forma, recuperamos também o estudo feito sobre o número de ouro realizado em 2016, relacionando-o no fechamento das atividades investigativas de 2017.

Capítulo 5 – Considerações Finais

O percurso de trabalho que culminou na escrita desta dissertação iniciou com duas motivações principais: a primeira delas dizia respeito à motivação e comprometimento dos estudantes frente aos próprios estudos e a segunda ligada ao conteúdo e consequente abordagem do mesmo que haveríamos de propor como tema do trabalho a ser apresentado para a conclusão do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP.

Cada uma dessas motivações amadureceu a seu tempo e nos fizeram compreender com maior precisão o que poderia ser feito em relação a ambas. Logo no início percebemos que a primeira motivação era muito abrangente. À primeira vista, era como se quiséssemos encontrar a solução para o problema dos problemas em âmbito educacional: como despertar o fascínio nos estudantes para com os estudos, como fazê-los se interessar pelos assuntos propostos na escola, particularmente aqueles matemáticos?

Por sua própria natureza temos consciência tratar-se de um problema bastante complexo, ainda mais quando o vemos dentro de um mundo onde o desenvolvimento tecnológico se encontra em pleno avanço. Ano após ano presenciamos a chegada de novos estudantes cada vez mais imbuídos de uma vivência numa realidade digital. São estudantes com pouco hábito de leitura, acostumados a escreverem na maioria das vezes apenas frases curtas por meio de seus dispositivos móveis (muitas vezes até sem o devido cuidado ortográfico), a assistir muitos vídeos e séries, etc. Pessoas para quem capacidades de concentração e persistência não estão ainda muito desenvolvidas.

A segunda motivação girava em torno do conteúdo e da metodologia a serem utilizadas nesta pesquisa que, juntamente com o propósito de despertar a motivação anteriormente acenada, formavam o grande desafio que tínhamos pela frente. Tendo em vista trabalharmos com um público na faixa etária dos treze anos, relativo ao oitavo ano do Ensino Fundamental, procuramos escolher dentre os conteúdos de tal série algum que pudesse ser usado na pesquisa, uma vez que teríamos de desenvolvê-lo de qualquer forma com os estudantes ao longo do ano. A escolha tanto dos números irracionais quanto da metodologia de atividades investigativas surgira, conforme dissemos na introdução, ao cursarmos as disciplinas ordinárias do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Dessa forma, o quebra-cabeça estava formado: incorporar a metodologia de ensino por atividades investigativas no ensino do conteúdo relativo aos números irracionais, com vistas a suscitar um fascínio e motivar o interesse para com o estudo da Matemática em jovens estudantes com as características descritas no parágrafo anterior.

Descrito da forma como acabamos de fazer, em poucas palavras, parecia até simples. Mas o fato é que tamanho desafio nos obrigou a percorrer um longo caminho de investigação (aqui me refiro ao nosso trabalho como pesquisador) a fim de interligar esses três tópicos – motivação, números irracionais e atividades investigativas – de modo que pudéssemos obter um produto final significativo, em termos da aprendizagem dos estudantes.

Como acontece em boa parte das pesquisas, nosso trabalho não seguiu uma trajetória linear de fatos e pensamentos. Desde o início tomamos como ponto de referência as palavras da pesquisadora CORBO (2012, p. 15), a qual afirma que o grande desafio no ensino dos números irracionais está em encontrar uma forma de suscitar um impasse que faça os estudantes perceberem a *insuficiência dos números racionais para resolver certos problemas*. Proporcionar tal impasse por meio de atividades investigativas constituiu-se, portanto, o verdadeiro problema perseguido ao longo de todo nosso trabalho de pesquisa para esta dissertação.

No início de 2016, quando ainda não havíamos passado pelo exame de qualificação, percebemos os primeiros indícios da grande dificuldade em se criar tais atividades investigativas que, além de tudo, favorecessem uma ligação com o fator complexificador, relativo à motivação. Esperávamos poder criar atividades interessantes que, de fato, mobilizassem o empenho dos estudantes para com elas. Por questões relacionadas ao tempo hábil para criar e aplicar tais atividades e apresentar os resultados no referido exame, encontramos como uma saída, naquele momento, propor atividades de pesquisa em grupos sobre aspectos ligados ao número de ouro, à raiz quadrada de dois e ao número pi, seguidas das respectivas apresentações pelos mesmos, como já foi comentado no capítulo 3.

Os trabalhos de pesquisa realizados pelos estudantes no início de 2016 representaram um marco em nossa trajetória profissional. Apesar de não se tratarem de atividades investigativas, compreendemos que solicitar pesquisas sobre um tema, seguida das respectivas apresentações dos resultados das mesmas, pode efetivamente ser um método eficiente para mobilizar um envolvimento dos estudantes com os assuntos a serem estudados. Vimos ainda que a postura tantas vezes cômoda e também passiva frente aos estudos e à escola pôde ser atenuada por meio do empenho em atividades que solicitaram dos estudantes preparo, dedicação e protagonismo, levando-os a experimentarem tomadas de decisão e proporcionando satisfação nos mesmos ao se perceberem aprendendo.

Corroborando com nossa percepção, o pai de uma de nossas alunas relatou-nos, com positivo espanto, o empenho e a preocupação que presenciara em sua filha ao vê-la se preparando para o momento da apresentação, repassando as ideias de cada passagem, procurando as melhores figuras, dando os últimos retoques nos slides a serem exibidos, etc. Segundo esse pai tal atividade de pesquisa, mesmo antes das apresentações acontecerem, já havia atingido seus objetivos, uma vez que a mobilização para com os estudos vista em sua própria filha poderia ser reconhecida como um êxito de tal proposta. Em contrapartida, mesmo que as apresentações de alguns grupos tenham deixado a desejar, só o fato de o estudante enfrentar o problema da apresentação, procurando minimamente prepará-la, procurando memorizar a sua fala, superando dificuldades pessoais de timidez e vergonha, já pode provocar em seu autor o desenvolvimento de habilidades que provavelmente serão usadas em muitos outros momentos de sua vida.

Além disso, as diferentes interações ocorridas no interior dos grupos, como divisão de tarefas, divisão de temas, escolha do tipo de apresentação (se por meio de vídeo ou de forma presencial, etc.), o trabalho em conjunto, os debates e a organização de dias e horários para eventuais ensaios configuram, apesar das inúmeras discussões e desavenças que pudera ocorrer, uma rica experiência de aprendizagem. A título de exemplo, sabemos o quão importante são tais habilidades em âmbito profissional: a organização de ideias, o planejamento das diferentes etapas de um projeto, a delimitação de metas, o trabalho em equipe, a apresentação dos resultados com vistas a uma tomada de posição. É interessante notar que habilidades como essas não surgem automaticamente nos indivíduos. É preciso que o mesmo vivencie situações onde possa por em prática o uso e desenvolvimento das mesmas.

Por essa razão, ficamos muito satisfeitos com os trabalhos de pesquisa realizados no início do ano de 2016 e acreditamos que muitos outros temas previstos no planejamento escolar não só possam como também devam ser trabalhados por meio de apresentações de estudantes frente à turma. Compreendemos que colocar os educandos a trabalhar ativamente sobre temáticas curriculares se constituiu, de fato, em uma metodologia estimulante e eficaz de aprendizagem. Mas vale reiterar a observação feita ao longo da dissertação sobre a importância de se cuidar de modo especial do preparo da turma no sentido de maximizar os efeitos positivos ao vivenciarem tais apresentações.

Durante a realização do exame de qualificação, constatamos que a proposta de elaborar e aplicar atividades investigativas ao longo do percurso de aprendizagem dos números irracionais havia se restringido a dois momentos ocorridos no período de revisão e ajustes de conteúdo realizados antes de ocorrerem as apresentações dos trabalhos de pesquisa de cada grupo, a saber: a atividade sobre a propriedade do Teorema de Pitágoras e a atividade com uso de calculadora não científica para a determinação da representação decimal de algumas raízes quadradas até a quinta casa decimal após a vírgula.

Tal constatação nos remeteu novamente ao problema inicial da elaboração de atividades investigativas fazendo-nos entrever a necessidade de uma mudança de rota em nossa trajetória inicial de pesquisa. Para tanto foi necessário um maior entendimento de nossa parte daquilo que caracteriza a metodologia de ensino das atividades investigativas. Nesse sentido encontramos na experiência de trabalho de um grupo de pesquisadores portugueses as bases para uma fundamentação de nosso conhecimento e de nossa futura intervenção em sala de aula.

Outro fato importante foi a retomada do conteúdo da Tese de Dourado de Olga Corbo (CORBO, 2012), onde pudemos nos deparar com o posicionamento da autora que afirma ser importante para *a compreensão e apropriação do conceito de número irracional (...) uma reelaboração de noções concernentes ao número racional*. Tal argumento nos acompanhou ao longo da elaboração de uma atividade investigativa sobre o tipo de representação decimal dos números racionais.

Dessa forma, de um modo ainda incipiente, o primeiro momento onde nos dispusemos trabalhar de uma forma mais consciente e sistemática com a metodologia de ensino das atividades investigativas, foi no segundo semestre de 2016. Uma vez que tanto professor quanto estudantes jamais haviam trabalhado com essa metodologia, tal experiência mostrou-se muito útil para a observação da dinâmica das aulas, das diferentes interações que ocorrem entre os estudantes e da atuação do professor frente aos questionamentos feitos pelos mesmos nos diferentes grupos. Além disso, foi também de grande relevância para uma maior consciência da problemática existente no processo de elaboração de enunciados para tais atividades e das eventuais correções a serem feitas.

