# Transformação Linear

**ZAB0161 – “Álgebra linear com aplicações em geometria analítica”**

**Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle**

**Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP**

**25 de maio de 2020**

# Transformação linear

Sejam $U$ e $W$ dois espaços vetoriais.

Uma **transformação linear** $L: U \longrightarrow W$ é uma função de $U$ em $W$ tal que

*a)* $L(u+v) = L(u) + L(v)$ para todo $u, v \in U$

*b)* $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$

As condições acima significam que a transformação linear $L$ preserva a soma e multiplicação vezes escalar de um espaço no outro.

# Transformação linear

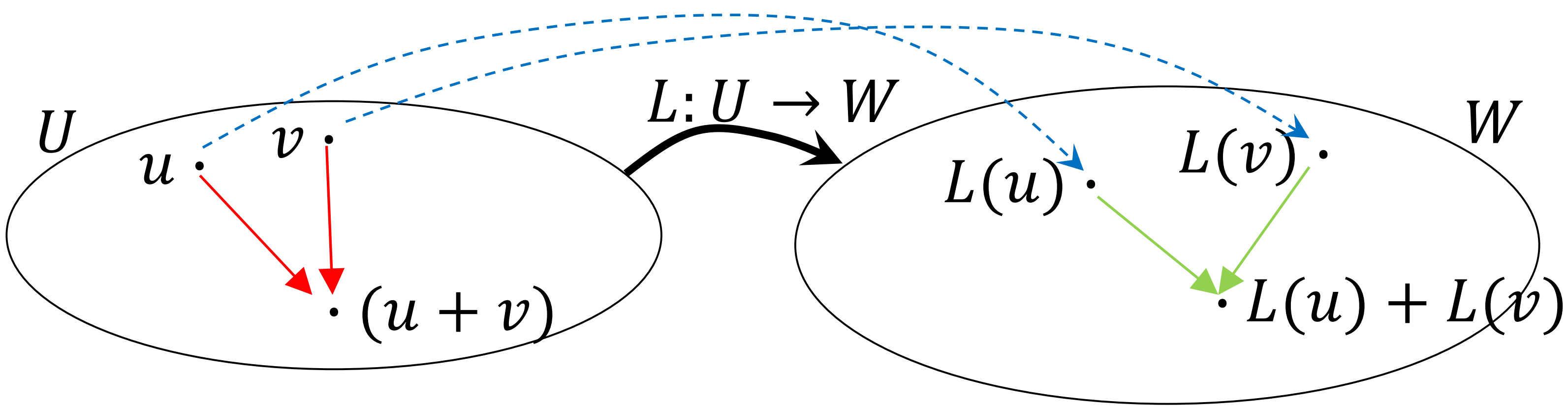
Uma **transformação linear** $L: U \longrightarrow W$ é uma função de $U$ em $W$ tal que

$a)$ $L(u + v) = L(u) + L(v)$ para todo $u, v \in U$

$b)$ $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$

Soma de vetores em $U$

Soma de vetores em $W$

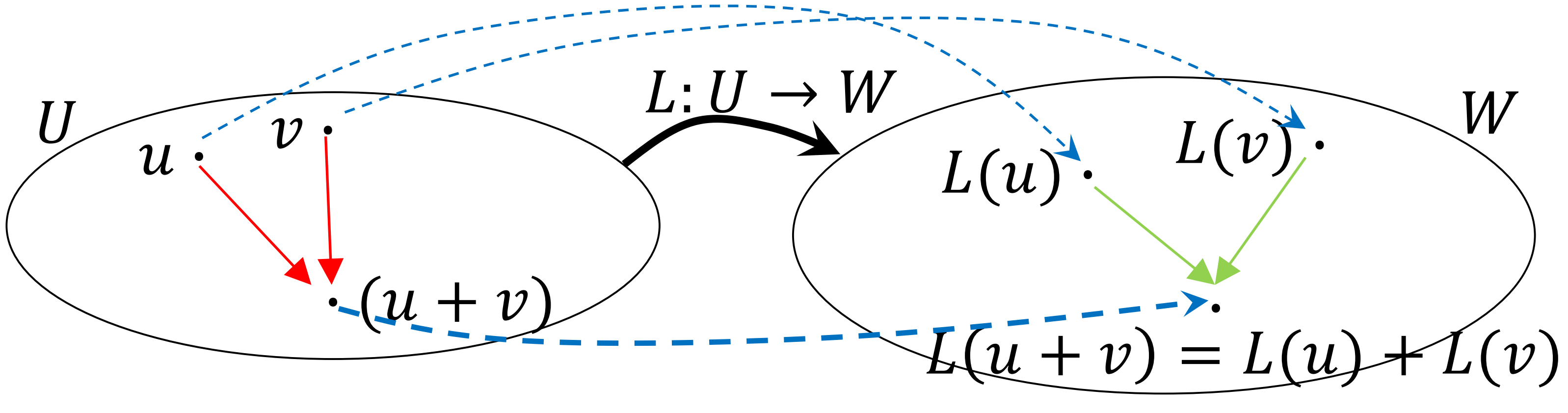


# Transformação linear

Uma **transformação linear** $L: U \longrightarrow W$ é uma função de $U$ em $W$ tal que

*a)* $L(u + v) = L(u) + L(v)$ para todo $u, v \in U$

*b)* $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$



# Transformação linear

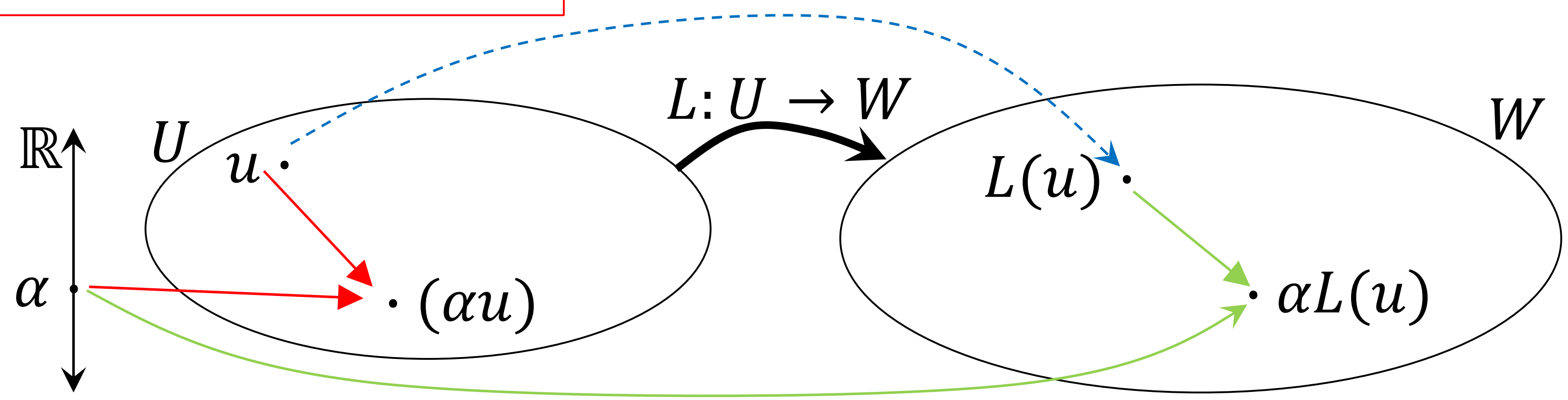
Uma **transformação linear** $L: U \longrightarrow W$ é uma função de $U$ em $W$ tal que

a) $L(u+v) = L(u) + L(v)$ para todo $u, v \in U$

b) $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Multiplicação vezes escalar em $U$

