Notas sobre o Guidorizzi, Calculo 1, 5ed - Semana 12 - página 136.
Artur Hideyuki Tomita

7. Derivadas.

7.1. Introdução.

Espera-se que o aluno lembre-se da tabela das principais funções deriváveis e das propriedades de derivação, e não é necessário neste curso entender as demonstrações.

Esta secção começa dom a definição de derivada no ponto p. O gráfico mostra uma aproximação da reta tangente ao grá fico no ponto $(p, f(p))$, onde é traçado a reta que passa por $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$, com $x \neq p$. O limite mostrado é sobre os coeficientes angulares dessas aproximações. Quando o limite existe, $f'(p)$ é o coeficiente angular da reta tangente.

Na página 137 é mostrado a equação da reta tangente e o gráfico abaixo, várias aproximações da reta tangente.

7.2. Definição de uma função.

A função $f'(x)$, a função derivada é uma função calculada em cada p no domínio da f em que o limite da derivada existe. Em alguns casos, o domínio da função derivada não é o mesmo da função f. Se $f'(p)$ existe, dizemos que f é derivável ou diferenciável em p.

Na página 138, o cálculo da derivada é feito usando um limite que vai para 0, usando a mudança de variável $h = x - p$ (no caso h seria em função de x e p é fixo).

Todos os exemplos de derivada abaixo seguem de uma fórmula geral, mas nos exemplos o cálculo é feito por definição.

No Exemplo 1, é mostrado o cálculo da derivada a partir da definição.

No Exemplo 2, é mostrado o esboço da reta tangente em dois pontos. O fato das retas tangentes se comportarem em 1 e -1 como mostrado no gráfico é devido a função ser par (o gráfico se espelha no eixo y).

O Exemplo 3 mostra que a derivada de uma função constante é 0 em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

O Exemplo 4 mostra que a derivada da função $f(x) = x$ é 1 para todo $x \in \mathbb{R}$.

O Exemplo 5 é a derivada da função raiz quadrada. Note que o domínio da função raiz quadrada é $[0, +\infty[$, mas a função é derivável em $]0, +\infty[$.

O Exemplo 6 é de uma função cuja derivada só pode ser calculada pela definição, pois a derivada não é de uma função que está 'na tabela'.

O Exemplo 7 é uma função que é contínua, mas não é derivável em 0. Para isto, os limites laterais são calculados e é mostrado que os valores são diferentes. No gráfico, fácil ver que a função tem um 'bico' no ponto $(0, 0)$.

No Exemplo 8 é dada por uma $\rho(x) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - f'(p)$ que mede a diferença da inclinação da reta que passa por p e x e a reta tangente. Depois é definido $E(x) = \rho(x)(x-p)$.

Vamos verficar que o valor $E(x)$ é diferença entre $f(x)$ e o valor em x na reta tangente, isto é chamado de Erro da aproximação de $f(x)$ pela reta tangente em $(p, f(p))$.

De fato, o valor na reta tangente é $f(p)+f'(p)(x-p)$. Assim, $f(x)-(f(p)+f'(p)(x-p)) = f(x)-f(p)-f'(p)(x-p) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}.(x-p)-f'(p)(x-p) = (\frac{f(x)-f(p)}{x-p} - f'(p))(x-p) = \rho(x)(x-p)$.

Temos que $\lim_{x\to p} \frac{E(x)}{x-p} = 0$.

Vamos discutir a última parte desta seção.

Vamos calcular o mesmo tipo de erro com qualquer outra reta, de inclinação α.

Então o valor nessa reta de inclinação α seria $f(p)+\alpha(x-p)$. Assim esse erro sobre $x-p$ seria $\lim_{x\to p} \frac{f(x)-(f(p)+\alpha(x-p))}{x-p} = \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)-\alpha(x-p)}{x-p} = \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - \alpha = f'(p)-\alpha$. Então o valor do limite só dá zero quando $\alpha = f'(p)$.

7.3., 7.4. e 7.5.

Vamos resumir a tabela que é importante nesta parte. Não é necessário neste curso entender as demonstrações para se chegar à tabela.