É fato que os estudantes envolvidos já traziam consigo certa familiaridade com os números irracionais, dada a realização dos trabalhos de pesquisa no primeiro semestre de 2016. Por esse motivo, sobreveio-nos a pergunta sobre os efeitos que tais atividades investigativas poderiam proporcionar a estudantes sem conhecimento anterior sobre os números irracionais. Foi assim que em 2017, marcado pela recente experiência vivida, reelaboramos algumas atividades investigativas e acrescentamos outras no intuito de preencher lacunas identificadas na abordagem precedente, tanto em relação ao ensino dos números irracionais quanto ao uso de atividades investigativas.

Da abordagem feita em 2017 um fato novo que merece ser destacado foi a realização de duas aulas expositivas e dialogadas sobre a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado e a determinação do valor da razão áurea por meio da construção do retângulo áureo. Esses são dois temas matemáticos delicados e complexos de serem abordados na faixa etária e ano escolar em questão, devido ao elevado grau de abstração e formalismo que lhes são característicos. No entanto, pudemos constatar que foi possível abordá-los de maneira rica e significativa para os estudantes, graças a um conjunto de fatores diretamente ligados ao desenvolvimento desta pesquisa, como por exemplo: mudanças vistas na própria prática do professor e a visível e maior disposição dos estudantes em participar do debate proposto em cada aula como consequência de um longo e importante período prévio de preparações. Tais aulas dialogadas tiveram a função de sistematizar globalmente o conceito de número irracional, como também abordar duas situações “concretas” nas quais o impasse que faz surgir a necessidade de um novo número para expressar a medida de segmentos pôde ser captado pelos estudantes. Foram inúmeras as expressões de surpresa e alegria manifestadas por eles, ao perceberem o belo e ao mesmo tempo difícil encadeamento de ideias construído na antiguidade grega.

Com a realização das atividades investigativas vimos acontecer em nossa pesquisa muitas considerações apontadas nos trabalhos de autores portugueses sobre a aplicação desse tipo de metodologia de ensino. Percebemos que é realmente necessário preparar cuidadosamente cada atividade e vimos que isso não é uma tarefa nada trivial: buscar situações exemplares que ajudem na abordagem do tema proposto, elaborar adequadamente enunciados para cada atividade levando em conta o caráter de abertura que o processo investigativo requer, sem ser excessivamente diretivo nos comandos permitindo que cada estudante possa colocar suas próprias questões e fazer sua própria “viagem” de investigação.

A esse respeito convém esclarecermos dois aspectos. Em primeiro lugar, notamos que a esperada adequação dos enunciados foi algo bastante difícil de ser conseguida. Boa parte de nossas questões, embora possuindo um caráter de propor uma investigação, possuíram enunciados diretivos fazendo com que o trabalho de questionamentos por parte dos estudantes fosse bastante pequeno na maioria dos grupos. Acreditamos que se houver a possibilidade de fazer uma aplicação prévia de questões piloto em alguma turma ou grupo de estudantes, os enunciados poderão ser apresentados de modo ainda mais claro para as próximas turmas. Em segundo lugar, não foram muito frequentes no trabalho investigativo dos estudantes uma das características mais importantes esperadas no trabalho investigativo, a saber: a formulação de novas questões a partir da questão inicial proposta pelo professor. Imaginamos que esses dois aspectos estão intrinsecamente ligados, pois se o enunciado da questão for muito diretivo, não sobrará muito espaço para a atividade criativa do estudante.

Outra observação que também vimos ser bastante importante diz respeito à proposição inicial da atividade, o seu desenrolar e a discussão final da mesma.

Iniciar com um diálogo que desperte o envolvimento dos estudantes deixando claro o objetivo pretendido é de suma importância, pois este será o responsável por fazer surgir uma predisposição nos estudantes para com a atividade. O chamado de atenção ao tipo de trabalho esperado entre os integrantes de cada grupo e a menção à etapa final onde os mesmos deverão apresentar suas descobertas também são recomendações necessárias no início da atividade.

Da experiência que fizemos verificamos ser muito difícil, nesse nível escolar, conseguir gerar o impasse, acenado anteriormente, fazendo uso só de atividades investigativas. Por essa razão, frente à pergunta colocada por ABRANTES (1999, p 135) à página 25 desta dissertação: *“As investigações matemáticas valem por si só ou devem constituir-se como suporte à aprendizagem de ‘conteúdos’ matemáticos? (...)”*, concluímos que uma abordagem que agregue diferentes metodologias pode facilitar a obtenção de resultados mais abrangentes e significativos do que apenas o uso estanque e isolado de cada uma delas. É como uma complementariedade que acontece entre diferentes métodos, onde a diversificação de abordagens e metodologias pode ajudar a enriquecer o trabalho pretendido, tornando interessante o uso de várias estratégias de ensino. Daqui pode provir uma justificativa para o uso feito em nossa pesquisa, sobretudo nas etapas de preparação, de uma quantidade considerável de aulas expositivas. Tal relação (atividades investigativas/outras metodologias) não exclui ou diminui o papel das atividades investigativas no ensino de Matemática, mas acreditamos que o facilita.

Como exemplo dessa complementariedade entre metodologias, vimos que as pesquisas sobre o número de ouro despertaram surpresa e fascínio nos estudantes, mas não propiciaram uma vivência significativa com as noções matemáticas a ponto de que pudessem assimilar características conceituais importantes dos números irracionais. Por outro lado, as atividades investigativas conseguiram suprir essa necessidade, contudo não foram muito eficazes no sentido de provocar encanto ou fascínio nos estudantes. Com isso, pela experiência vivida tanto com as atividades de pesquisa quanto com as atividades de investigação, acreditamos que o uso das duas metodologias, em momentos propícios e de forma pensada, possibilita que sejam usufruídos aspectos positivos de ambas, em benefício do aprendizado autônomo e significativo dos educandos.

Uma questão importante que convém mencionarmos é em relação ao tempo destinado ao desenvolvimento de atividades investigativas. Conforme já acenado nos trabalhos realizados pela equipe do projeto MPT – Matemática para Todos: investigações na sala de aula – no desenrolar de nossa pesquisa didática, em determinados momentos o fator tempo impôs restrições ao trabalho investigativo desenvolvido pelos estudantes, seja por motivos relacionados ao contexto escolar, seja pela dinâmica de ação (diferenciadas para cada grupo ou turma) frente às atividades propostas. Tais aspectos por vezes demandaram que o professor tomasse decisões conflitantes com o próprio ato de investigar dos alunos. Diante de algumas perguntas, nem sempre o professor conseguiu responder de acordo com o que é sugerido que seja conveniente fazer em atividades investigativas. Por exemplo, em algumas ocasiões as respostas dadas a certos questionamentos foram explícitas e diretas. Isso nos levou a concluir o quão importante é a atitude do professor ao fazer uma cuidadosa estimativa do tempo a ser utilizado em uma aula, atentando para que a ligação (iniciativa/abordagem/ação) entre as questões possibilite de alguma forma um consistente trabalho por parte dos estudantes, além de garantir a possibilidade de garantir o essencial momento de discussões e sistematizações finais, sempre respeitando o ritmo específico de cada turma de estudantes. A propósito disso:

> A reflexão final é um elemento fundamental numa aula de investigação. Realizar trabalho investigativo e não reflectir sobre ele é desperdiçar grande parte do potencial da actividade para a aprendizagem. Como Bishop e Goffree (1986) sublinham, a aprendizagem não resulta somente da actividade mas também da reflexão sobre a actividade. Para o aluno, é essencial poder confrontar as suas opiniões com as de outros, sentir a apreciação pública do seu trabalho e do dos outros, apreciar a atitude de dúvida, de crítica e a necessidade de justificação exemplificada pelo professor. (ABRANTES et al., 1999, p.148)

Resta ainda uma breve consideração sobre o importante e difícil papel do professor no preparo e condução de atividades de natureza investigativa. Da experiência feita ao longo de todo este trabalho acadêmico podemos afirmar que, ao se propor a instigar seus estudantes a percorrerem caminhos não ainda determinados – por meio de atividades investigativas, o professor assume também, de algum modo, um papel de investigador, ou melhor, de pesquisador no sentido literal da palavra. Com efeito, no instante em que decidimos ensinar os números irracionais utilizando-nos de investigações matemáticas, não podíamos entrever o trabalho que acabamos por desenvolver. Não sabíamos por onde começar, nem quais atividades propor ou que recursos utilizar. Por isso nos foi necessário, desde o início, uma característica esperada em todo pesquisador: uma atitude de abertura frente às possíveis mudanças de trajetória e uma atenta observação da realidade circundante. Dessa forma, tanto as atividades de pesquisa apresentadas em 2016 quanto os trabalhos de investigação propostos ao final de 2016 e início de 2017 representaram para nós um grande passo em direção a um amadurecimento e crescimento profissional. Vimos que os momentos de insegurança e os eventuais erros ocorridos na interação com os estudantes, quando analisados e confrontados, se reverteram em uma rica experiência de aprendizagem não só para o professor, como também para os estudantes.

Gostaríamos de finalizar estas considerações reiterando o alcance que as investigações matemáticas tiveram no estudo dos números irracionais ao final do Ensino Fundamental. Constatamos o valor dessas aulas investigativas na ampliação de horizontes sobre o que podemos explorar a respeito deste tema determinado; na abertura de espaço para que o assunto dos irracionais possa ser posteriormente abordado no Ensino Médio de forma mais aprofundada e mais completa com efetiva atribuição de significados por estes mesmos estudantes; e por ter possibilitado uma maior compreensão do que seja um número real. De certa maneira, na busca de conseguir propor situações didáticas que favorecessem a ampliação da construção de significados, por parte dos estudantes, sobre as propriedades específicas dos números irracionais e sua diferenciação relativamente aos racionais, acabamos superando aquilo que seria a nossa expectativa inicial. Acabamos por constatar, com as atividades realizadas, que no oitavo ano do Ensino Fundamental é de fato possível aos estudantes perceberem e se familiarizem com noções básicas, complexas e muito abstratas, pertinentes ao tema em estudo, se mantivermos o foco nas ideias matemáticas fundamentais, sem abusar de formalismos ainda não dominados nesta faixa etária. Mais ainda, conforme descrito à página 36, também acreditamos que nossas sequências didáticas puderam propiciar, efetivamente, ocasiões significativas para o desenvolvimento da autonomia de pensamento e questionamentos matemáticos nos estudantes.