Multiplicação vezes escalar em $W$

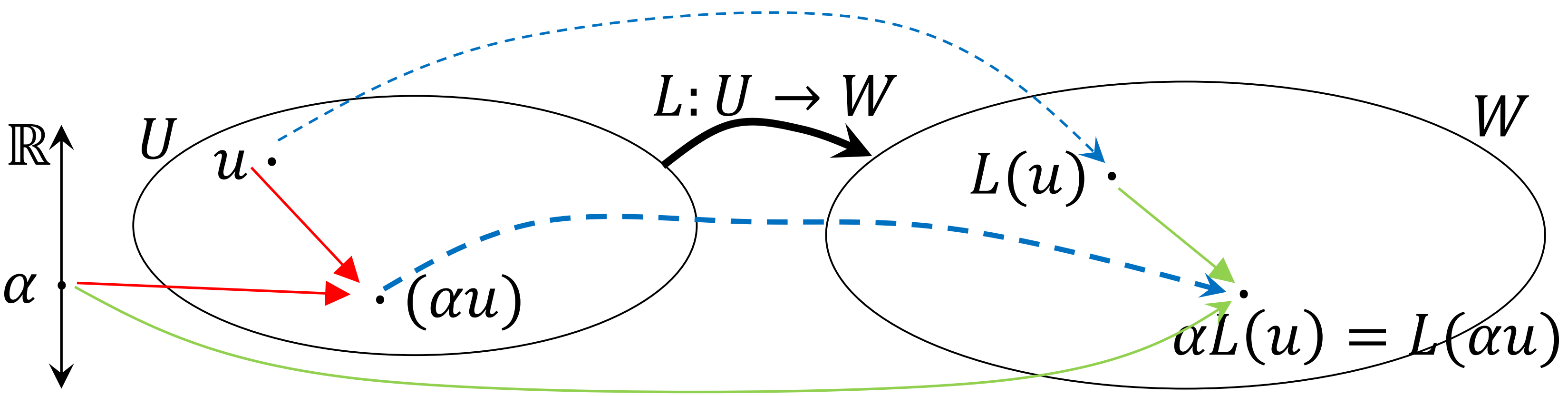


# Transformação linear

Uma **transformação linear** $L: U \longrightarrow W$ é uma função de $U$ em $W$ tal que

*a)* $L(u+v) = L(u) + L(v)$ para todo $u, v \in U$

*b)* $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$



# Transformação linear

Outra forma de expressar, utilizando combinação linear em $U$ e em $W$.

Sejam $U$ e $W$ dois espaços vetoriais.

Uma transformação linear $L: U \longrightarrow W$ é uma função de $U$ em $W$ tal que

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

para todo $u, v \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Exemplo: A **função linear** $L(x) = y = 2x - 7$ é uma **transformação linear** ?

# Exemplos

**Função linear** $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x) = y = 2x - 7$

Deve satisfazer $L(x + \bar{x}) = L(x) + L(\bar{x})$.

Verificando:

$L(x + \bar{x}) = 2(x + \bar{x}) - 7 = 2x + 2\bar{x} - 7.$

$L(x) + L(\bar{x}) = 2x - 7 + (2\bar{x} - 7) = 2x + 2\bar{x} - 14.$

Portanto $L(x + \bar{x}) \neq L(x) + L(\bar{x})$

A função linear dada **não é transformação linear**. Falhou na primeira condição!

# Exemplos

**Transformação entre espaços matriciais**:

Seja $L: M_{3\times1} \longrightarrow M_{2\times1}$ com $L(X) = AX$

A matriz é $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Essa transformação "*transforma*" a matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

na matriz

$$L(X) = A_{2\times3}X_{3\times1} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

# Exemplos

A transformação é linear? É transformação linear!!

*a)* $L(X+Y) = L(X) + L(Y)$

$L(X+Y) = A(X+Y)$ pela definição e $A$ é fixa

$L(X+Y) = AX + AY$ pela distributividade

$L(X+Y) = L(X) + L(Y)$ novamente pela definição.

*b)* $L(\alpha X) = \alpha L(X)$

$$L(\alpha X) = A(\alpha X) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 - \alpha x_2 + 2\alpha x_3 \\ 3\alpha x_1 - 3\alpha x_2 + \alpha x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(x_1 - x_2 + 2x_3) \\ \alpha(3x_1 - 3x_2 + x_3) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \alpha AX = \alpha L(X)$$

# Exemplos

**Transformação translação de matrizes**:

Seja $L: M_{3\times 1} \longrightarrow M_{2\times 1}$ com $L(X) = AX + \boldsymbol{B}$

A matriz é $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Essa transformação "*transforma*" a matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

na matriz

$$L(X) = AX + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 + \mathbf{7} \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

# Exemplos

A transformação é linear?

*a)* $L(X+Y) = L(X) + L(Y)$

$L(X+Y) = A(X+Y) + B = AX + AY + B$
$L(X) + L(Y) = (AX+B) + (AY+B)$
$= AX + AY + 2B$

Então $L(X+Y) = L(X) + L(Y)$ se $B = 0$,

mas se $B \neq 0$ **não é transformação linear**.

# Exemplos

**Transformação de polinômios**:

Seja $L: P_2 \longrightarrow P_4$

$$L(p) = t^2 p \Rightarrow L(p(t)) = t^2 p(t)$$

Essa transformação "*transforma*" um polinômio de grau 2 em um polinômio de grau 4.

Por exemplo: $p = 2t^2 - 3t - 7$ é transformado em $L(p) = 2t^4 - 3t^3 - 7t^2$

Para ver se é TL, verificamos

$$L(\alpha p + \beta q) = \alpha L(p) + \beta L(q)$$

para todo $p, q \in P_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

# Exemplos

$$L(\alpha p + \beta q) = t^2(\alpha p + \beta q) = t^2(\alpha p) + t^2(\beta q)$$
$$\alpha(t^2 p) + \beta(t^2 q) = \alpha L(p) + \beta L(q)$$

Portanto,

$$L(\alpha p + \beta q) = \alpha L(p) + \beta L(q)$$

para todo $p, q \in P_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$L$ é uma transformação linear de $P_2$ em $P_4$.

# Transformação linear

Sejam $U$ e $W$ dois espaços vetoriais.

