Propriedades dos determinantes

MAP 2110 - Diurno

IME USP

2 de junho

A definição do determinante

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada $n \times n$ a definição de determinante dada foi:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} c_{i1}$$

onde $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ e A_{ij} é a matriz reduzida de dimensão $(n-1) \times (n-1)$ obtida eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A.

Vamos usar também a notação seguinte:

$$a_{i*} = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \text{ para a linha } i$$

$$a_{*j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \text{ para a coluna } j$$

Seria bom ter a imagem do que acontece em dimensão 3 para entender algumas provas:

$$\det(A) = \left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1 determinante da matriz identidade

Vamos fazer um monte de provas usando indução na dimensão da matriz. Primeiro notamos que para o caso de matrizes 2×2 isso foi feito na vez passada. Assumimos que a tese valha até o caso de matrizes $(n-1) \times (n-1)$ (*hipótese de indução*). Se $I_n = [\delta_{ij}]$ é a matriz identidade $n \times n$ temos pela definição de determinante que

$$\det(I) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i1}(-1)^{i+1} \det((I_n)_{i1}) = \delta_{11} \det I_{n-1} = 1$$

pois

- $\delta_{11} = 1$
- $\det(I_{n-1}) = 1$ usando a hipótese de indução.

2 troca de linhas

Suponha que duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ só têm os elementos de uma linha p e $p+1$ trocados, isto é:

$$a_{p*} = b_{(p+1)*} \text{ e } a_{(p+1)*} = b_{p*}$$

então $\det(A) = -\det(B)$ Novamente usaremos indução para a dimensão das matrizes, o caso 2×2 é simples. A hipótese de indução é que a tese valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$, e vamos mostrar que então temos para o caso $n \times n$.

Observamos que

- Se $i \neq p, p+1$ então A_{i1} e B_{i1} continuam tendo as linhas p e $p+1$ trocadas, e pela hipótese de indução $\det(A_{i1}) = -det(B_{i1})$
- Se $i = p, p+1$ então $A_{p1} = B_{(p+1)1}$ e $B_{p1} = A_{(p+1)1}$

Então

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{p-1} a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + \cdots$$
$$+a_{p1}(-1)^{p+1} \det A_{p1} + a_{(p+1)1}(-1)^{p+2} \det A_{(p+1)1} + \cdots$$
$$+ \sum_{i=p+2}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1}$$

Anotações 1

$$\det(A) = -\sum_{i=1}^{p-1} b_{i1}(-1)^{i+1}\det B_{i1} + \cdots$$

$$+b_{(p+1)1}(-1)^{p+1}\det B_{(p+1)1} + b_{p1}(-1)^{p+2}\det B_{(p)1} + \cdots$$

$$-\sum_{i=p+2}^{n} b_{i1}(-1)^{i+1}\det B_{i1} = -\det(B) \quad \square$$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

E se trocarmos duas linhas quaisquer?

Se trocamos a linha p com a linha $p+r$ note que podemos primeiro colocar a linha p na posição da linha $p+r$ fazendo r trocas simples e para posicionar a linha que estava em $p+r$ (e agora está em $p+r-1$) na linha p usamos mais $r-1$ trocas simples. Fizemos no total $2r-1$ trocas simples, em cada troca alteramos o sinal do determinante, portanto temos o mesmo resultado: qualquer troca de linhas muda o sinal do determinante.

Anotações 2

3 Duas linhas iguais

Se uma matriz A tem duas linhas iguais então seu determinante é igual a zero. Pois se trocamos as duas linhas iguais a matriz fica inalterada e usando a propriedade anterior temos

$$\det A = -\det A \implies \det A = 0$$

4 uma linha de zeros

Se A é uma matriz $n \times n$ com uma linha inteira com zeros então $\det A = 0$.
Repetimos o mesmo tipo de prova por indução em n . O caso base é o $n = 2$, isto é, para matrizes 2×2 o cálculo é fácil. E vamos tentar reduzir o caso geral n para o caso $n - 1$.
Suponha que na linha p temos $a_{p*} = [0, \cdots, 0]$. Então A_{i1} para todo $i \neq p$ tem uma linha de zeros correspondente à linha p de A. Pela hipótese de indução seu determinante é 0. Então

$$\det(A) = a_{p1}(-1)^{p+1}. \det(A_{p1})$$

mas por hipótese a_{p1} também é 0, mostrando que $\det(A) = 0$ $\square$

5 Mudança por uma matriz elementar

Suponha, primeiro lugar, que uma matriz A tenha uma linha multiplicada por r. Então B é uma matriz igual a A a menos da linha p onde $b_{p*} = ra_{p*}$. Então $\det B = r\det(A)$ Para o caso $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ra_{21} & ra_{22} \end{vmatrix} = r(a_{11}a_{22}) - r(a_{21}a_{12}) = r\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Para o caso geral:

- se $i \neq p$ então $\det(B_{i1}) = r\det(A_{i1})$ pela hipótese de indução, e $a_{i1} = b_{i1}$.
- se $i = p$ então $A_{p1} = B_{p1}$ e $b_{p1} = ra_{p1}$

Usando a definição do determinante a prova está feita.