Cuidado para não confundir a derivada do caso a) e do caso b). A derivada no caso a) é para expoente constante e o caso b) para um base constante. Veremos depois que para calcular $(f(x)^{g(x)})'$ usamos composta junto com o caso b), escrevendo $f(x)^{g(x)} = e^{(\ln f(x)).g(x)}$.

a) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. *Note que se $\alpha = 0$ temos a função constante e a derivada é* 0. No 7.3 são considerado $\alpha = n$, $\alpha = -n$ e $\alpha = \frac{1}{n}$, para $n \in \mathbb{N}$.

b) $(e^x)' = e^x$ (esta é uma das motivações da definição de e). Depois de vermos a regra da cadeia, veremos que $(a^x)' = a^x . \ln a$ (lembrando que $\ln e = 1$).

c) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Lembrando que o cálculo das funções trigonométricas é feita em radianos. A função seno x e tangente x passam a ser $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$ (antes aparecia $\sin x$ e $\tan x$).

d) $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

e) $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

f) $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x = (\sec x)^2$.

g) $(\sec x)' = \sec x . \operatorname{tg} x$.

h) $(\operatorname{cotan} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x = -(\operatorname{cosec} x)^2$.

i) $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x . \operatorname{cotan} x$.

Note que para calcularmos a derivada num ponto, devemos fazer em duas etapas: primeiro aplicar a fórmula separadamente num ponto arbitrário para depois substituirmos no ponto.

Por exemplo, se $f(x) = x^3$. Então $f'(x) = 3x^2$ e $f'(2) = 3.(2^2) = 3.4 = 12$.

7.6. Derivabilidade e Continuidade.

Já vimos que a função $f(x) = |x|$ não é derivável em 0. Deste modo a continuidade não implica a derivabilidade.

Porém a diferenciabilidade no ponto implica a continuidade no ponto como indicado no Teorema da página 152.

No Exemplo 1, se utiliza o fato que a função não é contínua no ponto para concluir que não é derivável. Como a definição da função muda em 1, o cálculo do limite é feito por limites laterais. Aqui é importante notar que independente do lado que a conta e feita, o limite lateral deve ir para $f(1)$ para ser contínua. Pela definição da f, note que $f(1) = 1^2 = 1$. Assim, pela direita, temos que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2 \neq 1 = f(1)$.

No Exemplo 2, temos uma função que é definida de forma diferente em dois trechos: $x \leq 1$ e $x > 1$. É pedido para se calcular o limite no ponto 1, aqui novamente, é importante notar que $x = 1$ satisfaz $x \leq 1$ assim, $f(1) = 1^2 = 1$. Ao calcular os limites laterais, temos que ambos coincidem com $f(1)$. Assim, f é contínua em 1. Como a função é contínua no ponto 1, não podemos afirmar ainda se a função é derivável ou não no ponto 1. O cálculo da derivada é feita por limites laterais, e estas dão diferente assim a derivada não existe.

No Exemplo 3, é mostrado que a função é derivável em em 1 para então concluir que é contínua. Iremos fazer a conta um pouco diferente aqui.

Vamos chamar $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2x - 1$. Ambas as funções são contínuas e deriváveis. Para ver que f é contínua em 1, iremos usar os limites laterais.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1) = f(1)$, pois g é contínua e $g(x) = f(x)$ para $x \leq 1$.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} h(x) = h(1) = 2.1 - 1 = 1 = 1^2 = f(1)$. A primeira igualdade sai de $h(x) = f(x)$ para $x > 1$, a segunda por que h é contínua em 1. O valor $h(1)$ bate com $f(1)$, e por isso $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

Assim, a função é contínua.

Para o cálculo da derivada, no fundo já usamos a continuidade da função para fazer as contas:

Novamente, iremos fazer os limites laterais do limite para o cálculo da derivada. Iremos usar que $f(1) = g(1) = h(1)$.

Primeiro, temos que $g'(x) = (x^2)' = 2x$. Portanto $g'(1) = 2.1 = 2$. Além disso, $h'(x) = (2x - 1)' = (2x)' + (-1)' = 2.1 + 0 = 2$.

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = 2$.

$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1) = 2$.

Assim, como os limite laterais existem e são iguais, temos que $f'(1) = 2$.

7.7. Regras de derivação.

Vamos listar aqui as regras da soma, multiplicação por escalar (número real), produto e divisão:

As regras da derivação para f e g funções deriváveis em p e k um número real:

$D1)$ $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.

$D2)$ $(kf)'(p) = k(f'(p)$.

$D3)$ $(f.g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$.

$D4)$ Se $g(p) \neq 0$ então temos $(\frac{f}{g})'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$.

A derivação do produto e do quociente não são intuitivas. Esta fórmula parece mais natural se ver a demonstração. Cuidado para não pensar que a fórmula do produto ou quociente se comportam como na soma.

Ainda falta um caso importante que é a regra da cadeia (para composição de funções) que será vista posteriomente.