Seja uma transformação linear $L: U \longrightarrow W$, então para qualquer $u \in U$

$$L(0) = L(u + (-u)) = L(u) + L(-u)$$
$$L(0) = L(u) + (-1)L(u) = 0$$

Em conclusão:

Se $L: U \to W$ é uma transformação linear então
$$L(0) = 0.$$

# Transformação linear

Nada garante que: Se $L(0) = 0$ então $L$ é transformação linear. (Não sabemos !!!)

**Exemplo**: $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $L(x) = sen(x)$.

Observar $L(0) = sen(0) = 0$

Mas:

$$L(x+y) = sen(x+y) = sen(x)\cos(y) + \cos(x)\,sen(y)$$
$$L(x) + L(y) = sen(x) + sen(y)$$

Portanto

$L(x+y) \neq L(x) + L(y)$ por exemplo para $x = y = \frac{\pi}{4}$, pois

$L\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, mas

$L\left(\frac{\pi}{4}\right) + L\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

# Transformação linear

Se $L: U \to W$ é uma transformação linear então

$$L(0) = 0.$$

Podemos **reformular** como:

Se $L(0) \neq 0$ então $L$ não é transformação linear.

Ajuda em muitas funções:

Seja a função $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$L(x, y) = (3x + y, 2y, x + 2y + 4)$$

é uma TL ??

Como $L(0,0) = (0,0,4) \neq (0,0,0)$ então **não é TL**.

# Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Sejam $U$ e $W$ dois espaços vetoriais.

Seja uma transformação linear $L: U \longrightarrow W$.

**Núcleo de uma transformação linear**

Define-se o núcleo da transformação linear $L$, como o conjunto

$$Ker(L) = \{u \in U \ / \ L(u) = 0\}$$

**Imagem de uma transformação linear**

Define-se a imagem de $L$, como o conjunto

$$Imag(L) = \{w \in W \ / \ \text{Existe } u \in U \text{ com } L(u) = w\}$$

**O $\boldsymbol{Ker(L)}$ e a $\boldsymbol{Imag(L)}$ são espaços vetoriais.**

# Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

Qual o núcleo e a imagem de $L$ ?

Determine uma base para cada conjunto.

**Núcleo** (Kernel): $Ker(L) \subset \mathbb{R}^3$

Quais os $u \in \mathbb{R}^3$ com $L(u) = 0$ ?

$$(x + y, 2x + 3z) = (0,0)$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

Daqui vemos que existem infinitas soluções.

# Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

**Núcleo** (Kernel):

Temos duas equações e três incógnitas.

Temos um grau de liberdade, que pode ser o $x$.

Nesse caso $y = -x$ e $z = -\frac{2}{3}x$.

Então:

$$Ker(L) = \left\{\left(x, -x, -\frac{2}{3}x\right) = x\left(1, -1, -\frac{2}{3}\right) / \; x \in \mathbb{R}\right\}$$

Todos os vetores múltiplos do vetor fixo $\left(1, -1, -\frac{2}{3}\right)$.

# Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x,y,z) = (x+y, 2x+3z)$$

O núcleo é um espaço vetorial: (é uma reta?)

$$Ker(L) = \left\{\left(x, -x, -\tfrac{2}{3}x\right) = x\left(1, -1, -\tfrac{2}{3}\right) \,/\, x \in \mathbb{R}\right\}$$

Uma base do núcleo da transformação linear é o conjunto

$$\beta = \left\{\left(1, -1, -\tfrac{2}{3}\right)\right\}$$

Outra base é

$$\bar{\beta} = \{(3, -3, -2)\}$$

# Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

**Imagem**: $Imag(L) \subset \mathbb{R}^2$

Pergunto, pode existir alguma dupla que não possa ser representada com as componentes de uma tripla ?

Vamos trabalhar de forma mais simples, fazendo:

$$(u, v) = \left(0 + u, 0 + 3\tfrac{v}{3}\right) = L(0, u, \tfrac{v}{3})$$

Daqui vemos que qualquer dupla $(u, v)$ pode ser vista como imagem da tripla $\left(0, u, \frac{v}{3}\right)$.

$Imag(L) = \mathbb{R}^2$, logo uma base é a base canônica.

# Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Sejam $U$ e $W$ dois espaços vetoriais.

Seja uma transformação linear $L: U \longrightarrow W$.

Uma transformação linear, por ser função, pode ser injetiva, pode ser sobrejetiva e se ambas é bijetiva.

**Resultado**:

Se o núcleo de $L$ é $Ker(L) = \{0\}$, então

a transformação linear $L$ é injetiva (um a um).

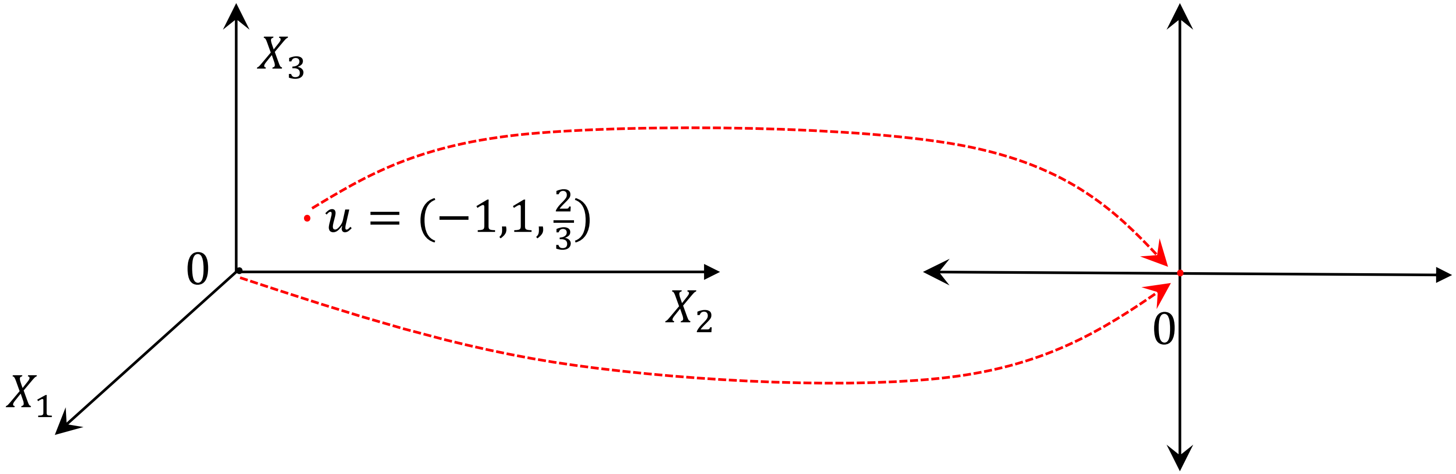
Se $Ker(L) = \{0\}$ então a base é o conjunto vazio, $\phi$.

# Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

**Exemplos**:

1. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$ **não é injetiva.**

   Lembrar que o núcleo tinha uma base não vazia.