Anotações 3

Suponha que A, B e C sejam matrizes quadradas que têm todos os elementos fora da linha q iguais e que na linha q temos $b_{q*} = a_{q*} + c_{q*}$. Vamos mostrar que $\det(B) = \det(A) + \det(C)$
Caso $n = 2$ temos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + c_{21} & a_{22} + c_{22} \end{bmatrix}$$

e a verificação é simples

Agora usando indução temos:

- se $i \neq q$ temos $a_{i1} = b_{i1} = c_{i1}$ e B_{i1}, A_{i1}, C_{i1} continuam com a mesma propriedade e pela hipótese de indução $\det(B_{i1}) = \det(A_{i1}) + \det(C_{i1})$
- se $i = q$ vale $b_{q1} = a_{q1} + c_{q1}$ e $B_{q1} = A_{q1} = C_{q1}$

$$\det(B) = \sum_{i \neq q} (-1)^{i+1} b_{i1} \det(B_{i1}) + (-1)^{q+1} b_{q1} \det(B_{q1}) =$$

$$= \sum_{i \neq q} (-1)^{i+1} b_{i1} (\det(A_{i1}) + \det(C_{i1})) + (-1)^{q+1} (a_{q1} + c_{q1}) \det(B_{q1}) =$$

$$\det(A) + \det(B) \quad \square$$

Agora a diferença entre A e B é somente na linha p onde vale

$$b_{p*} = a_{p*} + ra_{k*} \text{ com } k \neq p$$

Então $\det(A) = \det(B)$
Podemos usar o caso acima tomando como C a matriz igual a A só que na linha q tem ra_{k*} e como C tem duas vezes a linha a_{k*} seu determinante é zero

Matrizes elementares

Vamos ver qual é o determinante dos três tipos de matrizes elementares

1. Troca de linhas.
2. multiplicar uma linha por α
3. somar a uma linha o múltiplo de outra

1- Troca de linhas

Se E_1 é a matriz identidade com as trocas de linhas efetuadas em I_n, então

$$\det(E_1) = -1 \det(I_n) = -1$$

E como para toda matriz A, $E_1.A$ executa esta operação elementar na matriz A então temos

$$\det(E_1.A) = -\det(A) = \det(E_1)\det(A)$$

Executando duas trocas de linhas E_1 e E_2 teremos

$$\det(E_2.E_1) = \det(E_2).\det(E_1) = 1$$

2- multiplicar uma linha por α

Neste caso a matriz elementar E_α é obtida multiplicando uma linha de I_n por α, então

$$\det(E_\alpha) = \alpha \det(I_n) = \alpha$$

da mesma forma que antes temos

$$\det(E_\alpha.A) = r \det(A) = \det(E_\alpha)\det(A)$$

e

$$\det(E_{\alpha_1}.E_{\alpha_2}\cdots E_{\alpha_k}A) = \alpha_1.\det(E_{\alpha_2}\cdots E_{\alpha_k}A) = \cdots = \left(\prod_{i=1}^{k}\alpha_i\right)\det(A)$$

3- $L_q = L_q + \alpha L_p$

Se $E_{q,p}$ é a matriz elementar que realiza esta transformação então

$$\det(E_{q,p}) = \det(I_n) = 1$$

de novo

$$\det(E_{q,p}A) = \det(E_{q,p})\det(A) = \det(A)$$

Sobre as transpostas

As matrizes elementares do tipo 1 e 2 não se alteram quando transpostas. Há uma simetria em relação à diagonal principal. Só precisamos ver o que acontece com as matrizes elementares do tipo $E_{q,p}$. Neste caso se denotamos $E_{q,p} = [e_{ij}]$ temos que $e_{qp} = \alpha$ e $e_{ii} = 1$ os outros elementos são nulos. Então na matriz transposta $E_{q,p}^T = [h_{ij}]$ temos que

- $h_{ii} = 1$, pois os elementos da diagonal ficam iguais.
- $h_{pq} = e_{qp} = \alpha$
- os outros elementos são 0

Mas esta é a matriz elementar que troca a linha p com $L_p = L_p + \alpha L_q$ que é do terceiro tipo também.

Teorema sobre as transpostas

Teorema

Se A é uma matriz quadrada, então $\det(A^T) = \det(A)$

- Se A não é invertível então $\det(A) = 0$ e A^T também não é invertível, ou seja $\det(A^T) = 0$
- Se A é elementar o teorema decorre da observação do último slide.
- Se A é invertível então $A = E_1.E_2 \cdots E_k$ é produto de matrizes elementares. Então $A^T = E_k^T \cdots E_1^T$. Usando agora a primeira parte segue o resultado.