Referências Bibliográficas

ABRANTES, Paulo. **Avaliação e Educação Matemática.** Série Reflexões em Educação Matemática, São Paulo: MEM/USU-GEPEM, 1995.

ABRANTES, P., LEAL, L.C., PONTE, J. P. **Investigar para Aprender Matemática (textos selecionados)**, Lisboa: Grupo “Matemática Para Todos – investigações na sala de aula” (CIEFCUL) e Associação de Professores de Matemática, 1998.

ABRANTES, P., PONTE, J. P., FONSECA, H., BRUNHEIRA, L. **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo**, Lisboa: Grupo “Matemática Para Todos – investigações na sala de aula” (CIEFCUL) e Associação de Professores de Matemática, 1999.

BRASIL, MEC/SEB **Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB).** Brasília, dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em 13 nov. 2017.

BRASIL, MEC/SEB **Por uma política curricular para a educação básica: contribuição ao debate da base nacional comum a partir do direito à aprendizagem e ao desenvolvimento.** Brasília, julho de 2014. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/biblioteca/GT_Direitos%20a%20Aprendizagem_03jul2014.pdf>. Acesso em 17 fev. 2017.

CORBO, Olga. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica.** Tese de Doutorado, São Paulo: UNIBAN, 2012.

DRUCK, I. F. **Currículo Integrado voltado à formação humana integral no ensino médio: reflexões dobre a Matemática**, in Weller W., Gauche, R., **Ensino Médio em Debate: currículo, avaliação e formação integral.** Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 2017.

MÓZER, Graziele Souza. **Para que Servem Os Números Irracionais? Manifestações em Aritmética, Combinatória e Geometria.** Dissertação de Mestrado Profissional, Niterói: UFF, 2013.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais.** Tese de Doutorado, São Paulo: USP, 2012.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., CUNHA, M. H., SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações matemáticas.** Desenvolvimento curricular na educação básica; 8, Lisboa: IIE, 1998.

PONTE, J. P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal.** Investigar em Educação, 2, 93-169. (2003).

Apêndice 1 – Orientações para o trabalho em grupo sobre o número de ouro

GRUPO 1: O Retângulo Áureo – Aspectos históricos e aplicações

- Mostrar, por meio de exemplos, a presença “aproximada” desta forma geométrica na Arte e na Arquitetura, no decorrer dos séculos;
- Apresentar o motivo pelo qual, ao longo da história da humanidade, ela foi sempre associada a uma figura harmônica, estável e estética;
- Por fim, dar a definição de Retângulo Áureo.

GRUPO 2: O Retângulo Áureo – Construção e aspectos matemáticos

- Apresentar a definição de retângulos semelhantes;
- Construir, com régua e compasso, o Retângulo Áureo (ou utilizando o software GeoGebra);
- Obter um valor aproximado da razão entre o Comprimento e a Largura do Retângulo Áureo (com pelo menos 5 casas decimais exatas).

GRUPO 3: A Sequência de Fibonacci – Aspectos históricos e aplicações

- Apresentar o Problema da quantidade de Coelhos em uma criação, ao longo dos meses e a sequência de Fibonacci;
- Apresentar outros exemplos das Ciências Naturais (botânica, biologia, etc.) de situações com o mesmo padrão de regularidade que gera a sequência de Fibonacci;
- Contar aspectos da história de Leonardo Fibonacci e de sua contribuição à Matemática.

GRUPO 4: A Sequência de Fibonacci – Aspectos matemáticos

- Determinar a lei matemática de formação dos termos da sequência de Fibonacci;
- Apresentar o trabalho feito pelo matemático Fibonacci, calculando a razão entre cada número da sequência e o seu antecessor;

- Obter um número tal que toda as razões, a partir de um certo ponto da sequência tenham as 5 primeiras casas decimais depois da vírgula iguais às dele.

GRUPO 5: O Pentagrama – Aspectos históricos e aplicações

- Mostrar, por meio de exemplos, a presença “aproximada” desta forma geométrica na Arte e na natureza, no decorrer dos séculos;
- Apresentar o motivo pelo qual, ao longo da história da humanidade, ela foi sempre associada a uma figura harmônica, estável e estética;
- Por fim, dar a definição de Pentagrama.

GRUPO 6: O Pentagrama – Aspectos matemáticos

- Construir, com régua e compasso (é possível?), o Pentágono Regular (ou utilizando o software GeoGebra) e, em seguida, o pentagrama;
- Obter um valor aproximado para as diferentes razões entre segmentos do Pentagrama (com pelo menos 5 casas decimais exatas);
- Apresentar a história e sua ligação com os Pitagóricos.

GRUPO 7: A Raiz quadrada de dois – Aspectos históricos e matemáticos

- Como o problema da raiz quadrada de 2 surgiu na história?
- Apresentar a definição de incomensurabilidade de segmentos;
- Mostrar, com o auxílio do GeoGebra, o trabalho feito pelos gregos para mostrar que a raiz quadrada de dois era um número irracional;
- Apresentar o valor da raiz de 2 com pelo menos 5 casas decimais exatas.

GRUPO 8: O número π – Aspectos históricos e curiosidades

- Apresentar a definição do número π;
- Apresentar aspectos históricos relacionados ao número π;
- Apresentar o método de Arquimedes para dar uma aproximação para o número π;
- Curiosidades sobre o número π;
- Apresentar o número π com pelo menos 5 casas decimais exatas.

Apêndice 2 – Planejamento de aulas

I. Apresentação do Teorema de Pitágoras

1. Objetivo

   Fazer com que os estudantes reconheçam a propriedade do Teorema de Pitágoras através da realização de um jogo de quebra-cabeça.

2. Material a ser utilizado

   Serão utilizados dez kits de quebra-cabeças, cada um contendo 11 peças, todos em material E.V.A., sendo:

   - Um quadrado de lado a;
   - Um quadrado de lado b;
   - Um quadrado de lado c;
   - Oito triângulos retângulos congruentes com lados medindo a, b e c.

     (Obs.: Os lados a, b e c, são tais que: $a, b, c \in \mathbb{Q}_+ \; com \; a < b < c$)

3. Tempo estimado: 35 minutos

4. Descrição da atividade

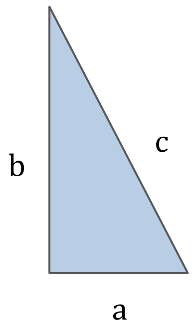
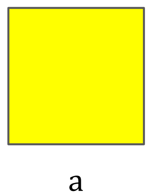
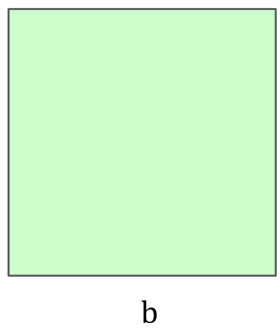
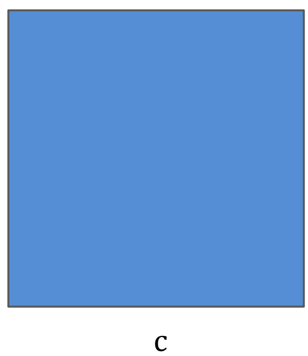
   - Em primeiro lugar a sala deverá ser dividida em dez pequenos grupos. Cada grupo deverá conter, no mínimo, três estudantes. (Eventualmente, poderão aparecer grupos com quatro ou mais alunos).
   - Em seguida, serão entregues para cada grupo um dos quebra-cabeças disponibilizados.
   - Tendo cada grupo recebido o seu próprio kit com o quebra-cabeça, o professor então, passa-lhes o objetivo da tarefa: *"Vocês tem 15 minutos para formar dois quadrados congruentes utilizando essas 11 peças. Todas as peças deverão ser utilizadas, nenhuma delas poderá ficar de fora e, não poderão ocorrer sobreposição entre as mesmas."*
   - Enquanto os estudantes vão tentando cumprir o objetivo da atividade, o professor vai monitorando e acompanhando o desenvolvimento de cada grupo.

- Após o término do tempo dado, assumindo que pelo menos um dos grupos conseguiu alcançar o objetivo esperado, o professor então, abre espaço para uma discussão com os estudantes a respeito de suas conclusões.
- Caso nenhum grupo tenha conseguido montar o quebra-cabeça apresentando a solução esperada, o professor poderá fornecer algumas “dicas” de modo a obter dos alunos a solução desejada.
- Logo depois, o professor instiga os alunos com as seguintes questões:
    - *“Observando esses dois quadrados, que conclusão podemos tirar? O que eles estão nos dizendo?”*
    - *“É possível estabelecer alguma fórmula matemática que descreva tal conclusão?”*

5. Sistematização da atividade (Através de slides)
    - Apresentar o enunciado do teorema de Pitágoras
    - Apresentar como exemplo: a terna pitagórica (3, 4,5)
    - Solicitar que cada aluno, a título de tarefa de casa, pesquise/encontre, no mínimo, outra terna pitagórica.