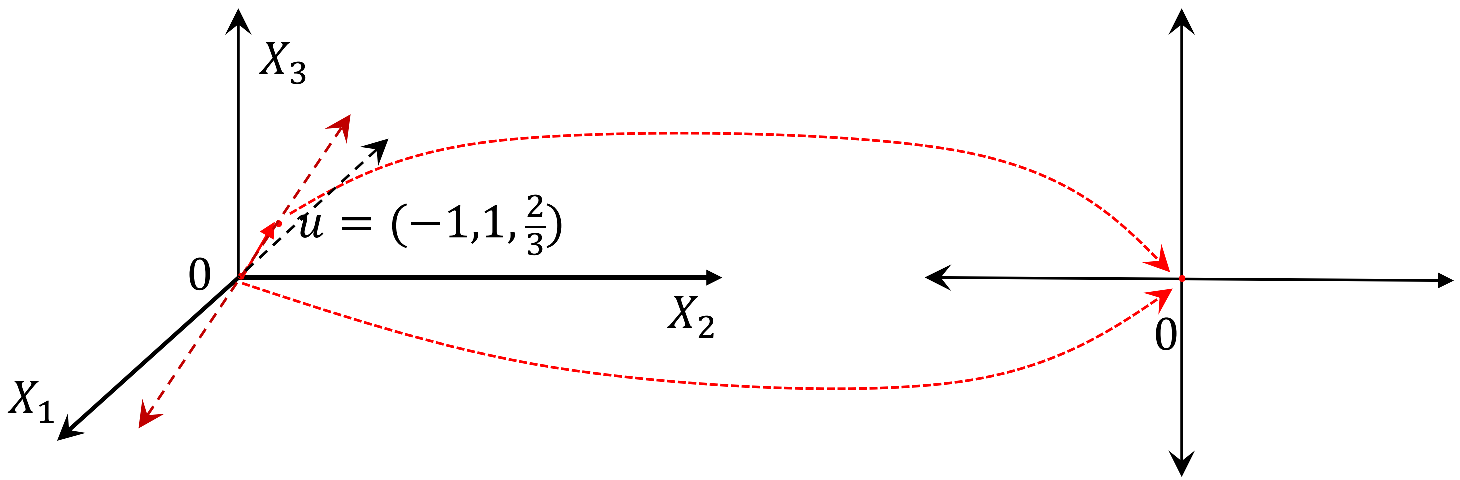
# Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

**Exemplos**:

1. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$ **não é injetiva.**

Observar que toda a reta (vermelha) tem imagem o zero em $\mathbb{R}^2$.



# Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

**Exemplos**:

1. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$ **não é injetiva.**

   Lembrar que o núcleo tinha uma base não vazia.

2. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2$, com

$$L(x, y, z) = xt^2 + yt + z$$

A única forma de formar o polinômio zero é com

$$Ker(L) = \{(0,0,0)\}$$

E para qualquer polinômio $p = at^2 + bt + c$ existe a tripla $(a, b, c)$ que $L(a, b, c) = p$. $\boldsymbol{L}$ **é sobrejetiva**.

# Vetores como matrizes coluna

Seja $U$ um espaço vetorial de dimensão $n$, isto é

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

é uma base de $U$.

Lembrar que todo vetor de $U$ é combinação linear dos elementos da base, então, se $x \in U$ temos

$$x = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n$$

Considerando a base fixa, podemos associar todo vetor com a matriz dos coeficientes únicos que precisa o vetor para ser representado como combinação linear dos elementos da base.

# Vetores como matrizes coluna

Seja $U$ um espaço vetorial de dimensão $n$, isto é

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

é uma base de $U$.

Considerando a combinação linear de $x \in U$, temos

$$x = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n \cong \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_\beta$$

Cuidado, tem que preservar a ordem em $\beta$.

# Vetores como matrizes coluna

Seja $U$ um espaço vetorial e $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ base

Considerando a combinação linear de $x \in U$, temos

$$x = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n \cong \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_\beta$$

Observar:

A base será considerada como conjunto ordenado.

Se a base tem $n$ elementos, a matriz associada será de ordem $n \times 1$.

# Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} = \{\beta_1, \beta_2\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2\ ) \in \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2\ ) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1\beta_1 + x_2\beta_2$$

$$x = (x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_\beta = x_1\beta_1 + x_2\beta_2$$

Assim: $(2,1) \cong \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cong 2(1,0) + 1\ (0,1)$

$$\left(4, -\tfrac{1}{3}\right) \cong \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cong 4\beta_1 - \tfrac{1}{3}\beta_2$$

Por ser a base canônica não precisa ser referenciada.

# Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\beta = \{(0,1),(1,0)\} = \{\beta_1, \beta_2\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2\ ) \in \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2\ ) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1\beta_2 + x_2\beta_1$$

$$x = (x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}_\beta$$

Assim: $(2,1) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_\beta$ e $\left(4, -\frac{1}{3}\right) \cong \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 4 \end{bmatrix}_\beta$

Por não ser a base canônica, esta deve ser referenciada informando a base utilizada.

# Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja $\mathbb{R}^2$ e a base

$$\beta = \{(1,1), (-1,1)\} = \{\beta_1, \beta_2\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2\ ) \in \mathbb{R}^2$

$$x = c_1(1,1) + c_2(-1,1) = (c_1 - c_2, c_1 + c_2)$$

Resolvendo: $c_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $c_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$

$$x = (x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \end{bmatrix}_\beta$$

Assim: $(2,1) \cong \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_\beta$ e $(2,1) = \frac{3}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1)$.

# Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja $\mathbb{R}^4$ e a base canônica

$$\beta = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$x = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Podemos dizer: O espaço $\mathbb{R}^4$ com a base $\beta$ é equivalente ao espaço de matrizes $M_{4\times 1}$ com a base

$$\bar{\beta} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

# Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja o espaço de polinômios $P_3$ e a base

$$\beta = \{t^3, t^2, t, 1\} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$$

Sabemos que: $p = p_3 t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0 \in P_3$

$$p = p_3\beta_1 + p_2\beta_2 + p_1\beta_3 + p_0\beta_4$$

Assim

$$p = p_3 t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0 \cong \begin{bmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix}_\beta$$

$P_3$ com a base $\beta$ é equivalente a $M_{4\times 1}$ com a $\bar{\beta}$.

# Utilizando vetores como matriz coluna

Para exemplificar, utilizaremos

A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

e os espaços vetoriais com as bases canônicas.

