Lista 4 - Cálculo III

1. Prove, pela definição, que as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cujos termos gerais são dados abaixo, são convergentes:

   a) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ b) $x_n = \dfrac{n}{n+8}$ c) $x_n = \dfrac{3n}{n+8}$ d) $x_n = \dfrac{2n^2}{n^2+7}$

2. Considere a afirmação: "Se (x_n) e (y_n) são sequências divergentes então $(x_n + y_n)$ é uma sequência divergente."Se ela for verdadeira, prove-a e se for falsa, dê um contra-exemplo.

3. Use somas parciais (reduzidas) para mostrar que

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = 1$

4. Verifique se as séries convergem ou divergem:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n}$

   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n)}{n^2+1}$ j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$

   m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}}$ n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$

   q) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{25n^2+1}$

Observação: Para os exercícios l) e q) aplique o seguinte teste:

Teorema 5 (Teste da Integral)

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. *Se* $a_n = f(n)$, *então*

- *Se* $\int_1^\infty f(x)dx$ *for* ***convergente***, *então* $\sum_{i=1}^{n} a_n$ ***converge***.
- *Se* $\int_1^\infty f(x)dx$ *for* ***divergente***, *então* $\sum_{i=1}^{n} a_n$ ***diverge***.

5. Verifique se as séries são absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes ou divergentes.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)!}{n! 10^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}$

6. Encontre o raio de convergência das séries de potências e seu intervalo de convergência.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

   f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{2^n}$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

7. Representе as funções abaixo por meio de séries de potências e determine o raio de convergência.

   a) $\dfrac{1}{1-x}$ b) $\dfrac{1}{1+x^2}$ c) $\dfrac{1}{x+2}$ d) $\dfrac{x^3}{x+2}$ e) $\dfrac{1}{1-x^2}$ f) $\ln(1+x)$ g) $\arctan x$

   h) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ i) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$ j) $\ln(5-x)$

8. Encontre a série de Maclaurin das funções abaixo.

   a) $f(x) = x\cos x$ b) $f(x) = e^{5x}$ c) $f(x) = e^x + e^{2x}$

9. Encontre a soma da série

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{n 5^n}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$ f) $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$