6. Anexos
    - ❖ Teorema de Pitágoras (Enunciado):
      Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.
    - ❖ Tarefa de casa a ser solicitada ao final da aula:
      A respeito das ternas pitagóricas, para a próxima aula, pesquisar:
        - *a) Mais uma terna pitagórica;*
        - *b) Quantas ternas pitagóricas existem?*
        - *c) Existe algum tipo de propriedade matemática entre os termos de uma terna pitagórica?*

- ❖ Representação das peças do quebra-cabeça a ser utilizado durante a aula

	Peça	**Quantidade**
Triângulo retângulo de lados (a, b, c)		8
Quadrado de lado (a)		1
Quadrado de lado (b)		1
Quadrado de lado (c)		1

II. Cálculo de raiz quadrada explorando o Teorema de Pitágoras

1. Objetivo

   Através da proposição de alguns exercícios que utilizem o Teorema de Pitágoras em sua resolução, apresentar aos alunos a definição de raiz quadrada, bem como, o seu cálculo em diferentes situações: raízes exatas e raízes não exatas.

2. Material a ser utilizado
   - Lápis e borracha
   - Calculadora não científica
   - Dez formulários contendo três triângulos retângulos em cada, todos distintos, onde, em cada um deles, dois de seus lados são fornecidos. (Ou os dois catetos, ou um dos catetos e a hipotenusa)

3. Tempo estimado: 35 minutos

4. Descrição da atividade:
   - A sala deverá ser dividida em dez pequenos grupos. Cada grupo deverá conter, no mínimo, três estudantes. (Eventualmente, poderão aparecer grupos com quatro ou mais alunos).
   - Distribui-se para cada grupo, uma folha contendo três triângulos retângulos, um em cada questão, não congruentes entre si.
   - A atividade se desenvolverá por meio da resolução dessas três questões.
   - Antes de iniciar a resolução da primeira questão, o professor explica em que consistirá toda a atividade: *"Cada grupo recebeu uma folha contendo três triângulos não congruentes entre si. Em cada um deles, dois de seus lados são conhecidos, o terceiro não. Desta forma, utilizando-se do Teorema de Pitágoras, vocês deverão encontrar a medida do terceiro lado desconhecido. Observem que na primeira e terceira questões, os dois catetos de todos os triângulos são dados, devendo-se, portanto, ser encontrada a medida da hipotenusa de todos*

eles. Já na segunda questão, são dados a hipotenusa e um dos catetos. Esperando-se, assim, que se obtenha a medida do outro cateto desconhecido.”

Obs.: a) Nesta atividade, ao utilizarem o Teorema de Pitágoras para calcular o lado desconhecido do triângulo, os alunos se depararão com a necessidade de se extrair a raiz quadrada de um número racional não negativo. Nesse momento, o professor deverá nivelar o conhecimento dos alunos pois, é provável que nem todos eles saibam fazer tal extração.

b) Nas questões 1 e 2, em todos os grupos, serão obtidos valores inteiros para as medidas dos lados dos triângulos. Na terceira questão isso não acontecerá. E será nesse momento que o professor deverá explicar como proceder no caso em que a raiz obtida for exata e decimal.

Tabela com a distribuição das atividades contidas nas folhas de cada grupo:

Grupo	**Questão 1**	**Questão 2**	**Questão 3**
1	(6; 8; 10)	(16; 30; 34)	(0,9; 1,2; 1,5)
2	(9; 12; 15)	(20; 21;29)	(1,6; 3; 3,4)
3	(12; 16; 20)	(8; 15; 17)	(0,7; 2,4; 2,5)
4	(15; 20; 25)	(7; 24; 25)	(1; 2,4; 2,6)
5	(5; 12; 13)	(10; 24; 26)	(2,4; 3,2; 4)
6	(10; 24; 26)	(5; 12; 13)	(1,8; 2,4; 3)
7	(7; 24; 25)	(15; 20; 25)	(2; 2,1; 2,9)
8	(8; 15; 17)	(12; 16; 20)	(1,4; 4,8; 5)
9	(20; 21; 29)	(9; 12; 15)	(1,2; 1,6; 2)
10	(16; 30; 34)	(6; 8; 10)	(1,5; 2; 2,5)

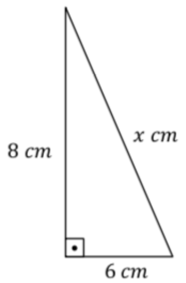
Exemplo de atividade aplicada ao Grupo 1:

Matemática - 8°ano - Ensino Fundamental II
Lista – Cálculo de Raiz Quadrada – Grupo 01
1o Trimestre / 2016

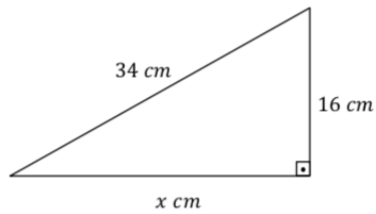
Nome do(a) estudante: n° ____ 8º ano __ EF II

Instruções:
1. Resolva cada questão no espaço destinado a ela. Não deixe questões em branco.
2. Esta lista deverá ser entregue ao professor ao término da aula.
3. Para resolução desta lista, podem ser formados grupos de 3 ou 4 pessoas.

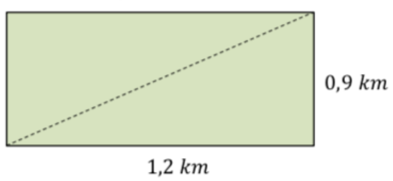
1. Determine a medida da hipotenusa do triângulo abaixo.



2. Determine o valor do cateto desconhecido na figura abaixo.



3. Que distância uma pessoa economizará caminhando diagonalmente um parque de formato retangular, que possui as seguintes dimensões:



1

[14]

[14] Utilizamos esta atividade com os estudantes do primeiro semestre de 2016 e também com aqueles do primeiro semestre de 2017.

5. Sistematização da atividade
    - Apresentar a definição de número racional pela sua representação decimal
    - Apresentar a definição de raiz quadrada
    - Apresentar o método de extração de raízes quadradas por fatoração
    - Apresentar detalhes da extração da raiz quadrada envolvendo números racionais não negativos com representação decimal finita.

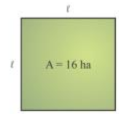
III. Cálculo de raiz quadrada de números racionais não-negativos

Introdução

A operação oposta à potenciação é chamada **radiciação**. Como o nome sugere, a radiciação é a operação através da qual extraímos **raízes** de números. Para entender o que significa "extrair uma raiz", vamos recorrer a um problema simples, que envolve a área de um quadrado.

Problema 1. Dimensões de um pasto

Seu Jacinto pretende cercar 16 hectares (ha) de sua fazenda para servir de pasto. Supondo que a região a ser cercada tenha a forma de um quadrado, qual deverá ser o comprimento dos lados dessa região?



Solução.

Cada hectare corresponde a 10.000 m^2, de modo que o pasto terá área igual a $16 \times 10.000 = 160.000$ m^2. A Figura ilustra a região a ser transformada em pasto, supondo que seu lado tenha comprimento ℓ.

Sabemos que a área de um quadrado de lado ℓ é dada pela fórmula $A = \ell^2$. Assim, para determinar o comprimento do lado da região, devemos encontrar um valor positivo de ℓ tal que

$$\ell^2 = 160.000.$$

Esse valor de ℓ é chamado **raiz quadrada** de 160.000, e é representado por $\sqrt{160.000}$. Usando uma calculadora, descobrimos que

$$\sqrt{160.000} = 400,$$

de modo que o lado da região que servirá de pasto terá 400 m de comprimento.

Definição

Raiz quadrada

A **raiz quadrada** de um número não negativo a – representada por $\sqrt{a}$ – é o número não negativo b tal que $b^2 = a$.

Em notação matemática, escrevemos

$$\sqrt{a} = b \quad \text{se} \quad b^2 = a.$$

Exemplo 2. Raízes quadradas

a) $\sqrt{49} = 7$, já que $7 \geq 0$ (7 é um número não negativo) e $7^2 = 49$.

b) $\sqrt{121} = 11$, já que $11 \geq 0$ e $11^2 = 121$.

c) $\sqrt{2,25} = 1,5$, pois $1,5 \geq 0$ e $1,5^2 = 2,25$.

d) $\sqrt{0,01} = 0,1$, pois $0,1 \geq 0$ e $0,1^2 = 0,01$.

e) $\sqrt{0} = 0$, pois 0 é não negativo e $0^2 = 0$.

Atenção

Muito embora seja verdade que $(-7)^2 = 49$, não se deve escrever $\sqrt{49} = \pm 7$, pois nunca se obtém um número negativo ao extrair a raiz quadrada.

Atenção

Também é preciso tomar o cuidado de não extrair uma raiz par de um número negativo, ou seja

$$\sqrt{-4} \neq -2.$$

De fato, $\sqrt{-4}$ não está definida.

Exemplo 3. Raiz quadrada de 3600

Vamos tentar extrair a raiz quadrada de 3600. Para tanto, comecemos fatorando esse número:

$$\begin{array}{r|l} 3600 & 2 \\ 1800 & 2 \\ 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Agora, vamos tentar agrupar em pares os fatores iguais:

$$\begin{aligned} 3600 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 && \text{Fatoração de 3600.} \\ &= 2^2 2^2 3^2 5^2 && \text{Agrupamento dos fatores iguais em pares.} \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5)^2 && \text{Aplicação da propriedade 4 das potências.} \\ &= 60^2 && \text{Cálculo do produto entre parênteses.} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $3600 = 60^2$, de modo que a raiz quadrada de 3600 é 60.

Exemplos contextualizados

1) A área de um terreno quadrado mede 1764 m^2. Qual a medida do lado desse terreno?