Representando como matrizes coluna, temos

$$(x, y, z) \cong \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(x + y, 2x + 3z) \cong \begin{bmatrix} x + y \\ 2x + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

# Utilizando vetores como matriz coluna

A transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

$$(x, y, z) \cong \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(x + y, 2x + 3z) \cong \begin{bmatrix} x + y \\ 2x + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Assim, podemos representar como

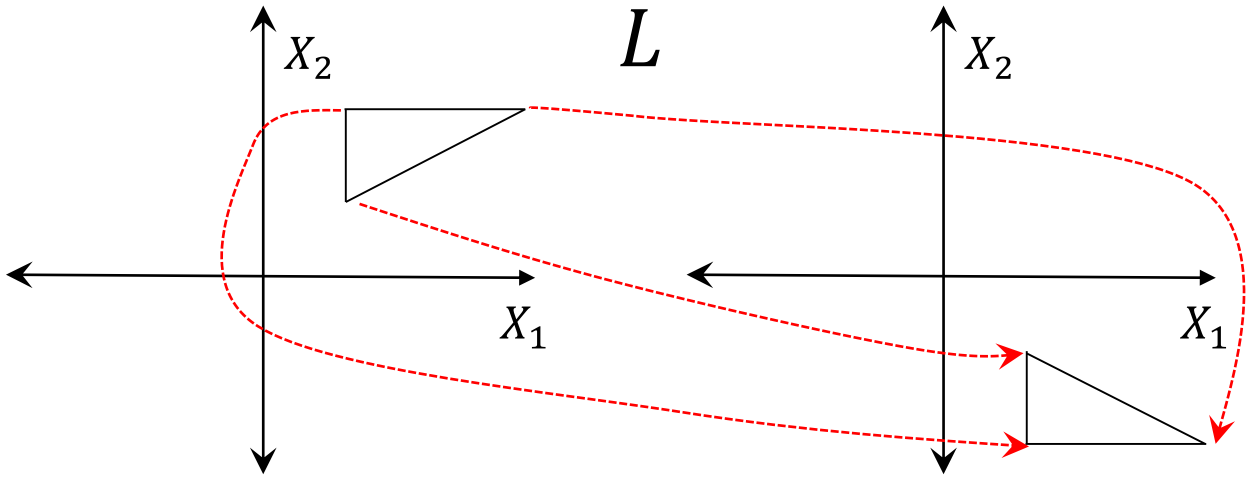
$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad ???$$

# Transformação linear reflexão no eixo $X_1$

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão com o eixo $X_1$ $(X)$:

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \Leftrightarrow L(x, y) = (x, -y)$$

Graficamente:

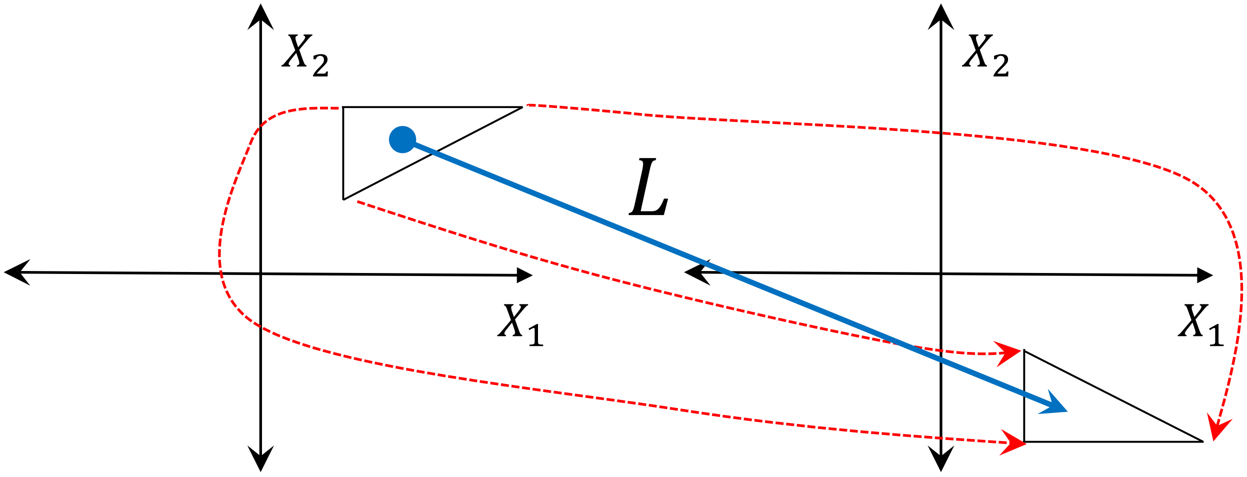


# Transformação linear reflexão no eixo $X_1$

Vejamos uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão com o eixo $X_1$ :

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

Graficamente:

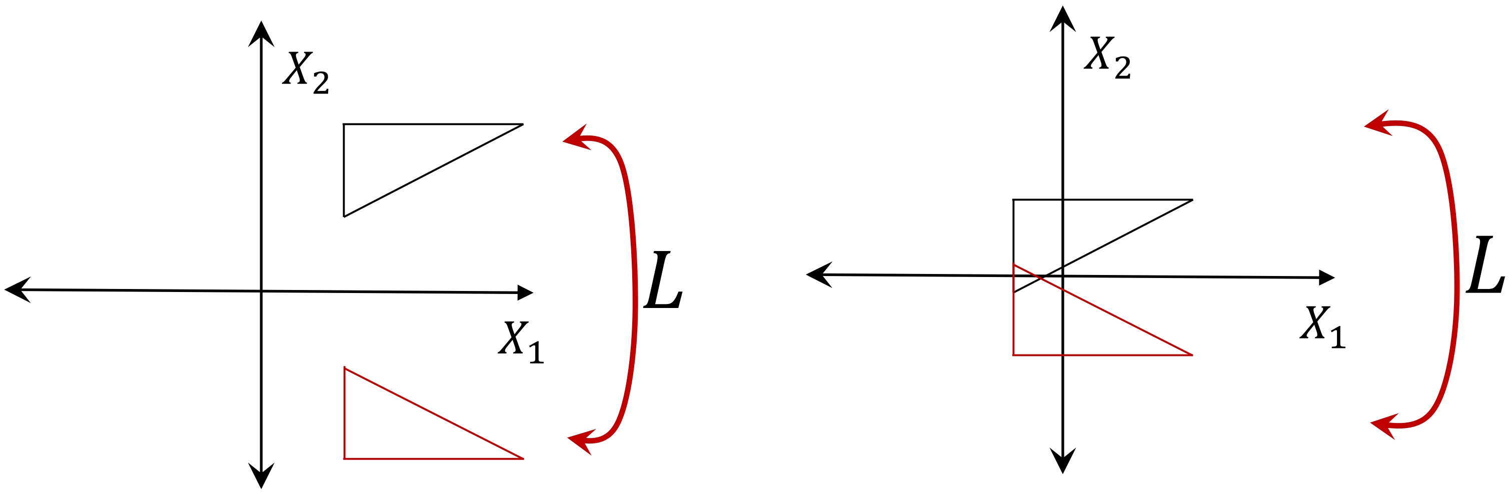


# Transformação linear reflexão no eixo $X_1$

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão com o eixo $X_1$ :

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

Graficamente:




O eixo $X_1$ funciona como um "espelho" em $L$.

