MAE0121 - Introdução à Probabilidade e Estatística II
Resolução da Lista 9
Vanderlei da Costa Bueno

1. A função densidade de probabilidade de (X, Y) é

$$f(x,y) = cye^{-yx}e^{-y}, \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty.$$

A) Calcule o valor de c para que $f(x,y)$ seja uma função densidade de probabilidade.
B) Calcule $E[X|Y = y]$.
C) Verifique, neste exercício, que $E\{E[X|Y]\} = E[X]$.
D) Verifique se X e Y são independentes.
E) Calcule o coeficiente de correlação linear entre X e Y.

Respostas: A)
Para que $f(x,y)$ seja uma função densidade de probabilidade devemos ter $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)dxdy = 1$.

$$1 = \int_0^\infty \int_0^\infty cye^{-yx}e^{-y}dxdy = \int_0^\infty cye^{-y}(\int_0^\infty e^{-yx}dx)dy =$$
$$\int_0^\infty cye^{-y}(\frac{1}{y})dy = c\int_0^\infty e^{-y}dy = c.$$

Portanto $c = 1$.

B) Para calcular $E[X|Y = y]$, devemos obter a função densidade de probabilidade da variável condicional $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f(x,y)dx = \int_0^\infty ye^{-yx}e^{-y}dx = ye^{-y}\int_0^\infty e^{-yx}dx = \frac{ye^{-y}}{y} = e^{-y}. \quad 0 < y < \infty,$$

uma distribuição exponencial padrão.
Portanto

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{ye^{-yx}e^{-y}}{e^{-y}} = ye^{-yx}, \quad 0 < x < \infty.$$

e

$$E[X|Y = y] = \int_0^\infty xye^{-yx}dx = \frac{1}{y}.$$

(é a esperança da exponencial com parâmetro y.)

C)
A variável aleatória $\varphi(Y) = E[X|Y]$ assume valores $E[X|Y = y]$ com função densidade de probabilidade $f_Y(y)$. Portanto
$E\{E[X|Y]\} = \int_0^\infty \frac{1}{y}e^{-y}dy$ que não existe.
Observe também que

$$f_X(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^\infty ye^{-yx}e^{-y}dy = \frac{x+1}{x+1}\int_0^\infty ye^{-y(x+1)}dy = \frac{1}{(x+1)^2}, \quad 0 < x < \infty$$

e $E[X] = \int_0^\infty \frac{x}{(x+1)^2}dx =?$
Fazendo $y = x + 1$, $x = y - 1$ e $dx = dy$. Se $x = 0$ então $y = 1$ e se $x = \infty$, $y = \infty$.
Portanto

$$E[X] = \int_1^\infty \frac{y-1}{y^2}dy = \int_1^\infty y^{-2}(y-1)dy = \int_1^\infty (y^{-1} - y^{-2})dy =$$
$$\int_1^\infty y^{-1}dy - \int_1^\infty y^{-2}dy = \ln y|_1^\infty - (-y^{-1}|_1^\infty) = \infty,$$

isto é, não existe.

D) $f(x,y) = cye^{-yx}e^{-y}, \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty;$

$f_X(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \quad 0 < x < \infty;$

$f_Y(y) = e^{-y}. \;\; 0 < y < \infty.$

Claramente $f(x,y) \neq f_X(x).f_Y(y)$, indicando que X e Y não s ao independentes,

E) Como $E[X]$ n˜ ao existe, $\rho(X,Y)$ não está definida.

2. Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}, \quad 0 < x < \infty, 0 << y < \infty.$$

A) Calcular $P(0 \leq X \leq 2)$;

B) Calcular $P(0 \leq X+Y \leq 2)$

C) Qual a distribuição de $E[X|Y]$?

Respostas:

A)

$P(0 < X \leq 2) =??$

$P(0 < X \leq 2) = \int_0^2 f_X(x)dx.$

Contudo

$$f_X(x) = \int_0^\infty e^{-x}e^{-y}dy = e^{-x}\int_0^\infty e^{-y}dy = e^{-x}.1 \;\; 0 < x < \infty.$$

e

$$P(0 < X \leq 2) = \int_0^2 e^{-x}dx = (-e^{-x}|_0^2) = 1 - e^{-2}.$$

B)

Observe que

$$P(0 < X+Y \leq 2) = P(-X < Y \leq 2-X) = P(Y \leq 2-X).$$

A última igualdade vale pois $P(-X < Y) = 1$.

