Aula 11 - Leis Operacionais (Cap 33 - Raj Jain).

As leis operacionais dos Sistemas de Filas são relações existentes entre grandezas diretamente mensuráveis dos sistemas.

Considere um observador na entrada e outro na saída de um sistema de filas.

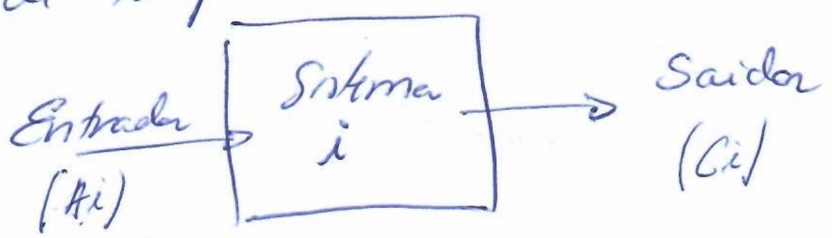
A função desses observadores é realizar medições de grandezas observáveis do sistema de filas.

Cada um dos observadores possui um cronômetro para medir os instantes de ocorrência de eventos relevantes no sistema.

A cada usuário que entra no sistema ele é contado e registrado seu instante de chegada.

A cada usuário que parte do sistema ele é contado e registrado o tempo de permanência desse usuário no sistema de filas.

Seja o Sistema em Observação, observado num intervalo de tempo T.



Número de Chegadas: A_i

Número de Partidas: C_i

Tempo médio em que o sistema ficou ocupado no intervalo observado T: B_i

Valores derivados das Grandezas mensuradas

Taxa de Chegada: $\lambda_i = \dfrac{A_i}{T}$

Vazão: $X_i = \dfrac{C_i}{T}$

Fator de Utilização: $U_i = \dfrac{B_i}{T}$

Tempo médio de Serviço: $S_i = \dfrac{B_i}{C_i}$

Estas grandezas podem assumir valores diferentes em diferentes períodos de observação.

Porém, existem certas relações que permanecem válidas para todos os períodos de observação. Estas relações permanentes são as chamadas Leis Operacionais dos Sistemas de Filas.

Lei da Utilização

O Fator de Utilização (Ui) do Sistema i é dado pelo produto do tempo médio de serviço (Si) pela vazão de saída do sistema (Xi).

Como se chega a essa fórmula?

$$Ui = \frac{Bi}{T} = \left(\frac{Bi}{Ci}\right) \cdot \left(\frac{Ci}{T}\right) = \underline{\underline{Si \cdot Xi}}$$

Lei de Fluxo

Esta lei correlaciona a Vazão Global do Sistema com as Vazões de seus Subsistemas.

Nas Redes de Filas pode-se ter diferentes organizações:

- Redes Abertas de Filas
- Redes Fechadas de Filas

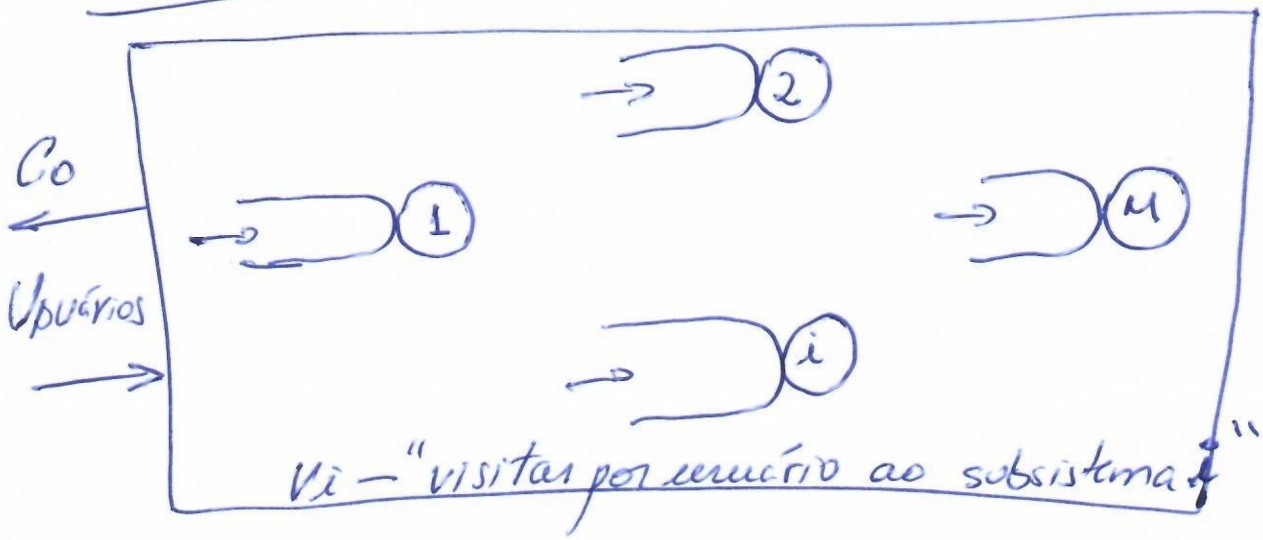
Numa Rede ~~de Filas~~ Aberta de Filas, o nº de usuários partindo da rede na unidade de tempo define a sua vazão (X).