# Transformação linear reflexão no eixo $X_1$

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão com o eixo $X_1$ :

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

Representando como matrizes:

$$(x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (x_1, -x_2) \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

Mas $\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

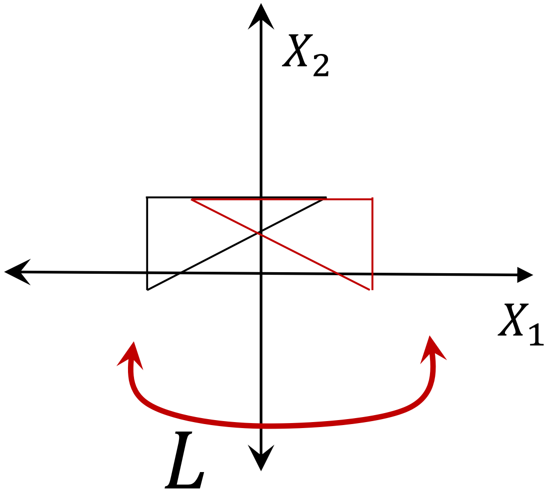
$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. A matriz representa a TL.

# Transformação linear reflexão no eixo $X_2$

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão com o eixo $X_2$ :

$$L(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$$

Graficamente:




$$(-x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Transformação linear reflexão na origem

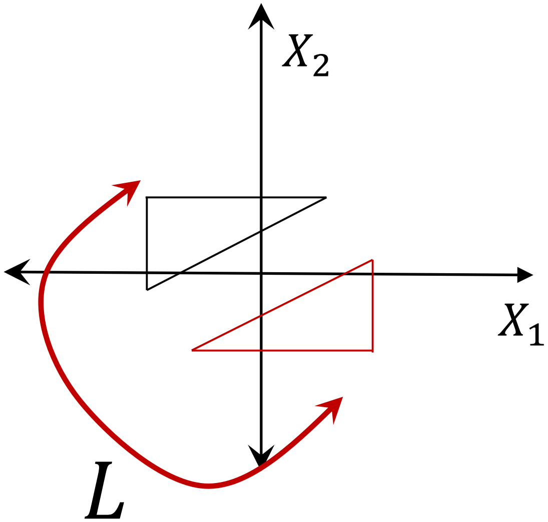
Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de reflexão na origem:

$$L(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$$

Graficamente:

$$(-x_1, -x_2) \cong \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

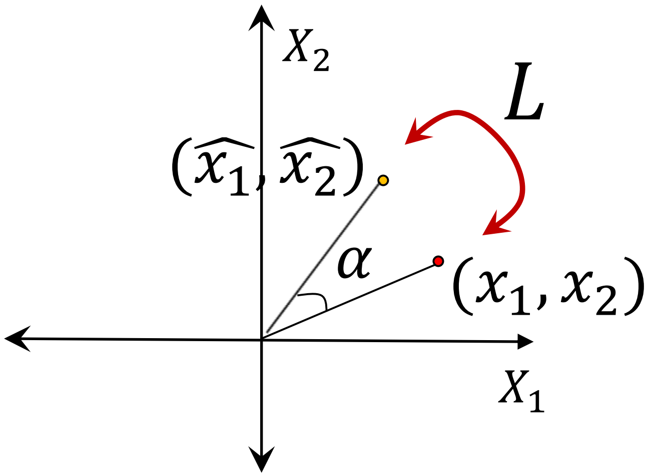



$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Transformação: rotação em um ângulo $\alpha$

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de rotação em um ângulo $\alpha$:

$$L(x_1, x_2) = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$$

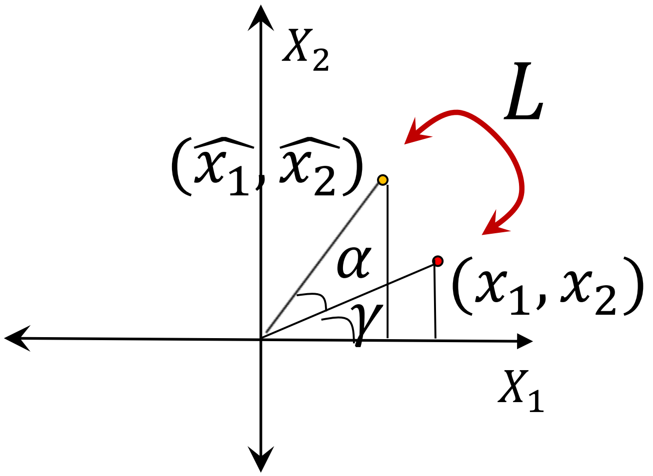


# Transformação: rotação em um ângulo $\alpha$

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de rotação em um ângulo $\alpha$:

$$L(x) = L(x_1, x_2) = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \hat{x}$$

Vemos que: $\|x\| = \|\hat{x}\| = m$




$$\cos(\gamma + \alpha) = \frac{\widehat{x_1}}{m}$$

$$\text{sen}(\gamma + \alpha) = \frac{\widehat{x_2}}{m}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{x_1}{m}$$

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{x_2}{m}$$

$$\cos(\gamma + \alpha) = \cos(\gamma)\cos(\alpha) - sen(\gamma)sen(\alpha)$$

$$\text{sen}(\gamma + \alpha) = \text{sen}(\gamma)\cos(\alpha) + cos(\gamma)sen(\alpha)$$

# Transformação: rotação em um ângulo $\alpha$

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de rotação em um ângulo $\alpha$:

$$L(x) = L(x_1, x_2) = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \hat{x}$$

$$\cos(\gamma + \alpha) = \cos(\gamma)\cos(\alpha) - sen(\gamma)sen(\alpha)$$

$$\frac{\widehat{x_1}}{m} = \frac{x_1}{m}\cos(\alpha) - \frac{x_2}{m}sen(\alpha)$$

$$\text{sen}(\gamma + \alpha) = \text{sen}(\gamma)\cos(\alpha) + cos(\gamma)sen(\alpha)$$

$$\frac{\widehat{x_2}}{m} = \frac{x_2}{m}\cos(\alpha) + \frac{x_1}{m}sen(\alpha)$$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: U \longrightarrow W$, entre o espaço vetorial $U$ com base $\beta$ e o espaço vetorial $W$ com base $\delta$.

Assim, se $X \in U$, então existe uma representação

$$X = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n$$

onde:

$$X \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_\beta$$

Observar que $X$ é um vetor variável em $U$.

# Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: U \longrightarrow W$, entre o espaço vetorial $U$ com base $\beta$ e o espaço vetorial $W$ com base $\delta$.

Então:

$$L(X) = L(x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n)$$
$$L(X) = x_1L(\beta_1) + x_2L(\beta_2) + \cdots + x_nL(\beta_n)$$

Como os vetores $L(\beta_1)$, $L(\beta_2)$, ..., $L(\beta_n)$ estão em $W$, devem existir representações como matrizes coluna de cada um deles baseadas na base $\delta$.

Então as colunas são: $[L(\beta_1)]_\delta$ , ..., $[L(\beta_n)]_\delta$.

# Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: U \longrightarrow W$, entre o espaço vetorial $U$ com base $\beta$ e o espaço vetorial $W$ com base $\delta$.