A reta $y = 2-x$ passa pelos pontos $(0,2)$ e $(2,0)$. A área abaixo desta reta é calculada pela integral

$$\int_0^2\int_0^{2-x} e^{-(x+y)}dydx = \int_0^2 e^{-x}(\int_0^{2-x} e^{-y}dy)dx =$$

$$\int_0^2 e^{-x}(-e^{-y}|_0^{2-x})dx = \int_0^2 e^{-x}(1-e^{2-x})dx =$$

$$\int_0^2 e^{-x}dx - \int_0^2 e^{-2}dx = 1 - e^{-2}.$$

Como $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$, X e Y são independentes e $E[X|Y] = E[X]$ (uma constante) e portanto $E[X|Y]$ tem distribuição degenerada em $E[X]$

3. A) Se X tem distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$, qual a função de distribuição e a função densidade de probabilidade de $Z = -\ln X$?

   B) Se Z tem distribuição exponencial padrão, de parâmetro $\lambda = 1$, qual a função de distribuição e a função densidade de probabilidade de $X = \ln Z$?

   Respostas:

   A) Se X tem distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$, sua funç ao de distribuição é: $F_X(x) = x, \;\; 0 < x < 1$ e $0, \;\; cc.$

   Observe que se $0 < x < 1$ temos $0 < z < \infty$. Para z neste intervalo :

$$P(Z \leq z) = P(-\ln X \leq z) = P(\ln X \geq -z) = P(X \geq e^{-z}) = 1 - P(X \leq e^{-z}) = 1 - e^{-z}.$$

   Concluimos que Z tem distribuição exponencial padrão, com função de distribuição $F_Z(z) = 1 - e^{-z}$. e função densidade de probabilidade $f_Z(z) = e^{-z}, \;\; 0 < z < \infty$.

   B) Se Z tem distribuição exponencial padrão, sua função de distribuição é: $F_Z(z) = 1 - e^{-z} \;\; 0 < z < \infty$.
   Observe que se $0 < z < \infty$ temos $-\infty < x < \infty$. Para x neste intervalo :

$$P(X \leq x) = P(\ln Z \leq x) = P(Z \leq e^x) = 1 - e^{-e^x}.$$

   Concluimos que X tem distribuição de Gumbel apropriada para medir valores extremos como temperatura, velocidade do vento, com função densidade de probabilidade $f_X(x) = e^{-e^x}.e^x \;\; -\infty < x < \infty$.

4. A) Se X_i tem distribuição normal com média μ_i e variância σ_i^2, $i = 1, 2, ..., 10$ e s ao independentes, use a função geradora de momentos para provar que $X_1 + X_2 + ... + X_{10}$ tem distribuição normal com média $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_{10}$ e variância $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_{10}^2$

   B) Se na parte A) as médias e as variâncias são iguais, qual a distribuição de $\frac{\Sigma_{i=1}^{10} X_i}{10}$?

   Respostas:

   A função geradora de momentos da distribuição $N(\mu; \sigma^2)$ é

$$M_X(t) = e^{t.\mu + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}.$$

   A função geradora de momentos de $\Sigma_{i=1}^{10} X_i$, $M_{\Sigma_{i=1}^{10} X_i}(t)$ é

$$E[e^{t.\Sigma_{i=1}^{10} X_i}] = E[\pi_{i=1}^{10} e^{t.X_i}] =$$

$$\pi_{i=1}^{10} E[e^{t.X_i}] = \pi_{i=1}^{10} e^{t.\mu_i + \frac{t^2 \sigma_i^2}{2}} =$$

$$[e^{t.\Sigma_{i=1}^{10} \mu_i + \frac{t^2 \Sigma_{i=1}^{10} \sigma_i^2}{2}}$$

   que é a função geradora de momentos da distribuição $N(\Sigma_{i=1}^{10} \mu_i; \Sigma_{i=1}^{10} \sigma_i^2)$. Observe que a função geradora de momentos caracteriza completamente a distribuição de probabilidade.

   Se na parte A) as médias forem iguais a μ e as Variâncias iguais a σ^2 temos que

$$\Sigma_{i=1}^{10} X_i \sim N(n\mu; n\sigma^2)$$

   e $\frac{\Sigma_{i=1}^{10} X_i}{n}$ tem média $E[\frac{\Sigma_{i=1}^{10} X_i}{n}] = \frac{1}{n} E[\Sigma_{i=1}^{10} X_i] = \frac{n.\mu}{n} = \mu$ e variância $Var(\frac{\Sigma_{i=1}^{10} X_i}{n}) = \frac{1}{n^2} Var(\Sigma_{i=1}^{10} X_i) = \frac{n.\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.
   Como combinações lineares de distribuições normais tem distribuição normal concluimos que

$$\overline{X} \sim N(\mu; \sigma^2).$$

5. Seja X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuições exponenciais de parâmetros λ e μ, respectivamente. Calcular a função densidade de probabilidade e a função de distribuição de $Z = \max\{X, Y\}$.
Resposta