Numa Rede Fechada de Filas, a taxa com que se circula no sistema define a sua Vazão.

Quando $A_i = C_i$ temos o denominado
Fluxo Balanceado.

Se o intervalo de tempo de observação for suficientemente grande, C_i tende a se aproximar de A_i.

Redes de Filas com M Subsistemas



Co — nº de usuários passando por essa Rede de Filas

Se o fluxo deste sistema for balanceado:

$$C_i = C_o \cdot V_i \quad \text{ou} \quad V_i = \frac{C_i}{C_o}$$

$$\Rightarrow \text{VAZÃO} = X = \frac{C_o}{T} \longrightarrow \text{(período de observação).}$$

A Vazão do i-ésimo subsistema é dada por:

$$X_i = \frac{C_i}{T} = \frac{C_0}{T} \cdot \frac{C_i}{C_0}$$

$$\Rightarrow \quad X_i = X \cdot V_i$$

Combinando este resultado com a Lei da Utilização tem-se:

$$U_i = \underbrace{S_i}_{\text{tempo no sub } i} \cdot \underbrace{X_i}_{\text{Vazão do sub } i} = \underbrace{S_i}_{\text{tempo no sub } i} \cdot \underbrace{V_i}_{\text{Visitas no sub } i} \cdot \underbrace{X}_{\text{Vazão Total}}$$

sendo que $D_i = V_i \cdot S_i$: Demanda total no iésimo subsistema [tempo]

$$\Rightarrow \quad U_i = X \cdot D_i$$

Aquele subsistema que possuir o maior D_i, será o "gargalo do sistema".

A taxa de Visitas (V_i) é uma das maneiras de se especificar o roteamento dos usuários numa rede de filas.

Outra forma é especificar as probabilidades de transição p_{ij} de um usuário, ao terminar o serviço no subsistema i, se mover para o subsistema j.

Num fluxo balanceado:

$$C_j = \sum_{i=0}^{M} C_i \cdot p_{ij}$$

onde:

p_{i0}: probabilidade do usuário deixar o sistema tendo terminado o serviço em subsistema i;

C_0: representa o número de usuários que entraram ou saíram do sistema no intervalo de observação T.

Dividindo-se ambos os lados por C_0 tem-se:

$$\frac{C_j}{C_0} = \sum_{i=0}^{M} \frac{C_i}{C_0} \cdot p_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad v_j = \sum_{i=0}^{M} v_i \cdot p_{ij}$$

visitas no subsistema j

visitas no subsistema i

Como cada visita o link de saída é definido como a saída de um usuário (fim de uma tarefa) então $V_0 = 1$.

Desta forma, pode-se calcular as relações entre v_i e p_{ij} com as seguintes equações:

$$\begin{cases} v_j = \sum_{i=0}^{M} v_i \cdot p_{ij} \\ v_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad X \cdot v_j = \sum_{i=0}^{M} X \cdot v_i \cdot p_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$X_j = \sum_{i=0}^{M} X_i \cdot p_{ij}$$

Pela Lei de Little tínhamos:

nº médio de usuários no sistema = taxa de chegada × Tempo médio de Resposta.

$$\downarrow$$

$Q_i = \lambda_i \cdot R_i$ (para o subsistema i)

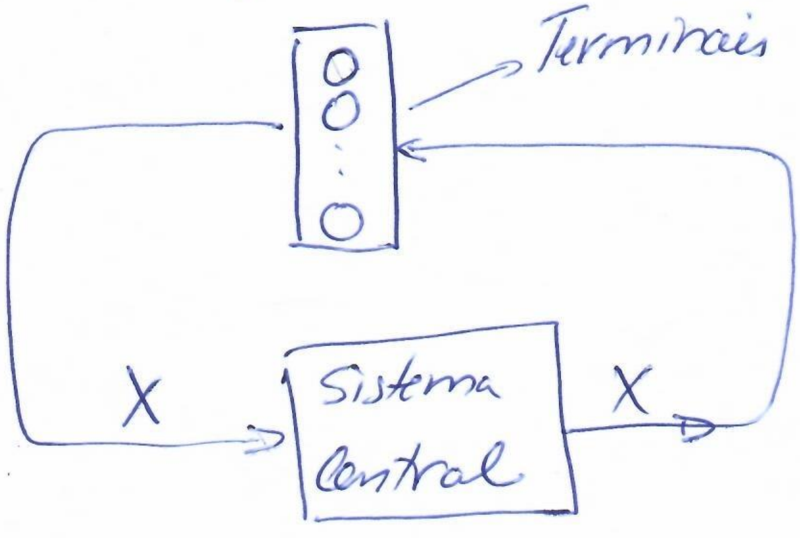
Para um fluxo balanceado, a taxa de chegada é igual à vazão ⟹