Então aplicando as equivalências com as matrizes colunas temos:

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_\beta\right) = x_1[L(\beta_1)]_\delta + \cdots + x_n[L(\beta_n)]_\delta$$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_\beta\right) = \begin{bmatrix} [L(\beta_1)]_\delta & \ldots & [L(\beta_n)]_\delta \end{bmatrix}_\delta^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_\beta$$

# Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: U \longrightarrow W$, entre o espaço vetorial $U$ com base $\beta$ e o espaço vetorial $W$ com base $\delta$.

A matriz com colunas, uma para cada elemento da base $\beta$, representada com os coeficientes da combinação linear utilizando a base $\delta$, é chamada de matriz associada a transformação linear $L$:

$$[L]_\delta^\beta = [[L(\beta_1)]_\delta \quad \dots \quad [L(\beta_n)]_\delta]_\delta^\beta$$

# Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_1$, com

$$L(a, b, c) = (a + b)t + (2a + 3c)$$

considerando as bases canônicas.

Observar:

A base canônica em $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

A base canônica em $P_1$

$$\delta = \{t, 1\} = \{\delta_1, \delta_2\}$$

# Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_1$, com

$$L(a,b,c) = (a+b)t + (2a+3c)$$

considerando as bases canônicas.

Por ser Transformação Linear:

$$L(a,b,c) = L(a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3)$$

$$L(a,b,c) = aL(\beta_1) + bL(\beta_2) + cL(\beta_3)$$

$$\begin{cases} L(\beta_1) = t + 2 \\ L(\beta_2) = t \\ L(\beta_3) = 3 \end{cases}$$

# Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_1$, com

$$L(a,b,c) = (a+b)t + (2a+3c)$$

considerando as bases canônicas.

$$L(a,b,c) = aL(\beta_1) + bL(\beta_2) + cL(\beta_3)$$

$$\begin{cases} L(\beta_1) = t+2 \\ L(\beta_2) = t \\ L(\beta_3) = 3 \end{cases}$$

Expressando os elementos de $\mathbb{R}^3$ e $P_1$ como matrizes:

$(a,b,c) \cong \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, e $L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $L(\beta_2) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $L(\beta_3) \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

# Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_1$, com

$$L(a,b,c) = (a+b)t + (2a+3c)$$

considerando as bases canônicas.

$$L\left([X]_\beta\right) = x_1[L(\beta_1)]_\delta + x_2[L(\beta_2)]_\delta + x_3[L(\beta_3)]_\delta$$

$(a,b,c) \cong \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, e $L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $L(\beta_2) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $L(\beta_3) \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$[L]\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mathrm{b}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[L]\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

# Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_1$, com

$$L(a,b,c) = (a+b)t + (2a+3c)$$

considerando as bases canônicas.

$$(a,b,c) \cong \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ e } L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, L(\beta_2) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L(\beta_3) \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[L]\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

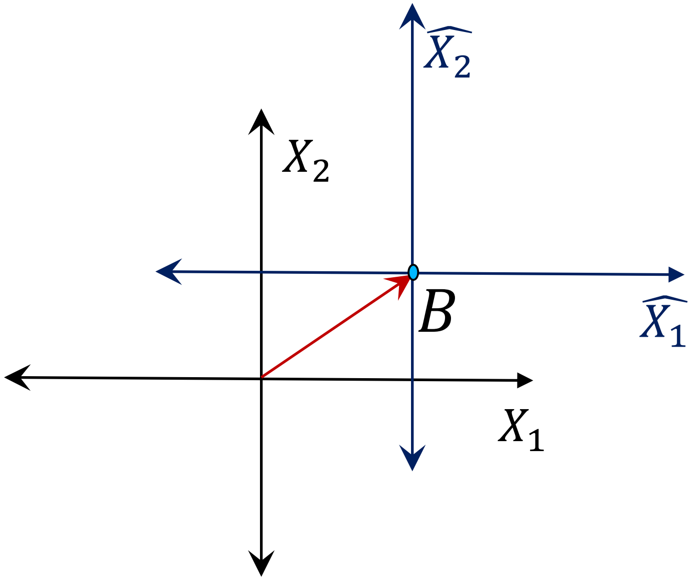
$$[L]_\delta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}_\delta^\beta$$

Em conclusão, estamos associando uma transformação linear com uma matriz fixa de ordem: $\dim(P_1) \times \dim(\mathbb{R}^3)$

# Mudança de coordenadas

**Translação de eixos**:

Considerando $X$ a base atual, então para **uma mudança de coordenadas por translação** se faz: $X = \hat{X} + B$




$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{x_1} = x_1 - b_1 \\ \widehat{x_2} = x_2 - b_2 \end{cases}$$

# Exemplo

Considere a expressão:

$$2x^2 - 8x + y^2 - 2y = 3$$

$$2(x^2 - 4x) + y^2 - 2y + 1 = 3 + 1$$

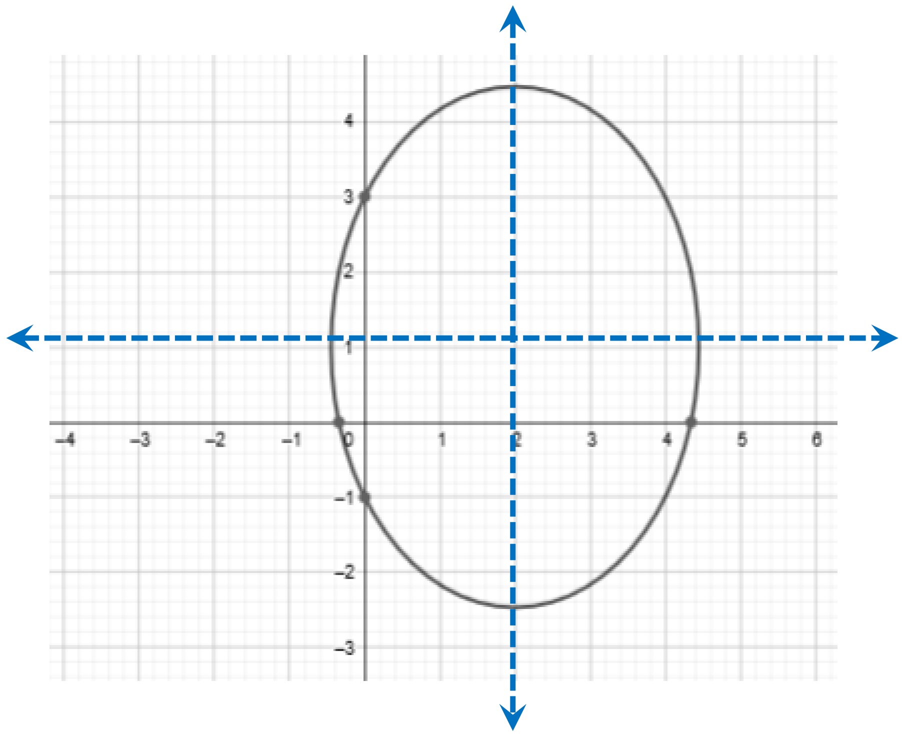
$$2(x^2 - 4x + 4) + y^2 - 2y + 1 = 3 + 1 + 8$$

