Séries de Potências

Uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad ; x_0 \in \mathbb{R}$$

é uma série de potências em $(x-x_0)$, ou em torno de x_0.

Para simplificar, e s.p.g, estudaremos o caso $x_0 = 0$, ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A primeira pergunta que surge nesse estudo é: P/ quais valores de x a série converge?

Exemplo: Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{2^n}{n \cdot 3^n} \cdot x^n \right)$$

Logo

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} \cdot x^{n+1} \cdot \frac{n\, 3^n}{2^n\, x^n} \right| = \frac{2}{3} \frac{n}{n+1} |x| \to \frac{2}{3}|x|$$

Assim para

$$\frac{2}{3}|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{3}{2}$$

a série é abs. convergente

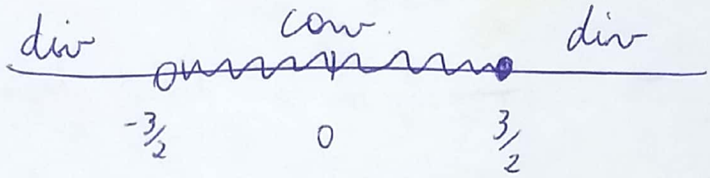
e para

$\frac{2}{3}|x| = 1 \Rightarrow |x| = \frac{3}{2}$ Temos

$\to x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge pelo teste das alternadas

$\to x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \sum = \sum_{1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ diverge

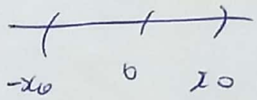
• p/ $\frac{2}{3}|x| > 1 \Rightarrow |x| > \frac{3}{2}$ a série diverge



$I = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ é o intervalo de convergência

Teorema: Se $\sum a_n x^n$ converge p/ $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, então $\sum a_n x^n$ converge p/ $|x| < |x_0|$

« converge também



Dem.:

$\sum a_n x_0^n$ conv $\Rightarrow a_n x_0^n \to 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq p/ $n \geq n_0$, $|a_n x_0^n| < 1$

Seja $x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < |x_0|$

Logo

$$\sum_{n_0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = \sum_{n_0}^{\infty} \overbrace{|a_n x_0^n|}^{<1} \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \sum_{n_0}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{x}{x_0}\right|}_{<1}^n$$

série geom. é convergente

Corolário: Se $\sum a_n x^n$ div p/ $x = x_0$ então $\sum a_n x^n$ div p/ ~~todo~~ x tq $|x| > |x_0|$

Dem.: Imediata.

A

Seja $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \sum a_n x^n \text{ é convergente}\}$

Seja $R = \sup\{x;\ x \in D\}$. O número R é o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$

Observe que a série converge em $I = (-R, R)$ e diverge em $J_1 = (-\infty, -R)$ e $J_2 = (R, +\infty)$ mas nada podemos afirmar a respeito dos valores $x = R$ e $x = -R$, como o exemplo anterior nos mostrou

Exemplos: ① $\sum_0^{\infty} n!\, x^n$ $\quad R = 0$

$\left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = |(n+1) \cdot x| \to +\infty$ se $x \neq 0$

② $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad R = \infty$

$\frac{x^{\cancel{n}} x}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} \to 0 \quad \forall x$

③ $\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\quad R = 1$ $\quad$ conv. em $[-1, 1]$

$\frac{x\, \cancel{x^n}}{(n^2 + 2n + 1)} \cdot \frac{n^2}{\cancel{x^n}} = \frac{\cancel{n^2}\, 1}{\cancel{n^2}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}\, x \to x$

→ conv. p/ $|x| < 1$

→ div p/ $|x| > 1$

→ p/ $x = 1$ conv

→ p/ $x = -1$ conv. alternadas

④ $\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\quad R = 1$ $\quad$ conv em $[-1, 1)$.