As distribuições exponenciais tem domínio no intervalo $(0, \infty)$ e portanto Z assume valores em $(0, \infty)$. A função de distribuição de Z é

$$P(Z \leq z) = P(\max\{X, Y\} \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) =$$

$$(1 - e^{-\lambda z})(1 - e^{-\mu z})1 - e^{-\mu z} - e^{-\lambda z} + e^{-(\mu+\lambda)z}.$$

6. Uma variável aleatória T tem função de distribuição exponencial se, e somente se,

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ 1 - \exp[-\lambda t] & : \quad t \geq 0 \end{cases}.$$

$$\mathrm{F}_T(t) = 1 - \exp[-\lambda.t].$$

$F_T(t)$ é diferenciável e tem função densidade de probabilidade

$$f(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ \lambda \exp[-\lambda t] & : \quad t \geq 0 \end{cases}.$$

A função geradora de momentos de T é dada por

$$M_T(t) = E[\exp[t.T]] = \int_0^\infty \exp[tx]\lambda \exp[-\lambda.x]dx =$$

$$\int_0^\infty \lambda \exp[-x.(\lambda - t)]dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda.$$

com primeira e segunda derivadas iguais a $M_T^{(1)}(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$ e $M_T^{(2)}(t) = \frac{2.\lambda.(\lambda - t)}{(\lambda - t)^4}$, respectivamente. No ponto zero temos

$$\mu = E[T] = M_T^{(1)}(0) = \frac{1}{\lambda}$$

e $E[T^2] = M_T^{(2)}(0) = \frac{2}{\lambda^2}$ de forma que

$$\sigma^2 = Var(T) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Observe que a média de T é o inverso de seu parâmetro.

Se Z é uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$, a variável aleatória Y, resultado da transformação $Y = Z^2$, tem função densidade de probabilidade

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \exp[-\frac{y}{2}], \quad y > 0,$$

denominada de distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade.

Resposta

Evidentemente, os valores de Y são positivos e a função de distribuição de Y é dada por

$$P(Y \leq y) = P(Z^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq Z \leq \sqrt{y}) =$$

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{x^2}{2}]dx = 2.\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{x^2}{2}]dx.$$

Portanto a função densidade de probabilidade de Y, $f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$ é

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \exp[-\frac{y}{2}], \quad y > 0,$$

Definição:
A função de distribuição de uma variável aleatória Y com função densidade de probabilidade

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})} (\frac{1}{2})^{\frac{k}{2}} y^{\frac{k}{2}-1} \exp[-\frac{y}{2}], \quad y > 0,$$

é denominada de distribuição qui-quadrado com k graus de liberdade, tem média $\mu = k$ e variância $\sigma^2 = 2.k$.

A função Gama, denotada por Γ que aparece na definição acima é definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \exp[-x] dx, \quad t > 0.$$

Por integração por partes pode-se provar que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. Se $t = n$, um número natural, temos $\Gamma(n+1) = n!$. Em particular $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n} \sqrt{2\pi}$ e $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2.\Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Definição
A função de distribuição de uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} \exp[-\alpha y], \quad x > 0,$$

é denominada de distribuição gama com parâmetros α e λ, os quais são números reais positivos.
A distribuição gama tem funçãogeradora de momentos dada por

$$M_X(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^\alpha, \quad t < \lambda.$$

A distribuição gama é denotada por gama(α, λ) e tem média $E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$ e variância $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Sejam $X_1, X_2, ..., X_{10}$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a X que tem distribuição exponencial de parâmetro λ
A função geradora de momentos de X é

$$M_T(t) = E[\exp[t.T]] = \int_0^\infty \exp[tx] \lambda \exp[-\lambda.x] dx =$$

$$\int_0^\infty \lambda \exp[-x.(\lambda - t)] dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda.$$

Portanto

$$M_{\sum_{i=1}^{10} X_i}(t) = E[e^{-t.\sum_{i=1}^{10} X_i}] = E[\pi_{i=1}^{10} e^{-tX_i}] = \pi_{i=1}^{10} E[e^{-tX_i}] =$$

$$\pi_{i=1}^{10} E[e^{-tX_1}] = E[e^{-tX_1}]^n = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^{10}, t < \lambda.$$

Concluimos que soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponencial de parÃmetro λ tem distribuição gama de parâmetros λ e n.