2) A figura abaixo, mostra o detalhe de um projeto de um banheiro para cadeirantes cujo piso de 3,6 m^2 de área será revestido com lajotas de cerâmicas de formato quadrado. Sabendo-se que ao todo serão utilizadas 10 lajotas dessa cerâmica, determine:

a) A área de cada lajota de cerâmica.

b) As dimensões, em centímetros, de cada lajota de cerâmica utilizada.

3) A figura abaixo, mostra o detalhe de um projeto de um banheiro cujo piso de 2 m² de área será revestido com cerâmicas de formato quadrado. Sabendo-se que ao todo serão utilizadas 100 lajotas dessa cerâmica, determine:

a) As dimensões, em centímetros, de cada lajota utilizada.

b) Sabendo-se que cada caixa de cerâmica contém 12 lajotas, e considerando que no momento da construção podem ocorrer possíveis quebras, qual o número mínimo de caixas que deverão ser compradas para realizar a obra?

4) Calcule as raízes abaixo sem usar calculadora. Dica: se necessário, fatore algum número.

a) $\sqrt{1024}$ d) $\sqrt{\frac{1}{36}}$ g) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ j) $\sqrt[4]{81}$

b) $\sqrt{1764}$ e) $\sqrt[3]{1000}$ h) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ k) $\sqrt[5]{-1}$

c) $\sqrt{2025}$ f) $\sqrt[3]{9261}$ i) $\sqrt[4]{0}$ l) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

Atividades

Pratique

32 Calcule, com aproximação de duas casas decimais, os valores de:

a) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{35}$

c) $\sqrt{92}$ f) $\sqrt{50}$

33 Dos números reais a seguir, qual é o maior? E o menor?

3,178641920078493...

3,178641920069883...

3,178641920070193...

Atividades

Pratique

34 Considerando as aproximações $\sqrt{2} = 1{,}41$; $\sqrt{3} = 1{,}73$; $\sqrt{5} = 2{,}24$; determine o valor aproximado da expressão abaixo.

$$A = -2\sqrt{3} + \sqrt{9} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$$

[15]

[15] Na definição de raiz quadrada dada acima, foram abordadas apenas aquelas de radicando racional não-negativo.
A presente aula foi elaborada com notas pessoais, do livro texto dos estudantes e notas retiradas de material pesquisado na internet. Segue o link com o endereço: https://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo1.pdf (p.77)
Notas e exercícios extraídos do Livro: Matemática Projeto Athos. Autores: José Roberto Bonjorno, Paulo Câmara Sousa, Regina Bonjorno e Tânia Gusmão. Editora FTD. (pp. 36-37)

IV. Revisão de definições dos conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros e Racionais

Já vimos que o conjunto dos números naturais é indicado assim:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$$

Vimos também que o conjunto dos números inteiros é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -6, -5, -4, -3, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$$

Os números racionais podem ser expressos na forma de fração ou na forma decimal, sejam eles inteiros ou fracionários. Podem ser negativos, nesse caso precedidos do sinal de menos (−), ou positivos, precedidos ou não do sinal de mais (+), ou zero (0), que não é positivo nem negativo.

Um número é racional quando pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, sendo p e q números inteiros e $q \neq 0$. O conjunto dos números racionais, indicado pela letra $\mathbb{Q}$, apresenta algumas peculiaridades:

- Cada um de seus elementos tem várias representações. Veja, por exemplo, algumas representações do número racional $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$	$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$	$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$
Frações equivalentes.	Forma decimal.	Taxa percentual.

Considerando as frações apresentadas na página anterior, temos:

- $\frac{45}{10}$, $\frac{78}{100}$ e $\frac{126}{1000}$ são conhecidas como frações decimais (denominador 10, 100, 1 000 etc.).
- $\frac{7}{4}$, $\frac{38}{5}$ e $\frac{7}{20}$ podem ser escritas como frações decimais, usando-se frações equivalentes. Veja:

$$\frac{7}{4} \xrightarrow{\times 25} \frac{175}{100} = 1,75 \qquad \frac{38}{5} \xrightarrow{\times 2} \frac{76}{10} = 7,6 \qquad \frac{7}{20} \xrightarrow{\times 5} \frac{35}{100} = 0,35$$

Observe que os números decimais que representam essas frações têm um número finito de casas após a vírgula e, por isso, são denominados números decimais exatos.

Quando a fração não pode ser escrita como uma fração decimal, sua representação decimal terá infinitas casas após a vírgula. Veja alguns exemplos:

- $\frac{7}{9} = 0,77777...$ O algarismo **7** se repete indefinidamente.
- $\frac{14}{3} = 4,66666...$ O algarismo **6**, após a vírgula, repete-se indefinidamente.
- $\frac{23}{99} = 0,23232323...$ Após a vírgula, é o número **23** que se repete indefinidamente.

- $\frac{137}{90} = 1,522222...$ Nesse exemplo, após a vírgula aparece o algarismo **5** antes do início da repetição do algarismo 2.
- $\frac{893}{1650} = 0,5412121212...$ A parte que se repete, nesse caso, é **12**. Mas antes dela, logo após a vírgula, aparecem os algarismos 5 e 4 (nessa ordem).

Números racionais dessa forma são chamados **dízimas periódicas**. A parte do número que se repete após a vírgula é denominada **período**.

Assim, para os exemplos acima, temos:

- 0,77777..., 4,66666... e 0,23232323... são **dízimas periódicas simples**.
- 1,522222... e 0,5412121212... são denominadas **dízimas periódicas compostas**.

[16]

[16] Notas e exercícios extraídos do Livro: Matemática Projeto Athos. Autores: José Roberto Bonjorno, Paulo Câmara Sousa, Regina Bonjorno e Tânia Gusmão. Editora FTD. (pp. 15-18)

V. Revisão de potências com expoentes inteiros.

1. Objetivo

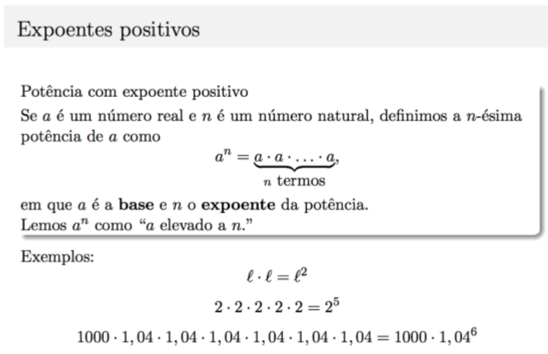
   Através da resolução de alguns exercícios, fazer uma revisão da definição e das propriedades operatórias envolvendo potências.

2. Material a ser utilizado
   - Caderno
   - Lápis e borracha
   - Folha de exercícios

3. Tempo estimado: 40 minutos

4. Descrição da atividade:
   - Apresentar a definição de potências
   - Apresentar as potências com expoentes inteiros
   - Apresentar as propriedades
   - Dar alguns exemplos
   - Passar uma lista de exercícios

5. Sistematização:



Cálculo de potências

Exemplos:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$

b) $\frac{3^3}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2}$

c) $(-4)^4 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = 256$

d) $-4^4 = -(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = -256$

Propriedades

Propriedades das potências

Propriedade	Exemplo
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^4)^3 = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$

Ideia da Propriedade 1:

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ termos}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ termos}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ termos}} = a^{m+n}.$$

Erros na aplicação das propriedades

Falsa propriedade	Exemplo com erro	Exemplo correto
$(a+b)^n = a^n + b^n$	$(3+x)^2 = 3^2 + x^2$	$(3x)^2 = 3^2 x^2$
$a^{m+n} = a^m + a^n$	$4^{2+x} = 4^2 + 4^x$	$4^{2+x} = 4^2 4^x$
$a \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2 \cdot 10^3 = 20^3$	$20^3 = 2^3 10^3$
$a^{mn} = a^m a^n$	$3^{2x} = 3^2 3^x$	$3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$

Expoente negativo

Expoente zero e expoente negativo

Se a é um número real diferente de zero, então definimos

$$a^0 = 1 \quad \text{e} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemplos:

a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

b) $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

c) $-2^{-4} = -\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{16}$

d) $\frac{10^{-3}}{6} = \frac{1}{6 \cdot 10^3} = \frac{1}{6000}$

Atenção
Observe a importância do uso dos parênteses, comparando os exemplos (b) e (c).

Propriedades dos expoentes negativos

Propriedades

Propriedade	Exemplo
6. $\frac{1}{b^{-n}} = b^n$	$\frac{1}{4^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{4^3}} = 1 \cdot \frac{4^3}{1} = 4^3 = 64$
7. $\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$	$\frac{2^{-3}}{6^{-2}} = \frac{\frac{1}{2^3}}{\frac{1}{6^2}} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{6^2}{1} = \frac{6^2}{2^3} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \frac{5^{-2}}{3^{-2}} = \frac{\frac{1}{5^2}}{\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{3^2}{1} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

Exercício 1

Problema

A expressão

$$\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3$$

vale

A) **9/49**
B) 27/7
C) 9/7
D) 49/9
E) 49/27

Exercício 2

Problema

A expressão

$$(-2)^4 \cdot (-2)^{-3}$$

vale

A) 2
B) 1/2
C) -2
D) $-1/2$
E) 2^7
F) -2^7

Exercício 3

Problema

A expressão

$$\frac{(-5)^2 - 4^2 + (\frac{1}{5})^0}{3^{-2} + 1}$$

vale

A) 1
B) 4
C) 9
D) $-10/8$
E) 90

[17]

[17] Na definição de potências dada acima, foram abordadas apenas aquelas cujas bases eram números racionais não-negativos.

VI. Obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica

Geratriz de uma dízima

Já sabemos que a **fração geratriz** dá origem a uma dízima periódica. Mas como fazer para encontrar frações que geram tal dízima?