$$2(x-2)^2 + (y-1)^2 = 12$$

$$\begin{cases} \widehat{x_1} = x_1 - b_1 \\ \widehat{x_2} = x_2 - b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = x - 2 \\ \hat{y} = y - 1 \end{cases}$$

$$2\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 12$$

# Coordenadas transladadas




Coordenadas em $XY$ Coordenadas em $\hat{X}\hat{Y}$

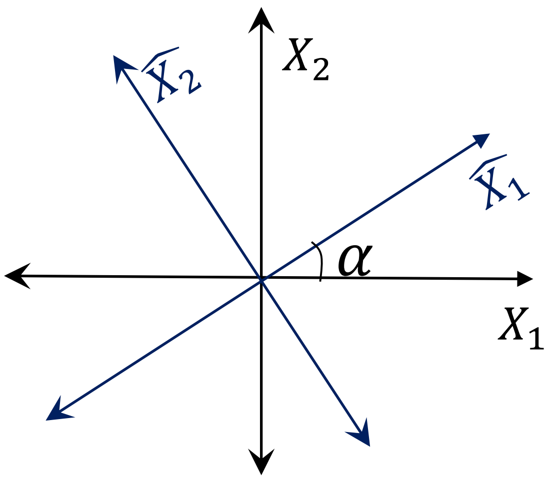
# Mudança de coordenadas

**Rotação de eixos**:

A matriz TL de rotação $\alpha$ é $A = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$

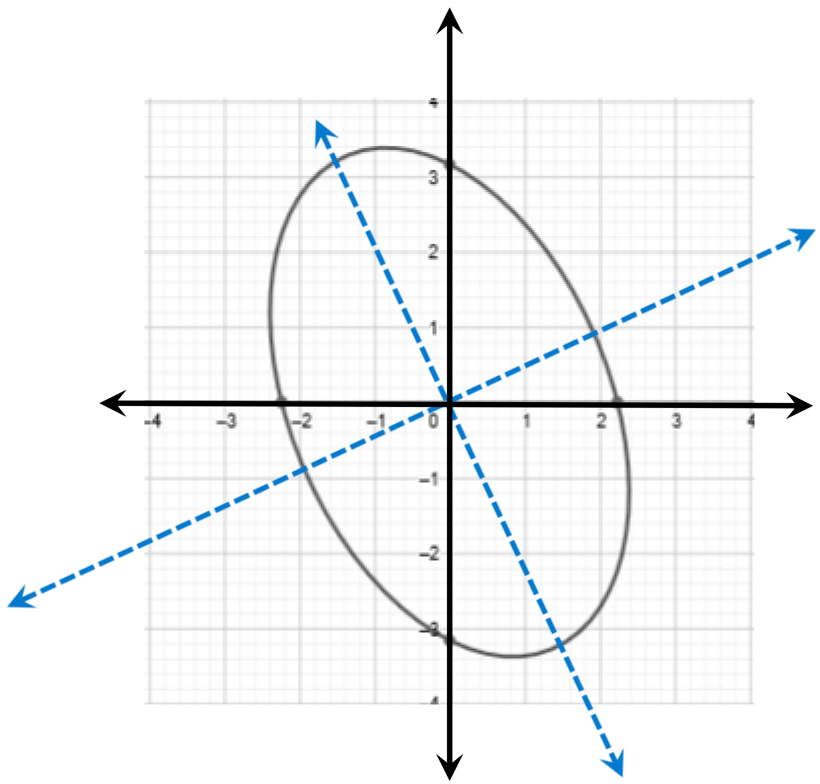
Para **uma mudança de coordenadas por rotação** se faz: $X = A\hat{X}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix}$$




$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{x_1} = x_1 cos\alpha + x_2 sen\alpha \\ \widehat{x_2} = -x_1 sen\alpha + x_2 cos\alpha \end{cases}$$

# Rotação de eixos



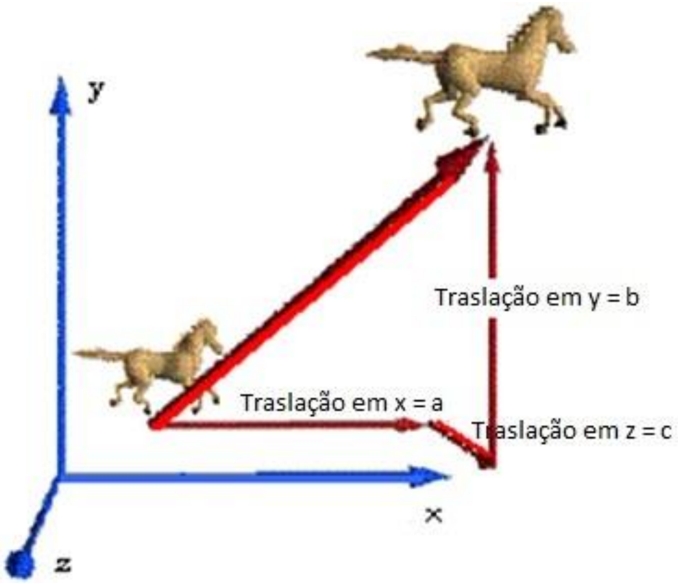

$$2x^2 + xy + y^2 = 10$$

# Ótica geométrica

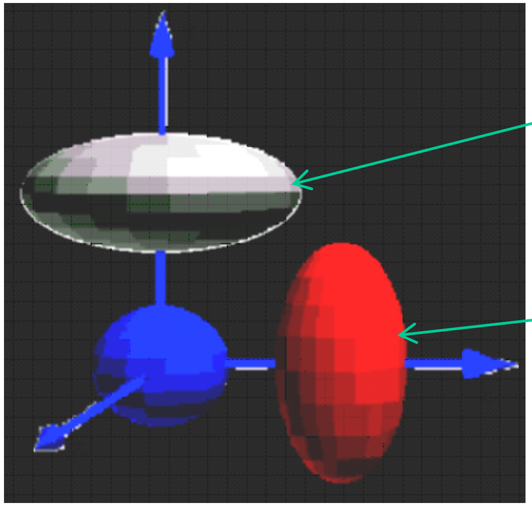
Descreve a formação de imagens utilizando um tratamento simples da luz.

- A luz é descrita por raios que representam a direção da propagação
- Velocidade da luz no vácuo $c \approx 3 \times 10^8$ m/s e velocidades menores fora do vácuo.
- Quando a luz encontra uma interface entre dois meios acontece reflexão ou refração.
- Transformações acontecem ao atravessar lentes.

# Quais as transformações usadas?




A imagem do cavalo foi traslada
T(X) = X+B = (x,y,z) + (a,b,c)
Transformação não linear.



A esfera foi escalonada em x e z
e depois trasladada 3 unidades em y.

A imagem transformada acima, foi
rotacionada um ângulo de $-(\pi/2)$.