$\frac{x\, \cancel{x^n}}{n+1} \cdot \frac{n}{\cancel{x^n}} \to x$

→ conv p/ $|x| < 1$

→ div p/ $|x| > 1$

→ p/ $x = 1$ div

→ p/ $x = -1$ conv alternadas

~~Teor.~~ **Proposição**: Se R for o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ então R também é o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ obtida da série dada por derivação termo a termo

Dem.: Seja R_1 o raio de conv. de $\sum n a_n x^{n-1}$; logo

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\, a_{n+1}\, x^{n}}{n\, a_n\, x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) \left|\frac{a_{n+1}\, x}{a_n}\right| = R$$

Obs.: As séries

$$\sum a_n x^n,\ \sum n\, a_n x^{n-1},\ \sum n(n-1)\, a_n x^{n-2},\ \dots$$

têm todas o mesmo raio de convergência

Proposição: Se R for o raio de convergência de $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ então R também é o raio de convergência de $\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ obtida da série dada por integração termo a termo.

Dem.: Seja R_2 o raio de conv de $\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$; logo

$$R_2 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{a_n\, x^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \left|\frac{a_{n+1}\, x}{a_n}\right| = R$$

Obs.: As séries

$$\sum a_n x^n,\ \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},\ \sum \frac{a_n}{n+2} x^{n+2},\ \dots$$

têm todas o mesmo raio de convergência.

A

Teorema (de Unicidade de Séries de Potências): Se $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ convergem em uma viz. da origem, e $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$ então $a_n = b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x$ nesta viz.

Dem.: Seja x numa vizinhança da origem. Logo

$$\sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty b_n x^n$$

Fazendo $x = 0$ obtemos

$$a_0 + a_1 0 + a_2 0 + \dots = b_0 + b_1 0 + b_2 0 + \dots \Rightarrow a_0 = b_0$$

Derivando as séries obtemos

$$\sum_1 n a_n x^{n+1} = \sum n b_n x^{n+1}$$

Calculando em $x = 0$ obtemos

$$a_1 + a_2 0 + a_3 0 + \dots = b_1 + b_2 0 + b_3 0 + \dots \Rightarrow a_1 = b_1$$

Repetindo esse processo obtemos

$$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto a representação é única.

Proposição (Derivação termo a termo):

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n, \quad |x| < R \Rightarrow f \text{ é derivável e } f'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} \text{ p/ } |x| < R$$

Dem.: Seja $x, a \in \mathbb{R}$ tq $|x|, |a| < R$; assim $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ e $f(a) = \sum_0^\infty a_n a^n$

Assim Logo

$$f(x) - f(a) = \sum_0^{\infty} a_n x^n - \sum_0^{\infty} a_n a^n = \sum_0^{\infty} a_n (x^n - a^n) =$$

$$* \begin{cases} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(\bar{x})}{2}(x-a)^2 \quad (\bar{x} \text{ entre } x \text{ e } a) \\ \therefore\ x^n = a^n + n a^{n-1}(x-a) + n(n-1)\dfrac{\bar{x}_n^{\,n-2}}{2}(x-a)^2 \end{cases}$$

← Polinômio de Taylor c/ Resto de Lagrange

$$\overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(n a^{n-1}(x-a) + n(n-1) \frac{\bar{x}_n^{\,n-2}}{2}(x-a)^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_0^{\infty} n a_n a^{n-1} + \underbrace{\frac{(x-a)}{2}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\sum_0^{\infty} n(n-1) a_n \bar{x}_n^{\,n-2}}_{\text{conv pois } \bar{x} \text{ está entre } x \text{ e } a}$$

$$\downarrow$$

$$f'(a)$$

Portanto

$$f'(a) = \sum_0^{\infty} n a_n a^{n-1} = \sum_1^{\infty} n a_n a^{n-1}$$

Como a é arbitrário,

$$f'(x) = \sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \text{ tq } |x| < R.$$

Proposição (Integração Termo a Termo): Se $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ para x tq $|x| < R$ então

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad p/\ |x| < R$$

Dem.: Basta derivar ambos os lados da igualdade.