A seguir, você verá dois métodos que podem ser usados para determinar a fração geratriz para dois tipos de dízimas periódicas simples.

1º Chame a dízima de x:

$$x = 0{,}6666\ldots \quad (1)$$

2º Multiplique ambos os membros da igualdade (1) por 10 para deixar um período da dízima (6) do lado esquerdo da vírgula:

$$10x = 6{,}666666\ldots \quad (2)$$

3º Subtraia membro a membro a igualdade (2) da igualdade (1) para eliminar a parte decimal periódica e, em seguida, resolva a equação:

$$\begin{array}{r} 10x = 6{,}666666\ldots \quad (2) \\ -x = 0{,}666666\ldots \quad (1) \\ \hline 9x = 6 \end{array}$$

$$x = \frac{6}{9}$$

4º Simplifique, quando possível, o resultado da equação:

$$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

5º Pronto, a geratriz da dízima 0,6666... é a fração $\frac{2}{3}$.

Pense e responda

Acabamos de mostrar que a fração geratriz da dízima 0,6666... é $\frac{2}{3}$. Agora, fazendo um cálculo mental, responda: qual é a fração geratriz da dízima periódica 0,3333... ?

1º Como no caso anterior, chame a dízima de x:

$$x = 0{,}727272\ldots \quad (1)$$

2º Multiplique ambos os membros da igualdade (1) por 100 para deixar um período da dízima (72) do lado esquerdo da vírgula:

$$100x = 72{,}727272\ldots \quad (2)$$

3º Subtraia membro a membro a igualdade (2) da igualdade (1) para eliminar a parte decimal periódica e, em seguida, resolva a equação:

$$\begin{array}{r} 100x = 72{,}727272\ldots \quad (2) \\ -x = 0{,}727272\ldots \quad (1) \\ \hline 99x = 72 \end{array}$$

$$x = \frac{72}{99}$$

4º Simplifique, quando possível, o resultado da equação:

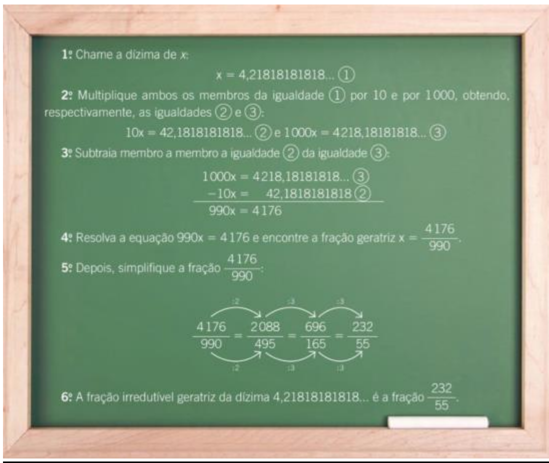
$$x = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$$

5º Pronto, a geratriz da dízima 0,727272... é a fração $\frac{8}{11}$.

Pense e responda

Observando o nosso exemplo, determine, sem fazer muitos cálculos, qual é a fração geratriz da dízima 0,636363...

A presente aula foi elaborada com notas pessoais e notas retiradas de material pesquisado na internet. Segue o endereço do link: https://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/precalculo1.pdf (p.77)



Dica

Como alternativa, você pode decompor a dízima composta em uma adição de um número na forma decimal, ou inteiro, e uma dízima simples e, em seguida, se precisar, transformar o número na forma decimal em fração e adicionar com a fração geratriz da dízima simples.

$$\underbrace{4{,}2181818...}_{\text{dízima composta}} = \underbrace{4{,}2}_{\text{número decimal}} + \underbrace{0{,}0181818...}_{\text{dízima simples}}$$

Atividades

Pratique

21 Utilize as técnicas desenvolvidas para calcular a fração irredutível (simplificada) geratriz de cada dízima.

a) 0,88888888...

b) 0,84848484...

c) 4,27272727...

d) 1,2488888888...

Atividades

Pratique

22 Da maneira como achar conveniente, determine a fração irredutível geratriz das dízimas abaixo.

a) 0,5555...

b) 0,424242...

c) 0,0111...

d) 2,3888...

23 Calcule o valor de:

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{5}}{0{,}0131313...}$$

24 Encontre o número que pode ser colocado no lugar de cada símbolo para que as sentenças sejam verdadeiras.

a) $\frac{■}{9} = 0{,}1111111111...$

b) $\frac{■}{33} = 0{,}15151515...$

c) $\frac{8}{■} = 2{,}666666...$

25 Efetue:

1,44444... + 0,15555...

26 Escreva o radical abaixo na forma de número inteiro.

$$\sqrt{\frac{1{,}777...}{0{,}111...}}$$

27 Determine o valor da expressão:

$$0{,}333... \cdot \frac{3}{5} - 1{,}2666 : 6\frac{1}{3}$$

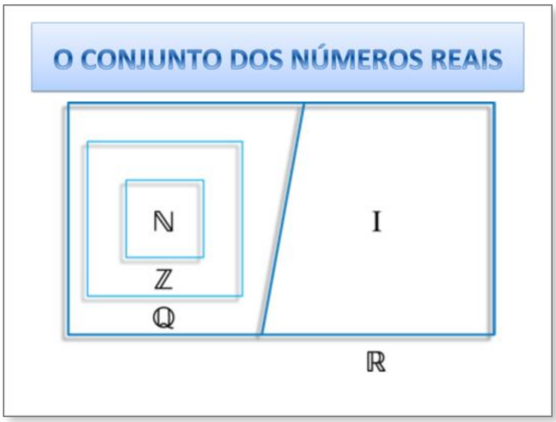
28 Simplifique a expressão abaixo.

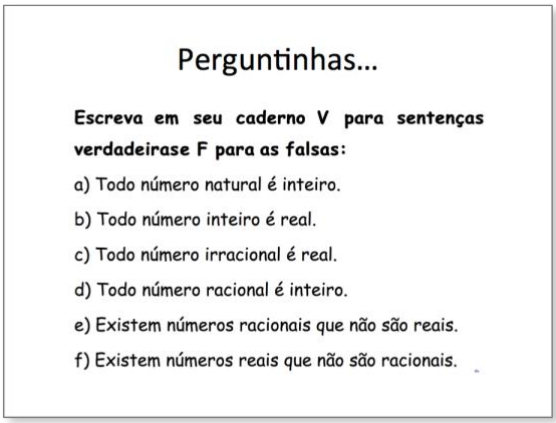
2,5 + 0,4242... : 0,08484

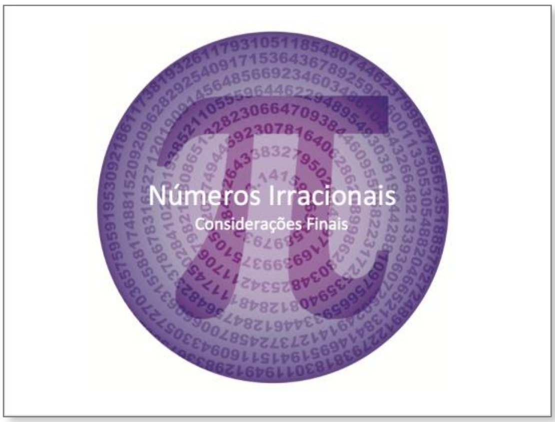
[18]

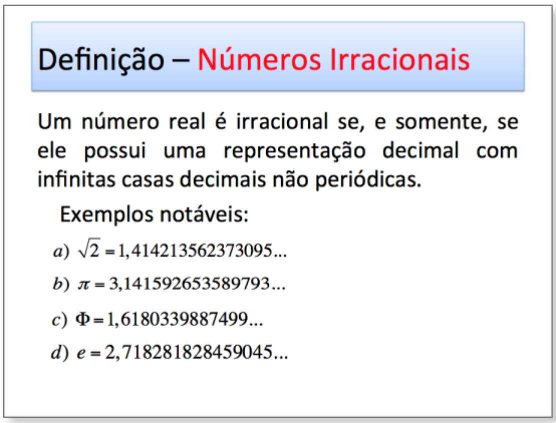
[18] Notas e exercícios extraídos do Livro: Matemática Projeto Athos. Autores: José Roberto Bonjorno, Paulo Câmara Sousa, Regina Bonjorno e Tânia Gusmão. Editora FTD. (pp. 26-29)

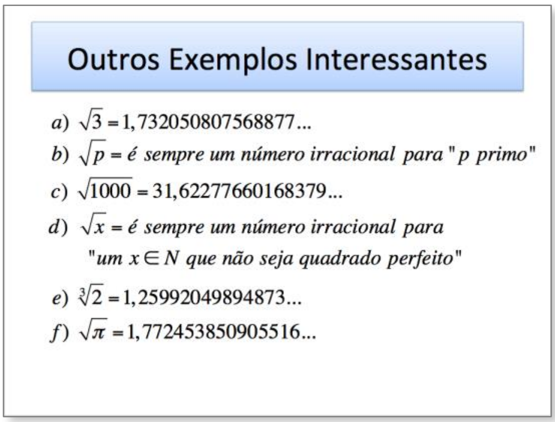
VII. Considerações Finais sobre os Números Irracionais











Observe esses exemplos

0,123456789101112131415161718192021...

0,101001000100001000001000000100000001...

Observação:

Note que, nos números acima, é possível identificar uma lei de formação, ou seja, um padrão para as casas decimais após a vírgula.

Porém, lei de formação não é o mesmo que período.

Ambos os números acima são IRRACIONAIS!!!