$$\boxed{Q_i = X_i \cdot R_i}$$

↳ vazão do subsistema i

Lei do Tempo de Resposta

Todo sistema "time-sharing" pode ser dividido em 2 subsistemas: Terminais e Sistema Central. Há um terminal por usuário e o Sistema Central é compartilhado por todos os usuários.



Aplicando-se a Lei de Little, desde que tenha fluxo balanceado:

$Q = X \cdot R$ p/ o Sistema Central

Conhecendo-se o número de usuários em cada subsistema do Sistema Central, tem-se:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_M \quad \sim M \text{ subsistemas}$$

$$Q_i = X_i . R_i$$

$$X.R = X_1 R_1 + X_2 . R_2 \cdots + X_M . R_M$$

dividindo-se por X (Vazão Total)

$$R = \underbrace{\frac{X_1}{X}}_{v_1} . R_1 + \underbrace{\frac{X_2}{X}}_{v_2} . R_2 + \cdots + \underbrace{\frac{X_M}{X}}_{v_M} . R_M$$

$$\Rightarrow R = \sum_{i=1}^{M} v_i . R_i$$

Lei do Tempo de Resposta Interativo

Num sistema interativo, os usuários geram requisições que são atendidas pelo Sistema Central.

Considerando Z o tempo médio que um usuário gasta pensando antes de fazer uma nova requisição, tem-se: Tempo do Ciclo Completo: $(R + Z)$.

Cada usuário produz $\frac{T}{R+Z}$ requisições

onde T é o intervalo de tempo

Num sistema com N usuários a Vazão

será dado por:

$$X = \frac{N \cdot \left(\frac{T}{R+Z}\right)}{T} = \frac{\text{Nº Total de Requisições}}{\text{Tempo Total}}$$

$$X = \frac{N}{R+Z}$$

$$(R+Z) \cdot X = N$$

$$RX + ZX = N$$

$$RX = N - Z \cdot X$$

$$\boxed{R = \left(\frac{N}{X}\right) - Z}$$

Análise do Gargalo do Sistema

O Gargalo é o subsistema que apresenta a maior Demanda de Serviço (D_i), ou o maior fator de Utilização (U_i).

Supondo que o Subsistema b seja o Gargalo:

$$D_b = D_{max}$$

A Vazão $X(N) \leq \min\left\{ \left(\frac{1}{D_{max}}\right); \left(\frac{N}{D+Z}\right) \right\}$

onde $D = \sum_i D_i$ — todos subsistemas, exceto os terminais

e $R(N) \geq \max\left\{ D, (N \cdot D_{max} - Z) \right\}$

(tempo de resposta)

Análise do Gargalo

O ponto de intersecção das duas retas é chamado "joelho" do sistema e é dado por:

$$N^* = \frac{D+Z}{D_{max}}$$ (nº de usuário no "joelho" do sistema)

Se o número de usuários no sistema for maior que $\underline{N^*}$, pode-se dizer com certeza que existirá espera em algum lugar do sistema.

• <u>Prova</u>: Dadas as seguintes hipóteses:

1) A Utilização de qualquer subsistema não pode exceder 1.

2) O Tempo de Resposta do Sistema com <u>N Usuários</u> não pode ser menor do que com apenas 1 usuário. Este fato coloca um <u>limite mínimo</u> no tempo de resposta.

3) A fórmula do <u>tempo de resposta interativo</u> pode ser usada para converter o <u>limite em Vazão</u> para <u>tempo de resposta</u> e vice-versa.

Para o <u>dispositivo b</u>, com Demanda Máxima

$$U_b = X \cdot D_{max} \quad U_b \leq 1 \quad (\text{hipótese } 1)$$

$$\Rightarrow X \leq \frac{1}{D_{max}}$$

Com apenas <u>um usuário</u> não há fila e o tempo de resposta é simplesmente a soma das diversas demandas:

$$R(1) = D_1 + D_2 + \dots + D_M = D$$

Com N usuários $\underbrace{R(N)}_{R} \geq D$ (hipótese 2)

Aplicando-se a Lei do Tempo de Resposta Interativo tem-se:

$$R = \left(\frac{N}{X}\right) - Z \geq N \cdot D_{max} - Z$$

e

$$X = \frac{N}{R + Z} \leq \frac{N}{D + Z}$$