16. A diminuição relativa da pressão atmosférica P com altura z é expressa pela seguinte equação: $dP/P = -Cdz$, onde C é uma constante. a) Mostrar que $P(z) = P_0\, e^{-Cz}$. b) Sabendo-se que a pressão atmosférica na altura $5,5\, km$ é a metade da pressão no nível do mar, determinar a constante C.

Solução

Em um campo gravitacional $\overrightarrow{g}$, a pressão de um fluído é diretamente proporcional a profundidade em que ele se encontra, ou seja, quanto maior a profundidade, maior a pressão. Sabemos que, para uma altura z a expressão que determina sua pressão como função de sua altura z é:

$$P(z) = P_0 + \rho g h$$

$$dP = -\rho g\, dz$$

E portanto:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

vale para qualquer fluído em equilíbrio no campo gravitacional. A temperatura constante (supondo a atmosfera isotérmica), decorre da lei dos gases perfeitos $PV = nRT$ que a densidade é diretamente proporcional à pressão como mostraremos:

$$PV = nRT = \frac{M}{\mathcal{M}}RT$$

$$P = \frac{M}{V}\frac{RT}{\mathcal{M}}$$

Pois sabemos que $n = M/\mathcal{M}$ em que M é a massa do gás e $\mathcal{M}$ a massa molar do gás. Também podemos perceber que m/V é a densidade do gás enquanto RT/M representa apenas uma constante, de modo que $P = constante \times \rho$, ou seja, $P(z)$ é proporcional à densidade $\rho(z)$. Isso nos mostra que:

$$\frac{\rho(z)}{P(z)} = \frac{\rho(0)}{P(0)} = \frac{\rho_0}{P_0}$$

Onde tomamos $z = 0$ como sendo o nível do mar. Portanto substituindo a expressão acima na nossa expressão inicial:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = \frac{\rho}{P_0}P(z)g \quad \longrightarrow \quad \frac{dP(z)}{P(z)} = -\frac{\rho_0 g}{P_0}dz$$

Se chamarmos:

$$\frac{\rho g}{P_0} = Constante = C$$

Chegamos a nossa expressão inicial:

$$\frac{dP}{P} = -Cdz$$

Como todos os P estão em um lado da equação e todos os z estão do outro lado, basta integramos ambos os lados da equação para obter:

$$\frac{dP}{P} = -Cdz$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int -Cdz$$

Se escrevemos: $\dfrac{dP}{P} = \dfrac{1}{P} \cdot dP$, e observando que $-C$ é uma constante (portanto podemos tirá-la de dentro da integral), obteremos que:

$$\int \frac{1}{P} dP = -C \int dz$$

Se integrarmos de uma pressão P_0 até P e de uma altura z_1 até z_2, teremos que:

$$\int_{P_0}^{P} \frac{1}{P'} dP' = -C \int_{z_1}^{z_2} dz'$$

Do cálculo, temos que a integral do lado esquerdo e direito são:

$$ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -C(z_2 - z_1)$$

$$log_e\left(\frac{P}{P_0}\right) = -C(z_2 - z_1)$$

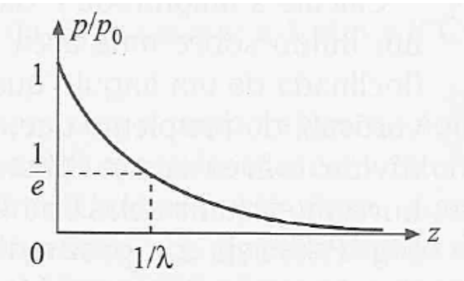
E portanto, utilizando as propriedades do logaritmo (e usando a nossa diferença de alturas $z_2 - z_1$ como simplesmente uma altura genérica z):

$$e^{-Cz} = \frac{P}{P_0}$$

E portanto:

$$P = P_0\, e^{-Cz}$$

Essa fórmula mostra que a pressão numa atmosfera isotérmica decresce exponencialmente com a altitude, caindo a $1/e \approx 0,37$ (37%) de seu valor inicial P_0 para uma altitude $z = 1/C = P_0/(\rho g)$. Para o ar à temperatura de $15°C$, a densidade ao nível do mar e à pressão de 1 atm, é $p_0 = 1,226\, kg/m^3$, o que daria $1/C = 8,4\, km$. Esta é a ordem de grandeza da altitude da *troposfera*, a camada mais baixa da atmosfera.



Curiosidade: A temperatura na troposfera, em lugar de permanecer constante, tende a decrescer para altitudes mais elevadas. A equação ainda pode ser empregada, mas temos que subdividir a troposfera em camadas de temperatura aproximadamente constantes, usando valores de C adequados à temperatura média de cada camada. Na estratosfera porém, situada logo acima, a aproximação isotérmica é bastante melhor.

(b) Substituindo os valores:

$$P(5500\,m) = \frac{1}{2}P(0)$$

Substituindo P_0:

$$P_0 e^{-C\,5{,}5\times10^3} = \frac{1}{2}P_0 e^{-C\cdot 0} = \frac{1}{2}P_0$$

Portanto:

$$e^{-C\,5{,}5\times10^3} = \frac{1}{2}$$

Podemos escrever a expressão acima como sendo:

$$log_e \frac{1}{2} = -C\,5,5\times 10^3\,m$$

$$C = -\frac{log_e \frac{1}{2}}{5,5\times 10^3\,m} = -\frac{-0.69}{5,5\times 10^3\,m} = 1,2\times 10^{-4}\,m^{-1}$$