Operações entre Irracionais

- ***Irracional*** (+ ou –) ***Irracional*** = ???
  - $a)\ \sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\in I$
  - $b)\ -\sqrt{3}+\sqrt{3}=0\in Q$
- ***Irracional*** (x ou ÷) ***Irracional*** = ???
  - $a)\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5\in Q$
  - $b)\ \sqrt{5}\div\sqrt{5}=1\in Q$
  - $c)\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}\in I$
  - $d)\ \sqrt{6}\div\sqrt{2}=\sqrt{3}\in I$

Uma curiosidade intrigante...

- Entre cada dois números racionais quaisquer, existe sempre um número irracional entre eles; e
- Entre cada dois números irracionais quaisquer, existe sempre um número racional entre eles.

Localizando um irracional na reta real...

Exemplo: $\sqrt{2}$

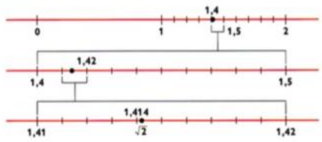
De maneira aproximada, teríamos:

$1<\sqrt{2}<2$

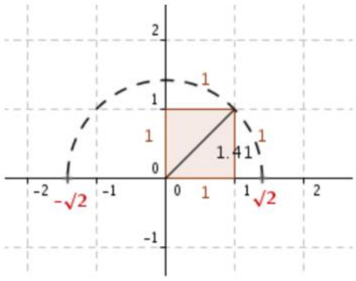
$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$

$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$

...



De maneira mais precisa...



1. Determine a representação decimal de cada um dos números abaixo. Procure entender o que está acontecendo!

$\frac{1}{7}=$

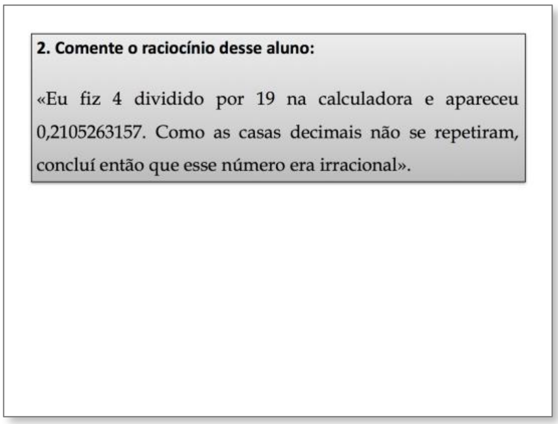
$\frac{4}{7}=$

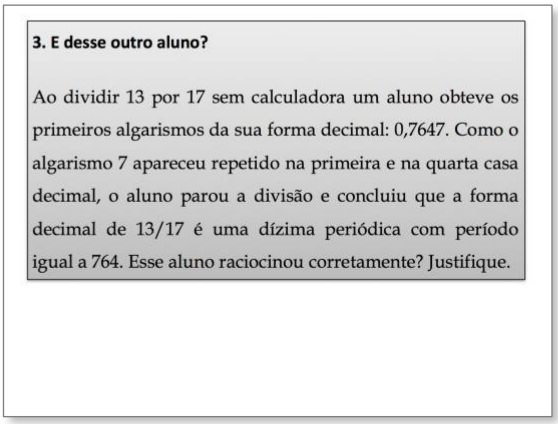
$\frac{2}{7}=$

$\frac{5}{7}=$

$\frac{3}{7}=$

$\frac{6}{7}=$





[19]

[19] As três últimas figuras contidas neste tópico são provenientes de material distribuído no interior da disciplina de Análise com Aplicações do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME – USP.

Apêndice 3 – Questionário avaliativo dos Trabalhos de Pesquisa

AVALIAÇÃO DO TRABALHO DE MATEMÁTICA

8º ano do EFII

1º Trimestre – 2016

Nome do Estudante:	nº	8º ano__	EFII

1. Com base nos conhecimentos apreendidos durante a realização dos trabalhos em grupo a respeito dos números irracionais descreva, com suas palavras, a definição de número irracional e apresente as diferenças que considera essenciais entre estes números e os números racionais.

____

____

____

____

____

____

____.

2. Comente a respeito da experiência que você fez durante a realização dos trabalhos em grupo, sobre a investigação de certos aspectos dos números irracionais: Como foi a dinâmica do grupo, todos deram palpites? Você achou interessante o tema, a pesquisa feita, o resultado que obtiveram e a apresentação do grupo? Você achou interessante as apresentações dos colegas, aprendeu o que com elas? O que mais te impressionou ao estudar tais números?

____

____

____

____

____

____

____.

8º ano EFII – Avaliação do Trabalho sobre os Números Irracionais

Apêndice 4 – Atividades Investigativas aplicadas ao final de 2016

I. Folha 1: A representação decimal dos Racionais

ATIVIDADE INVESTIGATIVA DE MATEMÁTICA

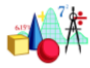
8º ano do EFII

3º Trimestre – 2016

Nome dos Estudante: nº 8º ano__ EFII

Introdução:

1. No início do ano vimos que todo número decimal com finitas casas depois da vírgula ou, com infinitas casas, mas periódicas, podem ser representados por uma fração (número racional): $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.
2. Na aula de hoje, investigaremos a validade ou não da afirmação recíproca, ou seja, que toda fração (número racional) tem uma representação decimal finita ou infinita periódica.
3. Para tanto, a fim de atacarmos esta questão, propomos a seguinte sequência de atividades investigativas.



Atividade 1:

Considere os números: **5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12**.

a) Investigue quantas vezes o número **3** cabe em cada um desses números e **observe o comportamento dos restos que sobram para cada um deles**. Escreva de forma sequencial os restos obtidos.

b) Agora faça o mesmo para o número **4**.

c) Formule uma frase sintética que explique tal comportamento.

Atividade 2:

De forma análoga à atividade 1, investigue agora, os **possíveis restos** das divisões de qualquer número natural por 7 e por 11.

a) Responda **quantos** e **quais** são os restos possíveis nessas divisões.

b) Elabore uma conjectura que generalize o comportamento dos restos de uma divisão qualquer entre números inteiros positivos.

____

____

____

____

____

Atividade 3:

Determinar o **quociente** (sem utilizar calculadora) das seguintes frações e responda:

a) $\frac{53}{3} =$

b) $\frac{76}{4} =$

c) $\frac{67}{5} =$

d) $\frac{29}{6} =$

e) $\frac{23}{7} =$

f) $\frac{83}{11} =$

g) $\frac{479}{20} =$

Agora responda:

I) Caso o resultado seja um número decimal com finitas casas decimais, explique o porquê deste fato.

____

II) Caso apareçam períodos, assinale o período e apresente uma explicação do motivo pelo qual ele se repete indefinidamente.

Atividade 4:

Levando em conta o que puderam observar nas atividades anteriores, o que vocês diriam: vale ou não vale a afirmação recíproca descrita na introdução desta atividade investigativa: *"Toda fração (número racional) tem uma representação decimal finita ou infinita periódica"*? Justifique.

II. Folha 2: Números Irracionais – outros temas

ATIVIDADE INVESTIGATIVA DE MATEMÁTICA

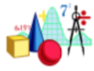
8º ano do EFII

3º Trimestre – 2016

Nome dos Estudante: nº 8º ano__ EFII

Introdução:

1. Vimos em nossa última aula investigativa que quando se divide qualquer número natural ***p*** pelo natural não-nulo ***q***, há exatamente ***q*** restos possíveis, a saber ***(0, 1, 2, 3, ... , q – 1)***, uma vez que o resto deve ser um número natural inferior ao divisor.
2. Assim, excluindo-se o resto nulo, ao dividir ***p*** por ***q***, é possível obter apenas um número finito de restos distintos (no máximo ***q – 1***). Quando algum resto que aparecer for repetido, a sequência de restos vai repetir-se "para sempre", produzindo então um número decimal com infinitas casas decimais periódicas.
3. Com isso, podemos concluir que *"Todo número é representável por uma fração se e só se sua representação decimal for finita ou infinita periódica"*. Nessas condições chamamos tal número de **racional**.



Atividade 1:

a) Investigue e descubra uma forma de construir segmentos de reta cujas medidas sejam iguais a:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *e* Φ.

Faça uso dos conhecimentos apreendidos sobre o Teorema de Pitágoras aplicados a triângulos retângulos convenientes.

O desafio aqui é estabelecer estratégias e justificá-las!

b) A fim de comparar os segmentos construídos na atividade anterior, encontre uma forma de transportá-los convenientemente para uma reta numerada.

Atividade 2:

Invente um número cuja representação decimal seja infinita não periódica e que esteja localizado entre $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ na reta numerada. Escreva o(s) motivo(s) que o(s) leva(m) a dizer que tal número realmente possui infinitas casas não periódicas após a vírgula.

Atividade 3:

a) Dê exemplo de um número **racional** e de um número **irracional** compreendido entre $\mathbf{0,\overline{3}\ \mathit{e}\ 0,34}$.

b) Investigue: quantas frações e quantos números irracionais existem entre $\mathbf{0,\overline{3}\ \mathit{e}\ 0,34}$. Explique suas conclusões.

Apêndice 5 – Atividades Investigativas aplicadas no início de 2017

I. Folha 1: A representação decimal dos Racionais

ATIVIDADE INVESTIGATIVA DE MATEMÁTICA

8º ano do EFII

1º Trimestre – 2017

Nome dos Estudante:	nº	8º ano__	EFII

Introdução:

1. Hoje daremos início a uma série de atividades de **cunho investigativo**, cujo objetivo é a **ampliação do universo de números conhecidos**, bem como, a apropriação de suas propriedades.
2. Nas aulas com **atividades investigativas**, espera-se que cada estudante procure desempenhar o papel de um pesquisador da área de Matemática, buscando ter um espírito criativo, questionador, levantando hipóteses, estabelecendo conjecturas e procurando demonstrá-las.
3. Na aula de hoje, investigaremos a validade ou não da seguinte afirmação: ***"Toda fração (número racional) possui uma representação decimal finita ou infinita periódica"***.
4. Para tanto, a fim de atacarmos esta questão, propomos a seguinte sequência de atividades investigativas.