Exemplos: ① Já vimos que $f(x) = \sum_0^\infty x^n$ é A.C para $|x| < 1$

Assim, além disso:

$$f(x) = \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \sum_1^\infty n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

③ Obtenha uma representação em séries de potências para $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ onde $|x| < 1$,

Sol.:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_0^\infty (-x^2)^n = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}$$

Observe ainda que:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(2)

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_0^{\infty} (-x)^n = \sum_0^{\infty} (-1)^n x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Consideremos o problema de multiplicar duas séries de potências, digamos

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad \text{e} \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

Aplicando o procedimento usual, como se estas séries fossem polinômios, obteríamos

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) x^n$$

Teorema: Se $A = \sum a_n$ e $B = \sum b_n$ são duas séries absolutamente convergentes, então a "série produto" $\sum c_n$, onde $c_n = a_0 b_n + \dots + a_n b_0$, também é absolutamente convergente e o produto das séries dadas é igual a soma desta série, isto é:

$$A \cdot B = \left(\sum a_n\right) \cdot \left(\sum b_n\right) = \sum c_n$$

Dem.: Exercício — Desafio

Exemplo: Sabendo que

$$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{e} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots$$

Obtenha $e^x \cdot \sqrt{1+x}$ em série de potências

44

A

Temos:

$$e^x \cdot \sqrt{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)x^3 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + \dots$$

"(não existe uma regra simples p/ o termo geral dessa série, mas sempre é possível escrever os seus primeiros termos)"

Vamos agora obter a série de potências de uma função $\frac{1}{f}$ onde $f = \sum a_n x^n$. Fazendo

$\frac{1}{f} = g = \sum g_n x^n$ temos a relação $fg = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$

Logo

$$a_0 g_0 = 1 \quad \text{e} \quad a_0 g_n + \dots + a_n g_0 = 0 \quad ; n = 1, 2, \dots$$

Assim

$$g_0 = \frac{1}{a_0}$$

$$a_0 g_1 + a_1 g_0 = 0 \Rightarrow g_1 = -\frac{a_1 g_0}{a_0}$$

$$a_0 g_2 + a_1 g_1 + a_2 g_0 = 0 \Rightarrow g_2 = -\frac{(a_1 g_1 + a_2 g_0)}{a_0}$$

$$\vdots$$

O mesmo procedimento pode ser usado para calcular a série de potências de $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots}{b_0 + b_1 x + \dots}$

Exemplo: Calcule o limite

$$\lim_{x \to 0} x^{-4}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} - 1 - \frac{x^2}{6}\right)$$

Sol.: Temos

$$\frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \dots\right)} = 1 + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} - \dots\right) +$$

$$+ \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} - \dots\right)^2 + \dots = 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} \dots = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \dots$$

Logo

$$\lim_{x \to 0} x^4\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} - 1 - \frac{x^2}{6}\right) = \frac{7}{360}$$

Consideremos a série

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

Logo $f(x_0) = a_0$

Também temos

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + \dots$$

Logo $f'(x_0) = a_1$

Além disso

$$f''(x) = 2a_2 + 3.2.\,a_3 (x - x_0) + 4.3.\,a_4 (x - x_0)^2 + \dots$$

Logo

$$f''(x_0) = 2a_2$$

$$f'''(x_0) = 6a_3 = 3!\,a_3$$

$$f^{(4)}(x_0) = 4!\,a_4$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n$$

Portanto

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

~~Esta série é chamada a série~~

<u>Definição</u>: A série $f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ é chamada de <u>Série de Taylor</u> para f.

Obs: Se tomamos $x_0 = 0$, obtemos a série

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

que é chamada de <u>Série de Maclaurin</u>.

<u>Exemplos</u>: ① Seja $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. Encontre $f^{(7)}(0)$.

Sol.: Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^7 + \dots \Rightarrow \frac{f^{(7)}(0)}{7!} = 1 \Rightarrow f^{(7)}(0) = 7!$$

② Encontre as séries de potências para $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$

$\vdots \qquad \vdots$

Logo

$$\operatorname{sen} x = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = (\operatorname{sen} x)' = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(2n+1)\, x^{2n}}{(2n+1)\,(2n)!} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

③ Encontre a série de potências para e^x

Sol. $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$

Portanto

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

④ Série de Pot. de polinômios

⑤ $y = \sum c_n x^n$ encontre a série de pts p/ $4y'' + y = 0$