Atividade 1:

Considere os números: **5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12**.

a) Investigue quantas vezes o número **3** cabe em cada um desses números e **observe o comportamento dos restos que sobram para cada um deles**. Escreva de forma sequencial os restos obtidos.

b) Agora faça o mesmo com o número **4**.

c) Percebeu alguma regularidade? Imaginou uma propriedade geral sobre o comportamento dos restos obtidos? Formule uma frase sintética que explique tal comportamento.

Atividade 2:

De forma análoga à atividade 1, investigue agora, os **possíveis restos** das divisões de qualquer número natural por 7 e por 11.

a) Responda **quantos** e **quais** são os restos possíveis nessas divisões.

b) Elabore uma **conjectura** que generalize o **comportamento dos restos** de uma divisão qualquer entre números inteiros positivos.

____

____

____

____

____

8º ano EFII – Atividade Investigativa – 3 Página 1

Atividade 3:

Determinar o **quociente** (sem utilizar calculadora) das seguintes frações.

a) $\frac{53}{3} =$

b) $\frac{76}{4} =$

c) $\frac{67}{5} =$

d) $\frac{29}{6} =$

e) $\frac{23}{7} =$

f) $\frac{83}{11} =$

g) $\frac{479}{20} =$

Agora responda:

I) Caso o resultado seja um número decimal com **finitas** casas decimais, explique o porquê deste fato.

____
____
____
____
____

II) Caso apareçam **períodos**, assinale o período e apresente uma explicação do motivo pelo qual ele se repete indefinidamente.

____
____
____
____
____

Atividade 4:

Levando em conta o que puderam observar nas atividades anteriores, o que vocês diriam: vale ou não a afirmação descrita na introdução desta atividade investigativa: *"Toda fração (número racional) tem uma representação decimal finita ou infinita periódica"*? Justifique.

____
____
____
____
____
____
____
____

II. Folha 2: A representação decimal e o uso de calculadoras

ATIVIDADE INVESTIGATIVA DE MATEMÁTICA

8º ano do EFII

1º Trimestre – 2017

Nome dos Estudante: nº 8º ano__ EFII

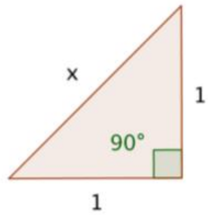
Introdução:

1. Na primeira atividade investigativa vocês verificaram que ***"Toda fração (número racional) possui uma representação decimal finita ou infinita periódica"***.
2. Posteriormente, em aula, vimos que um número cuja representação decimal é finita ou infinita e periódica pode ser representado por uma fração geratriz.
3. Dessa forma, com esses dois resultados, chegamos a uma nova caracterização para os números racionais, ou seja, o conjunto dos números Racionais coincide com o conjunto dos números cuja representação decimal é finita ou é infinita e periódica.
4. Na atividade de hoje buscamos investigar o tipo de representação decimal das medidas desconhecidas dos lados de alguns triângulos retângulos.

Atividade 1:

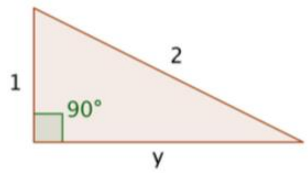
Usando uma calculadora simples determine, com cinco casas decimais, a medida dos lados desconhecidos dos triângulos abaixo. A seguir, utilizando uma calculadora científica, obtenha os valores das dez primeiras casas decimais de cada medida desconhecida e compare-a com aquela que você calculou.

a)



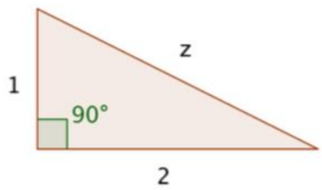
Resposta: ____________________

b)



Resposta: ____________________

c)



Resposta: ____________________

Atividade 2:

Com o uso da calculadora é possível decidir se as representações decimais das medidas encontradas na atividade anterior são finitas ou infinitas e periódicas, ou seja, se são números Racionais?

Se sua resposta for afirmativa, justifique. Se, for negativa, diga qual é o tipo de representação decimal que admitem e as razões pelas quais você conseguiu comprovar isso com o uso da calculadora.

III. Folha 3: Comensurabilidade de segmentos

ATIVIDADE INVESTIGATIVA DE MATEMÁTICA

8º ano do EFII

1º Trimestre – 2017

Nome dos Estudante: nº 8º ano__ EFII

Introdução:

Definição: Dizemos que dois segmentos são comensuráveis quando existe um (outro) segmento que cabe um número inteiro de vezes em cada um deles.

Note que este segmento funciona como uma unidade de medida comum para os dois segmentos iniciais.

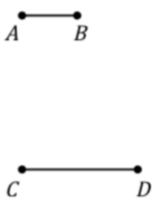
1. Com as duas primeiras atividades investigativas da aula de hoje, pretendemos que vocês se familiarizem com o conceito acima definido.
2. Por fim, com a terceira atividade, proponho que vocês comprovem a validade da seguinte afirmação geral sobre a comensurabilidade de segmentos: ***"Um segmento é comensurável com o segmento unitário se, e somente se, sua medida puder ser representada por uma fração."***

Atividade 1:

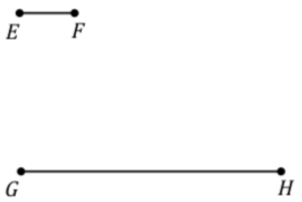
Considere os seguintes segmentos dados abaixo.

Verifique a existência ou não de algum segmento de medida $\boldsymbol{u}$ que caiba um número inteiro de vezes em cada um dos pares de segmentos de cada item. Em caso afirmativo, apresente a medida de $\boldsymbol{u}$.

a) $AB = 1\ cm$ e $CD = 2\ cm$

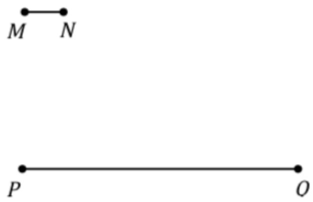


b) $EF = 1\ cm$ e $GH = 4{,}5\ cm$



c) $IJ = \frac{8}{7}\ cm$ e $KL = 7\ cm$

d) $MN = \frac{2}{3}\ cm$ e $PQ = \frac{8}{5} cm$

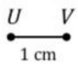


Atividade 2:

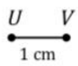
Sendo $\overline{UV}$ um segmento unitário, ou seja, $(med(\overline{UV}) = 1cm)$, dê três exemplos de segmentos comensuráveis com $\overline{UV}$, com a condição de que, no máximo um deles apresente medida inteira.

Em cada exemplo, apresente a unidade de medida $\boldsymbol{u}$, comum para $\overline{UV}$ e para o outro segmento que você criou. Diga quantas vezes essa unidade comum cabe em cada um dos dois segmentos comensuráveis de cada exemplo.

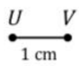
Exemplo 1:



Exemplo 2:



Exemplo 3:



Atividade 3:

Generalizando as descobertas encontradas na primeira e segunda atividade, explique com suas palavras porque vale a afirmação do item 2 da introdução: ***"Um segmento é comensurável com o segmento unitário se, e somente se, sua medida puder ser representada por uma fração"***

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Dados dois segmentos quaisquer, eles são sempre comensuráveis? Justifique.

____

____

____

____

____

IV. Folha 4: Números Irracionais – outros temas

ATIVIDADE INVESTIGATIVA DE MATEMÁTICA

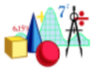
8º ano do EFII

1º Trimestre – 2017

Nome dos Estudante: nº 8º ano__ EFII

Introdução:

1. Vimos na nossa última aula que a diagonal de um quadrado de lado um não é comensurável com o seu lado. Assim, a $\sqrt{2}$ foi chamada de ***número irracional*** por não admitir representação fracionária. Ficou provado que sua representação decimal é, portanto, ***infinita e não periódica***.
2. Também é possível demonstrar que $\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{5}$ são números irracionais.
3. Na atividade de hoje, localizaremos alguns números irracionais na reta numerada, cada aluno e aluna criará seu próprio número irracional e, por fim, investigaremos sobre a quantidade de pontos da reta numerada associados a números irracionais.



Atividade 1:

Adotando-se uma unidade de medida padrão e baseando-se nas ideias apreendidas na segunda atividade investigativa, construa segmentos de medidas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{5}$. Encontre uma forma de transportá-los convenientemente para uma reta numerada.

Atividade 2:

a) Invente um número cuja representação decimal seja infinita não periódica e que esteja localizado entre **0** e **1** na reta numerada. Escreva o(s) motivo(s) que o(s) leva(m) a dizer que tal número realmente possui infinitas casas não periódicas após a vírgula.

b) Considere o número real dado por 0, 112358314..., onde cada dígito da parte fracionária a partir do terceiro, é obtido somando os dois dígitos anteriores, ficando-se apenas com o algarismo das unidades desta soma e desprezando o das dezenas. Esse número é racional ou irracional? Justifique.

Atividade 3:

a) Dê exemplo de um número **racional** e de um número **irracional** compreendido entre $\mathbf{0,\overline{3}}$ $\boldsymbol{e}$ $\mathbf{0,34}$.

b) Investigue: quantas frações e quantos números irracionais existem entre $\mathbf{0,\overline{3}}$ $\boldsymbol{e}$ $\mathbf{0,34}$. Explique suas conclusões.